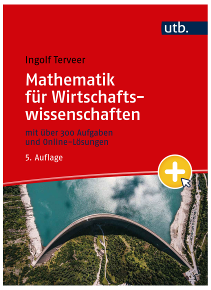
Kontrollergebnisse zu den Übungsaufgaben

Stand 9. Dezember 2024

Nachfolgend finden Sie zu den Übungsaufgaben im Buch



Ingolf Terveer
Mathematik für Wirtschaftswissenschaften

5., überarbeitete Auflage, 503 Seiten
ISBN 978-3-8252-8818-1 (e-PDF 978-3-8252-8818-6)

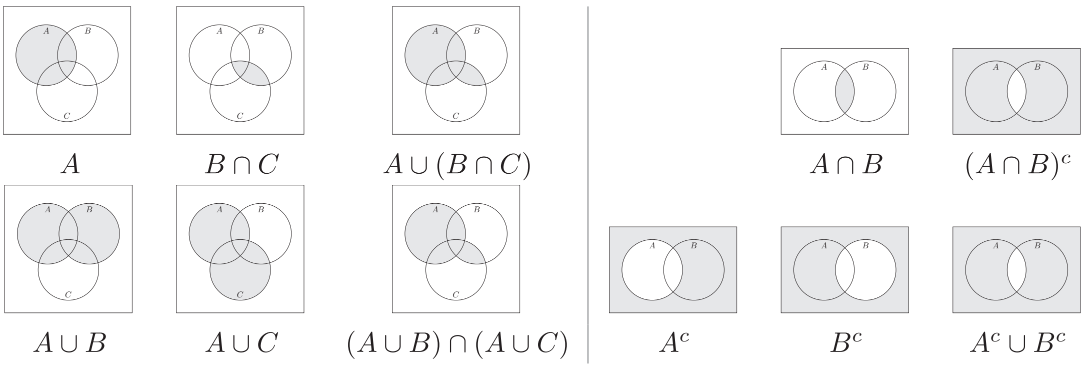
Ergebnisse bzw. kurze Hinweise zum Ansatz. Versuchen Sie zunächst, mit den Ergebnissen auszukommen. Sollte dies nicht genügen, schlagen Sie in den ausführlichen Lösungen nach.

Kapitel 1

1.

- $0 \in \mathbb{N}_0$, aber $0 \notin \mathbb{N}$
- $-1 \in \mathbb{Z}$, aber $-1 \notin \mathbb{N}_0$
- $\frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$, aber $\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$
- $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$, aber $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$
- $i \in \mathbb{C}$, aber $i \notin \mathbb{R}$

2.



3. a) $\{1, 2\}$, b) $]-2; 8]$, c) $]5; 7]$, d) $]5; 9]$

4. a) erfüllbar, widerlegbar, nicht allgemeingültig, nicht unerfüllbar. b) Es wären keine BWL-Studierenden im Hörsaal. c) p ist die neueste Prüfungsordnung für Betriebswirtschaftslehre.

5. a) 3,2 b) $x = -2$ kann im Nenner nicht eingesetzt werden.

6.a)=c) und b)=d)

7. a) $22x$, b) $-24x + \frac{46}{3}y$

8. $\frac{4x^2-18x-28}{(5x+7)(2x+1)}$

9. a) $\frac{x-y}{x^2(1+x^2y)}$ b) $\frac{(x-1)(x-5)}{(x+1)(x+2)}$

10. $2x - 1 \leq x^2 \leq (x+1)^2$

11.$x = -\frac{2}{5}$

12.$]-1; -\frac{2}{5}] \cup]\frac{1}{2}; \infty[$

Kapitel 2

1. a) $f : [0; \infty[\to [0; \infty[,\ f(x) = 2,3x$ b) $f : [0; 85,71] \to [0; 30],\ f(x) = 30 - 0,35x$.
c) $f :]0; \infty[\to]0; \infty[,\ f(x) = \frac{2700}{x} + 25$.

