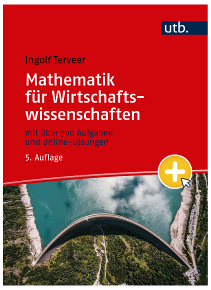
Kontrollergebnisse zu den Übungsklausuren

Nachfolgend finden Sie zu den Übungsklausuren im Buch



Ingolf Terveer
Mathematik für Wirtschaftswissenschaften

5., überarbeitete Auflage, 503 Seiten
ISBN 978-3-8252-8818-1 (e-PDF 978-3-8252-8818-6)

Ergebnisse bzw. kurze Hinweise zum Ansatz. Versuchen Sie zunächst, mit den Ergebnissen auszukommen. Sollte dies nicht genügen, schlagen Sie in den ausführlichen Lösungen nach.

Klausur 1

1. Zeilenstufenform: $\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \end{array}\right)$, spezielle Lösung: $(8, 10, 0, 4, 0)^T$, allgemeine Lösung: alle $(x_1, \ldots, x_5)^T \in \mathbb{R}^5$ mit $x_1 = 8 - 3x_3 - x_5$, $x_2 = 10 + 2x_3 - x_5$, $x_4 = 4$.

2. Basisformen nur in a),c),d). a) kein Engpass zu Spalte 1, unlösbar; c) mit einem Basiswechsel optimale Lösung $x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = \frac{7}{2}$ mit Zielwert $\frac{31}{2}$ ermittelt; d) mit einem Basiswechsel optimale Lösung $x_1 = 10, x_2 = 20, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 20, x_6 = 0$ mit Optimalwert -200.

3. a) $H(a)$ invertierbar $\Leftrightarrow a \notin \{0, \pm\sqrt{5}\}$. Der Eintrag lautet $\frac{a}{a^2-5}$.

b) Eigenwerte: 1, $1 + \sqrt{5}$, $1 - \sqrt{5}$. Die Matrix ist indefinit.

4. a) $f(x) = \frac{1}{2x} - \frac{2}{x-2} = \frac{2+3x}{4x-x^2}$, $f'(x) = \frac{1}{2x^2} + \frac{2}{(x-2)^2} = \frac{3x^2+4x-4}{2x^4-8x^3+8x^2}$

b) f ist auf $]0; 2[$ konvex.

c) f hat in $x = \frac{2}{3}$ ein globales Minimum.

5. $K_0 = K_{n+1/2} / \left(q^n \cdot (1 + \frac{q-1}{2})\right)$, speziell $25000,8$

6. a) $\nabla f(x, y) = (\frac{200y^2 - 200x^3y^2}{(x^3+2)^2}, \frac{200xy}{x^3+2})^T$

b) $\varepsilon_f(x, y) = (\frac{2-2x^2}{x^3+2}, 2)$. Summe ist $\frac{3}{5}$.

c) f ist nicht homogen.

d) Die Änderung muss näherungsweise $\frac{10}{7}\Delta y$ sein.

7. a) $x = 75,\ y = 5,\ z = 60,\ \lambda = -300,\ \mu = -375$.

b) $x = 75,\ y = 5,\ z = 60$, ohne Lagrange-Multiplikatoren (Schattenpreise!).

c) Marginale Optimalwertänderung ist 1500. a sollte größer als Null sein.

Klausur 2

1. a) $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5} \\ 0 & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$. **b)** $C = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{2} & \frac{7}{15} \end{pmatrix}$

c) 500 Kilogramm R_3, 2000 Kilogramm E_1, 7500 Kilogramm E_2.

2. Standardform: Minimiere $-x_1 - 4x_2 - 2x_3 - x_4 + x_5 - x_6 - x_7$ unter $-x_1 + x_2 - x_3 + 3x_5 + 7x_7 + x_8 = 7$, $-x_1 + 2x_2 + 2x_4 + x_6 + 3x_7 + x_9 = 3$, $2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 6x_7 + x_{10} = 10$ und $x_i \geq 0$. Phase 1 ist nicht erforderlich. Optimal ist $x_1 = 12, x_2 = 0, x_3 = 16, x_4 = 0, x_5 = 0, x_6 = 0, x_7 = 5$.

