

Kontrollergebnisse zu den Übungsklausuren

Nachfolgend finden Sie zu den Übungsklausuren im Buch



Ingolf Terveer
Mathematik für Wirtschaftswissenschaften

6., überarbeitete Auflage, 509 Seiten
ISBN 978-3-8252-8854-9 (e-PDF 9-783-8385-8854-4)

Ergebnisse bzw. kurze Hinweise zum Ansatz. Versuchen Sie zunächst, mit den Ergebnissen auszukommen. Sollte dies nicht genügen, schlagen Sie in den ausführlichen Lösungen nach.

Klausur 1

1. Zeilenstufenform: $\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \end{array} \right)$, spezielle Lösung: $(8, 10, 0, 4, 0)^T$, allgemeine Lösung: alle $(x_1, \dots, x_5)^T \in \mathbb{R}^5$ mit $x_1 = 8 - 3x_3 - x_5$, $x_2 = 10 + 2x_3 - x_5$, $x_4 = 4$.
2. Basisformen nur in a), c), d). a) kein Engpass zu Spalte 1, unlösbar; c) mit einem Basiswechsel optimale Lösung $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = \frac{7}{2}$ mit Zielwert $\frac{31}{2}$ ermittelt; d) mit einem Basiswechsel optimale Lösung $x_1 = 10$, $x_2 = 20$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, $x_5 = 20$, $x_6 = 0$ mit Optimalwert -200 .
3. a) $H(a)$ invertierbar $\Leftrightarrow a \notin \{0, \pm\sqrt{5}\}$. Der Eintrag lautet $\frac{a}{a^2-5}$.
b) Eigenwerte: $1, 1 + \sqrt{5}, 1 - \sqrt{5}$. Die Matrix ist indefinit.
4. a) $f(x) = \frac{1}{2x} - \frac{2}{x-2} = \frac{2+3x}{4x-x^2}$, $f'(x) = \frac{1}{2x^2} + \frac{2}{(x-2)^2} = \frac{3x^2+4x-4}{2x^4-8x^3+8x^2}$
b) f ist auf $]0; 2[$ konvex.
c) f hat in $x = \frac{2}{3}$ ein globales Minimum.
5. $K_0 = K_{n+1/2} / \left(q^n \cdot \left(1 + \frac{q-1}{2} \right) \right)$, speziell 25000, 8
6. a) $\nabla f(x, y) = \left(\frac{200y^2 - 200x^3y^2}{(x^3+2)^2}, \frac{200xy}{x^3+2} \right)^T$
b) $\varepsilon_f(x, y) = \left(\frac{2-2x^3}{x^3+2}, 2 \right)$. Summe ist $\frac{3}{5}$.
c) f ist nicht homogen.
d) Die Änderung muss näherungsweise $\frac{10}{7} \Delta y$ sein.
7. a) $x = 75$, $y = 5$, $z = 60$, $\lambda = -300$, $\mu = -375$.
b) $x = 75$, $y = 5$, $z = 60$, ohne Lagrange-Multiplikatoren (Schattenpreise!).
c) Marginale Optimalwertänderung ist 1500. a sollte größer als Null sein.