2. a),c),d): nein, b), e): ja

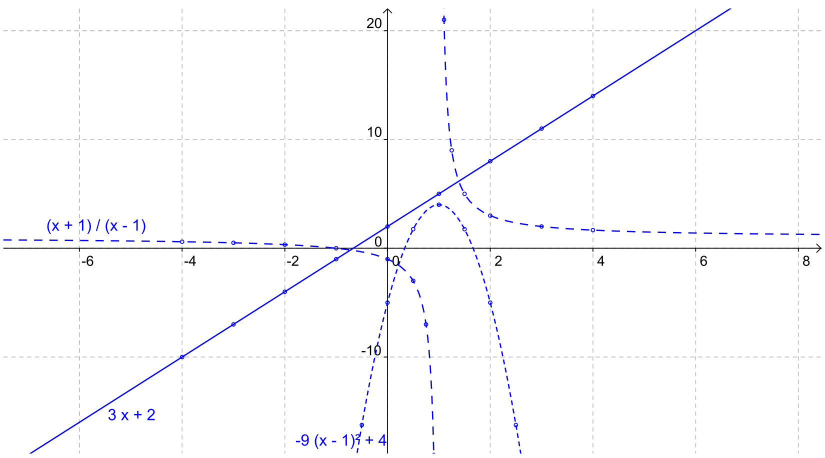
3. a) nein b) $f(x) = -2x + 2,\ \mathbb{D} = \mathbb{R}$ c) $f(x) = x^3 + 1,\ \mathbb{D} = \mathbb{R}$
d) $f(x) = -\frac{1}{x},\ \mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

4.

	$f(\frac{2}{3})$	$f(-5)$	$f(t)$	$f(\frac{t}{3}+1)$	$f(\frac{1}{t})$
a)	4	-13	$3t+2$	$t+5$	$\frac{3}{t}+2$
b)	3	-320	$-9t^2+18t-5$	$4-t^2$	$\frac{-5t^2+18t-9}{t^2}$
c)	-5	$\frac{2}{3}$	$\frac{t+1}{t-1}$	$\frac{t+6}{t}$	$\frac{t+1}{1-t}$

5. a) $\{x \in \mathbb{R} : x \neq 1 \text{ und } x \neq -\frac{2}{3}\} = \mathbb{R} \setminus \{1, -\frac{2}{3}\}$; b) $\mathbb{R} \setminus \{0, \frac{1}{2}\}$

6.



7. c),d), f) und für $\alpha = 0$ auch e) sind Graphen von Funktionen, die übrigen nicht. Dabei c),d): $\mathbb{D} = [1; 9]$, e); für $\beta = 0$ ist $\mathbb{D} = [0; 11,625]$, f): $\mathbb{D} = [1; 5] \cup [6; 9]$

8. $f([0; 5]) = [-1; 9],\ f^{-1}([-2; 0]) = [-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$,
$Bild(g) = [-3; 2],\ g^{-1}([-4; -1]) = [\frac{3}{5}; 1]$ (Definitionsbereich hier beachten!),
$Bild(h) = [0; \frac{1}{5}],\ h^{-1}([0; 1]) = \mathbb{D}_h = [1; 2]$

9. monoton steigend: c),d),e) und – als Grenzfall zwischen monoton steigend und monoton fallend – auch f); **streng monoton steigend:** c), d) und e); **monoton fallend:** a),b) und – als Grenzfall – auch f); **streng monoton fallend:** a) und b); **konvex:** a), c) und f); **streng konvex:** nur a); **konkav:** c), d) und f); **streng konkav:** nur d); **Wendepunkt** in b) und e) in (4|4).

10. Für $f(x) = 2,3x$: f ist streng monoton wachsend und hat in $x = 0$ ein Minimum. f ist sowohl konkav als auch konvex (das ist bei linearen Funktionen stets der Fall). Für $f(x) = 30 - 0,35x$: f ist streng monoton fallend und hat in $x = \frac{3000}{35}$ ein Minimum und in $x = 0$ ein Maximum. f ist sowohl konkav als auch konvex. Für $f(x) = \frac{2700}{x} + 25$. f ist streng monoton fallend, hat kein Extremum und ist streng konvex.