3. a) $A(t)$ ist invertierbar für $t \notin \{-1, 1\}$

b) Kleinster Eigenwert: $\lambda = -3$. Eigenvektor dazu ist z.B. $(1, 0, -1)^T$

4. a) $P = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$. **b)** $P^n = \begin{pmatrix} \frac{3}{7}\left(\frac{5}{12}\right)^n + \frac{4}{7} & \left(-\frac{4}{7}\right)\left(\frac{5}{12}\right)^n + \frac{4}{7} \\ \left(-\frac{3}{7}\right)\left(\frac{5}{12}\right)^n + \frac{3}{7} & \frac{4}{7}\left(\frac{5}{12}\right)^n + \frac{3}{7} \end{pmatrix}$.

c) $a_n = -\frac{9}{28}\left(\frac{5}{12}\right)^n + \frac{4}{7}$, übersteigt 50% nach zwei Quartalen.

d) Langfristig können nur $\frac{4}{7}$ Marktanteil , d.h. ca 57,1% erreicht werden.

5. $p_{\text{eff}} = 100 \cdot \left(\left(1 + \frac{p/n}{100}\right)^n - 1\right)$ (maximal $100 \cdot \left(e^{p/100} - 1\right)$), speziell 5,4307 (maximal 5,4429)

6. a) $f'(x) = \frac{\ln(x+1)-1}{(\ln(x+1))^2}$, $f''(x) = \frac{2-\ln(x+1)}{(x+1)(\ln(x+1))^3}$

b) Lokales Minimum für $x = e - 1$, lokales Randmaximum für $x = 10$.

c) Globales Minimum für $x = e - 1$, globales Maximum für $x = 10$.

d) f ist in $[0, e^2 - 1]$ konvex und in $[e^2 - 1, 10]$ konkav.

7. a) $\nabla f(x, y, z) = \left(-\frac{y^{\frac{1}{3}} z^{\frac{2}{3}}}{x^2}, \frac{1}{3}\frac{y^{-\frac{2}{3}} z^{\frac{2}{3}}}{x}, \frac{2}{3}\frac{y^{\frac{1}{3}} z^{-\frac{1}{3}}}{x}\right)^T$.

b) Die Summe hat den Wert Null.

c) Der Preis muss um $\frac{1}{12}$ marginale Einheiten geändert werden.

d) f ist weder konvex noch konkav.

8. $x = \frac{1}{4}$, $y = \frac{3}{4}$, $\lambda = -\frac{1}{4}$ (Schattenpreis!). Randvergleich mit $(1, 0)^T$ und $(0, 1)^T$.

Klausur 3

1. a) $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{5} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{6} & 1 & 0 \end{pmatrix}$; b) $A^2 = \begin{pmatrix} \frac{7}{20} & \frac{3}{5} & \frac{3}{10} \\ \frac{7}{30} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{5}{12} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ (2-Tages-Übergangsmatrix) c) A ist nicht invertierbar; d)Fahrer A: $\frac{2}{5}$, Fahrer B: $\frac{4}{15}$, Fahrer C: $\frac{1}{3}$; e) $-\frac{1}{2}$, 0 (A nicht invertierbar) und 1 (Marktgleichgewicht ist Eigenvektor); f) Genau für $b = \frac{2}{3}a$ und $c = 1 - \frac{5}{3}a$ mit $0 \leq a \leq \frac{3}{5}$ ist dies möglich. Mögliche Vortagsmarktanteile sind $2a - \frac{6}{5}z$, $a - 2a + \frac{1}{5}z$ und $z \in [\max(0, 10a - 5), \frac{5}{3}a]$.

2. a) Standardform: Minimiere $10000x_1 + 8000x_2 + 12000x_3 + 8000x_4$ unter $0x_1 + 20x_2 + 20x_3 + 15x_4 - x_5 = 400$, $20x_1 + 10x_2 + 20x_3 + 15x_4 - x_6 = 500$ und $x_i \geq 0$. b) Phase 1 und Phase 2 müssen durchgeführt werden. Optimal: Fabrik 1 arbeitet insgesamt 10 Stunden, Fabrik 4 arbeitet insgesamt 20 Stunden, alle anderen Fabriken arbeiten nicht. c) Die Kosten in Fabrik 4 dürfen höchstens 9000 Geldeinheiten betragen.

3. a) konvergent für $a = 0$ (Grenzwert b), divergent sonst.

b) $a_n = 675 \cdot (\frac{2}{3})^n$, $\sum_{n=0}^{9} a_n \approx 1989,88$ und $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = 2025$.