Klausur 2

1. a) $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$. b) $C = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{2}{2} & \frac{7}{15} \end{pmatrix}$
- c) 500 Kilogramm R_3 , 2000 Kilogramm E_1 , 7500 Kilogramm E_2 .
2. Standardform: Minimiere $-x_1 - 4x_2 - 2x_3 - x_4 + x_5 - x_6 - x_7$ unter $-x_1 + x_2 - x_3 + 3x_5 + 7x_7 + x_8 = 7$, $-x_1 + 2x_2 + 2x_4 + x_6 + 3x_7 + x_9 = 3$, $2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 6x_7 + x_{10} = 10$ und $x_i \geq 0$. Phase 1 ist nicht erforderlich. Optimal ist $x_1 = 12, x_2 = 0, x_3 = 16, x_4 = 0, x_5 = 0, x_6 = 0, x_7 = 5$.
3. a) $A(t)$ ist invertierbar für $t \notin \{-1, 1\}$
 b) Kleinsten Eigenwert: $\lambda = -3$. Eigenvektor dazu ist z.B. $(1, 0, -1)^T$
4. a) $P = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$. b) $P^n = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} \left(\frac{5}{12}\right)^n + \frac{4}{7} & \left(-\frac{4}{7}\right) \left(\frac{5}{12}\right)^n + \frac{4}{7} \\ \left(-\frac{3}{7}\right) \left(\frac{5}{12}\right)^n + \frac{3}{7} & \frac{4}{7} \left(\frac{5}{12}\right)^n + \frac{3}{7} \end{pmatrix}$.
- c) $a_n = -\frac{9}{28} \left(\frac{5}{12}\right)^n + \frac{4}{7}$, übersteigt 50% nach zwei Quartalen.
 d) Langfristig können nur $\frac{4}{7}$ Marktanteil, d.h. ca 57,1% erreicht werden.
5. $p_{\text{eff}} = 100 \cdot \left(\left(1 + \frac{p/n}{100}\right)^n - 1 \right)$ (maximal $100 \cdot (e^{p/100} - 1)$), speziell 5,4307 (maximal 5,4429)
6. a) $f'(x) = \frac{\ln(x+1)-1}{(\ln(x+1))^2}$, $f''(x) = \frac{2-\ln(x+1)}{(x+1)(\ln(x+1))^3}$
 b) Lokales Minimum für $x = e - 1$, lokales Randmaximum für $x = 10$.
 c) Globales Minimum für $x = e - 1$, globales Maximum für $x = 10$.
 d) f ist in $[0, e^2 - 1]$ konvex und in $[e^2 - 1, 10]$ konkav.
7. a) $\nabla f(x, y, z) = \left(-\frac{y^{\frac{1}{3}} z^{\frac{2}{3}}}{x^2}, \frac{1}{3} \frac{y^{-\frac{2}{3}} z^{\frac{2}{3}}}{x}, \frac{2}{3} \frac{y^{\frac{1}{3}} z^{-\frac{1}{3}}}{x} \right)^T$.
 b) Die Summe hat den Wert Null.
 c) Der Preis muss um $\frac{1}{12}$ marginale Einheiten geändert werden.
 d) f ist weder konvex noch konkav.
8. $x = \frac{1}{4}$, $y = \frac{3}{4}$, $\lambda = -\frac{1}{4}$ (Schattenpreis!). Randvergleich mit $(1, 0)^T$ und $(0, 1)^T$.

Klausur 3

1. a) $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{5} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{6} & 1 & 0 \end{pmatrix}$; b) $A^2 = \begin{pmatrix} \frac{7}{20} & \frac{3}{5} & \frac{3}{10} \\ \frac{7}{30} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{5}{12} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ (2-Tages-Übergangsmatrix) c) A ist nicht invertierbar; d) Fahrer A: $\frac{2}{5}$, Fahrer B: $\frac{4}{15}$, Fahrer C: $\frac{1}{3}$; e) $-\frac{1}{2}$, 0 (A nicht invertierbar) und 1 (Marktgleichgewicht ist Eigenvektor); f) Genau für $b = \frac{2}{3}a$ und $c = 1 - \frac{5}{3}a$ mit $0 \leq a \leq \frac{3}{5}$ ist dies möglich. Mögliche Vortagsmarktanteile sind $2a - \frac{6}{5}z$, $a - 2a + \frac{1}{5}z$ und $z \in [\max(0, 10a - 5), \frac{5}{3}a]$.
2. a) Standardform: Minimiere $10000x_1 + 8000x_2 + 12000x_3 + 8000x_4$ unter $0x_1 + 20x_2 + 20x_3 + 15x_4 - x_5 = 400$, $20x_1 + 10x_2 + 20x_3 + 15x_4 - x_6 = 500$ und $x_i \geq 0$. b) Phase 1 und Phase 2 müssen durchgeführt werden. Optimal: Fabrik 1 arbeitet insgesamt 10 Stunden, Fabrik 4 arbeitet insgesamt 20 Stunden, alle anderen Fabriken arbeiten nicht.
 c) Die Kosten in Fabrik 4 dürfen höchstens 9000 Geldeinheiten betragen.