11. Kosten: streng monoton wachsend. **Erlös:** streng monoton wachsend links von $x \approx 581$ und rechts von $x \approx 1418$, ansonsten streng monoton fallend, Nullstelle im Ursprung . Streng konkav für $x \leq 1000$, sonst streng konvex. **Gewinn:** streng monoton wachsend für $x < 500$, sonst streng monoton fallend. streng konkav für $x < 500$, sonst streng konvex. Maximaler Gewinn für $x = 500$. Nullstellen nahe 0 und 1500

12. a) $4x^2$, b) $-125x^3 - 525x^2 - 730x - 336$, c) x

13. Tabelle der Verkettungen:

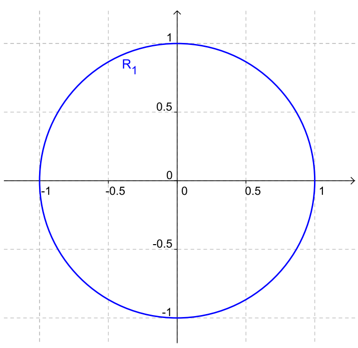
	$g(x) =$	$\frac{x+1}{x}$	$-x$	$\frac{1}{x}$	x	$\frac{1}{x-1}$
$f(x) =$	$\frac{x+1}{x}$	$\frac{2x+1}{x+1}$	$\frac{1-x}{x}$	$x+1$	$\frac{x+1}{x}$	x
	$-x$	$-\frac{x+1}{x}$	x	$-\frac{1}{x}$	$-x$	$-\frac{1}{x-1}$
	$\frac{1}{x}$	$\frac{x}{x+1}$	$-\frac{1}{x}$	$\frac{1}{\frac{1}{x}} = x$	$\frac{1}{x}$	$x-1$
	x	$\frac{x+1}{x}$	$-x$	$\frac{1}{x}$	x	$\frac{1}{x-1}$
	$\frac{1}{x-1}$	x	$-\frac{1}{x+1}$	$-\frac{x}{x-1}$	$\frac{1}{x-1}$	$-\frac{x-1}{x-2}$

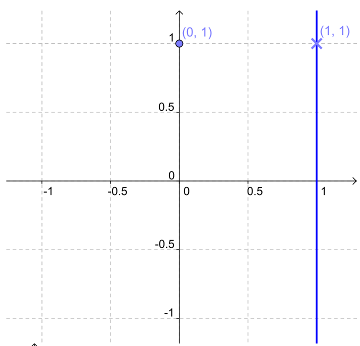
14. a),c) haben Umkehrfunktionen, b) hat keine Umkehrfunktion

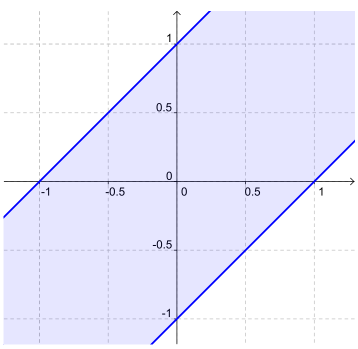
15. Die Funktionsterme für $f^{-1}(x)$ sind a) $\frac{1}{7}x + \frac{20}{7}$, b) $\frac{2}{x}$, c) $\frac{x-1}{x+1}$

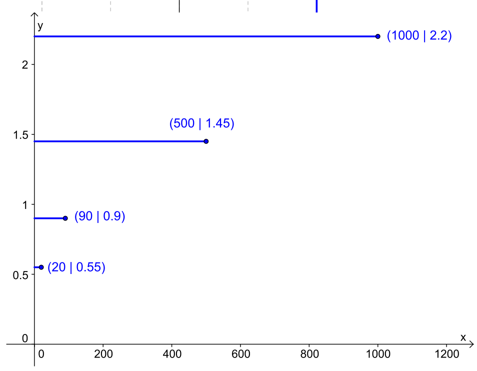
16. a) $h(x) = -5x + 2$, b) $h(x) = (\frac{1}{2}x - \frac{7}{2})^2$

17.

a)


b)


c)


d)


Kapitel 3

1.

	a)	b)	c)	d)	e)	f)
a	-2	$-\frac{25}{3}$	0	$-t$	2	$\frac{t}{5}$
b	7	$\frac{13}{6}$	7	$-t$	$t-2s$	$\frac{3t^2+2t}{5(t-1)}$
Nullstelle?	$\frac{7}{2}$	$\frac{13}{50}$	nein	-1 für $t \neq 0$	$s-\frac{t}{2}$	$-\frac{3t+2}{t-1}$