4. Es muss $a < q$ gelten, der Rentenbarwert ist 252000

5. a) $f(x) = \frac{10}{\ell^3}x^3 - \frac{15}{\ell^2}x^2 + 5$. Mindestlänge $\ell = 30$ Meter.

b) Volumen allgemein $\frac{25}{2}\ell$. Bei $\ell = 30$ sind das 375 Kubikmeter.

6. a) $\nabla f(x, y) =$
$\left(\frac{(x-\frac{1}{2}y)\left(x+\frac{5}{2}y\right)}{(x+y)^2}, \frac{(x-\frac{1}{2}y)(-2x-\frac{1}{2}y)}{(x+y)^2}\right)^T$

b) h ist linear homogen. **c)** f ist konvex. **d)** globales Minimum für $y = 2x$.

7. a) $x = 36$, $y = 9$, $z = 4$, $\lambda = 12$ mit Zielwert (ZW) 66

b) Insbesondere Slater-Bedingung z.B.: $g(121, 1, 1) < 0$

c) $(0, \frac{1089}{25}, \frac{484}{25})^T$ hat ZW $145,2$. $(\frac{1089}{16}, 0, \frac{121}{16})^T$ hat ZW $90,75$. $(\frac{1936}{25}, \frac{484}{25}, 0)^T$ hat ZW $116,1\overline{6}$. $(0, 0, 121)^T$ hat ZW 363. $(0, 121, 0)^T$ hat ZW 242. $(121, 0, 0)$ hat ZW 121.

d) Der Exponent sollte jeweils marginal erhöht werden.

Klausur 4

1. $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 & 12 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 \end{array}\right)$

2. $(3)\begin{pmatrix}2\\0\\0\\4\end{pmatrix} + (-2)\begin{pmatrix}0\\1\\2\\1\end{pmatrix} + (-1)\begin{pmatrix}0\\-2\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\0\\-5\\10\end{pmatrix}$

3. $f(x) = -7x^2 - 70x - 178$

4. $70,3297$ Prozent

5. $71913,50$€

6. a) $[-1; \infty[$,

b) x,

c) $W'(x) = \frac{W(x)}{x(1+W(x))}$

7. a) $f(x, 10) \approx -300x + 4000$, $f(10, y) \approx 200y - 1000$,

b) Die Nachfrage verringert sich etwa um 5 Prozent,

c) $\frac{2}{3}$,

d) $x = \sqrt[3]{500}$

8. a) $x = 2, y = 8$ und $x = 4, y = 10$

b) $x = \frac{16}{3}, y = \frac{29}{3}$ und $x = 6, y = 9$

9. a) $F(x) = \frac{1}{4}x^4 - a \cdot \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + ax$,

b) $a = \frac{3}{8}$

10. a) $F(x, y) = \frac{1}{2} \cdot \Big(-ax^2y + axy^2 - xy^2 + 2xy\Big)$,

b) $\frac{1}{2}$

Klausur 5

1. a) 625 auf Stufe A, 225 auf Stufe B und 50 auf Stufe C,

b) 0 auf Stufe A, 540 auf Stufe B und 360 auf Stufe C

2. a) $\lambda = \frac{3}{4}a = 0.75a$ und $\lambda = \frac{1}{4}$ und $\lambda = \frac{11}{4}$.

b) Zu den Eigenwerten in der obigen Reihenfolge lauten Eigenvektoren $(1,0,0)^T$, $(0,-3,1)^T$ und $(0,1/3,1)^T$

3. $3(x-2)^2(x+7a)$

4. $\tan(\beta) = 2,75 \cdot \tan(\alpha)$

5. a) streng monoton wachsend,

b) beschränkt durch $\frac{1}{2}$,

c) konvergent mit Grenzwert $\frac{1}{2}$

6. 25

7. a) Homogen vom Grad 3/2,

b) Die partiellen Ableitungen sind (nach x) $-\frac{y^2+z^2}{2(x+y)^{3/2}}$, (nach y) $\frac{4xy+3y^2-z^2}{2(x+y)^{3/2}}$, (nach z) $\frac{2z}{\sqrt{x+y}}$,

c) $-\frac{29}{4} - \frac{29}{64}x + \frac{195}{64}y + \frac{3}{2}z$

d) $4a^{5/2}$

8. a) $x = \sqrt{\frac{5}{a}}$, $y = \sqrt{5}$,

b) $x = \frac{20a^2-1}{2a^3}, y = y = \frac{1}{2a^2}$,

c) $x = 6$, $y = 3$, $z = 6 \cdot \frac{1}{a}$