3. a) konvergent für $a = 0$ (Grenzwert b), divergent sonst.
 b) $a_n = 675 \cdot (\frac{2}{3})^n$, $\sum_{n=0}^9 a_n \approx 1989,88$ und $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = 2025$.
4. Es muss $a < q$ gelten, der Rentenbarwert ist 252000
5. a) $f(x) = \frac{10}{\ell^3}x^3 - \frac{15}{\ell^2}x^2 + 5$. Mindestlänge $\ell = 30$ Meter.
 b) Volumen allgemein $\frac{25}{2}\ell$. Bei $\ell = 30$ sind das 375 Kubikmeter.
6. a) $\nabla f(x, y) = (\frac{(x-\frac{1}{2}y)(x+\frac{5}{2}y)}{(x+y)^2}, \frac{(x-\frac{1}{2}y)(-2x-\frac{1}{2}y)}{(x+y)^2})^T$
 b) h ist linear homogen. c) f ist konvex. d) globales Minimum für $y = 2x$.
7. a) $x = 36$, $y = 9$, $z = 4$, $\lambda = 12$ mit Zielwert (ZW) 66
 b) Insbesondere Slater-Bedingung z.B.: $g(121, 1, 1) < 0$
 c) $(0, \frac{1089}{25}, \frac{484}{25})^T$ hat ZW 145, 2. $(\frac{1089}{16}, 0, \frac{121}{16})^T$ hat ZW 90, 75. $(\frac{1936}{25}, \frac{484}{25}, 0)^T$ hat ZW 116, 16. $(0, 0, 121)^T$ hat ZW 363. $(0, 121, 0)^T$ hat ZW 242. $(121, 0, 0)$ hat ZW 121.
 d) Der Exponent sollte jeweils marginal erhöht werden.

Klausur 4

1. $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 & 12 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 \end{array} \right)$
2. $(3) \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + (-2) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + (-1) \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -5 \\ 10 \end{pmatrix}$
3. $f(x) = -7x^2 - 70x - 178$
4. 70,3297 Prozent
5. 71913,50€
6. a) $[-1; \infty[$,
 b) x ,
 c) $W'(x) = \frac{W(x)}{x(1+W(x))}$
7. a) $f(x, 10) \approx -300x + 4000$, $f(10, y) \approx 200y - 1000$,
 b) Die Nachfrage verringert sich etwa um 5 Prozent,
 c) $\frac{2}{3}$,
 d) $x = \sqrt[3]{500}$
8. a) $x = 2, y = 8$ und $x = 4, y = 10$
 b) $x = \frac{16}{3}, y = \frac{29}{3}$ und $x = 6, y = 9$
9. a) $F(x) = \frac{1}{4}x^4 - a \cdot \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + ax$,
 b) $a = \frac{3}{8}$
10. a) $F(x, y) = \frac{1}{2} \cdot (-ax^2y + axy^2 - xy^2 + 2xy)$,
 b) $\frac{1}{2}$

Klausur 5

1. a) 625 auf Stufe A, 225 auf Stufe B und 50 auf Stufe C,
b) 0 auf Stufe A, 540 auf Stufe B und 360 auf Stufe C
2. a) $\lambda = \frac{3}{4}a = 0.75a$ und $\lambda = \frac{1}{4}$ und $\lambda = \frac{11}{4}$.
b) Zu den Eigenwerten in der obigen Reihenfolge lauten Eigenvektoren $(1, 0, 0)^T$, $(0, -3, 1)^T$ und $(0, 1/3, 1)^T$
3. $3(x-2)^2(x+7a)$
4. $\tan(\beta) = 2,75 \cdot \tan(\alpha)$
5. a) streng monoton wachsend,
b) beschränkt durch $\frac{1}{2}$,
c) konvergent mit Grenzwert $\frac{1}{2}$
6. 25
7. a) Homogen vom Grad $3/2$,
b) Die partiellen Ableitungen sind (nach x) $-\frac{y^2+z^2}{2(x+y)^{3/2}}$, (nach y) $\frac{4xy+3y^2-z^2}{2(x+y)^{3/2}}$, (nach z) $\frac{2z}{\sqrt{x+y}}$,
c) $-\frac{29}{4} - \frac{29}{64}x + \frac{195}{64}y + \frac{3}{2}z$
d) $4a^{5/2}$
8. a) $x = \sqrt{\frac{5}{a}}$, $y = \sqrt{5}$,
b) $x = \frac{20a^2-1}{2a^3}$, $y = y = \frac{1}{2a^2}$,
c) $x = 6$, $y = 3$, $z = 6 \cdot \frac{1}{a}$