2. Nullstelle: $x = -\frac{100}{a}$. Mehr als diese Menge wird – unabhängig vom Preis – nicht nachgefragt.

3. $f(x) = 28000 - 5600x$

4. 6 Stunden und 30 Minuten

5. a) $f(x) = 2(x-1) - 1 = 2x - 3$ b) $f(x) = -3(x - (-3)) + 4 = -3x - 5$ c) $f(x) = \frac{4}{5}(x-5) + 6 = \frac{4}{5}x + 2$ d) $f(x) = (-2)(x - (-1)) - 1 = -2x - 3$

6. $f(x) = 3t^2 + 2 + 3(x - t^2)$

7. $K(x) = 0,2029x + 273,575$

8.$a = \frac{2}{7}$, $b = -\frac{5}{7}$

9. $s = 2$, $t = \frac{3}{2}$

10. a) $f^{-1}(x) = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$ b) $f^{-1}(x) = -3x - \frac{3}{4}$ c) $f^{-1}(x) = x$ d) $f^{-1}(x) = tx - t(t-1)$

11. a) $h(x) - \frac{1}{3}x + \frac{26}{3}$ b) $h(x) = 8x + 142$ c) $h(x) = \frac{3}{2}x + \frac{27}{2}$

12. Mit Umkehrfunktion f^{-1} und Normale h: a) $f^{-1}(x) = -\frac{3}{4}x + \frac{41}{4}$, $h(x) = \frac{3}{4}x + \frac{13}{4}$, b) f ist nicht umkehrbar, Koordinatenform der Normale ist $x = 0$, c) Für $b \neq 2$ ist $f^{-1}(x) = \frac{1}{b-2}x + \frac{ab-2a-2}{b-2} =$, $h(x) = -\frac{1}{b-2}x + 2 + \frac{a}{b-2}$. Für $b = 2$ ist f nicht umkehrbar, die Normale in Koordinatenform ist $x = a$.

13. $a = -3$ und $g_t(x) = -3x + t$

14. Nein.

15. a) Die Geraden schneiden sich für $x = \frac{27}{13}$ b) Für $t = 3$ sind die Geraden identisch. Für $t \neq 3$ schneiden sie sich genau in $x = -1$. c) Für $t = 10$ liegen die Geraden parallel und haben keine Schnittpunkte. Für $t \neq 10$ gibt es genau einen Schnittpunkt in $x = \frac{2t}{3t-30}$

16. a) $f_1(x) = \frac{1}{8}x - \frac{13}{8}$, $f_2(x) = -\frac{7}{4}x + \frac{31}{4}$, $f_3(x) = \frac{1}{8}x + \frac{47}{8}$, $f_4(x) = -\frac{7}{4}x - \frac{29}{4}$ b) $h_1(x) = 2x + 4$, $h_2(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$, Schnittpunkt ist $(-1|2)$. c) Es liegt ein Parallelogramm vor. Sein Flächeninhalt beträgt 60 Flächeneinheiten.

17. Die Distanz zwischen Neustadt und Althausen beträgt mindestens 40km.
18. a) $P(-t/(t^2+1)| - 1)$ b) maximaler Flächeninhalt 1 für $t = 0$.

19. $f(x) = \frac{1}{40}x + \frac{1}{2}$

20. Mindestens 9 Lampen müssen verkauft werden.

21. a) $f(x) = -\frac{1}{3}x + \frac{14}{3}$, b) $f(x) = -\frac{1}{3}(x-2) + 4$, c) $\frac{1}{14}x + \frac{3}{14}y = 1$

22. a) $f_t(x) = \frac{t-3}{2+t}x + \frac{2t-1}{t+2}$ für $t \neq -2$.

b) Ordinatenabschnitt $\frac{2t-1}{t+2}$. Abszissenabschnitt für $t \neq 3$ ist $-\frac{2t-1}{t-3}$. $(0|0) \in F_t \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}$

c) Zu $a \neq 1$ gehört $t = \frac{2a+2}{1-a}$.

d) Der gemeinsame Punkt ist $N(-1|1)$.

e) Für $t \neq 3$ ist $g_t(x) = \frac{2+t}{3-t}x + \frac{5}{3-t}$

f) Der Flächeninhalt wird minimal für $t = \frac{1}{2}$. Bei dieser Teilaufgabe ist es von Vorteil, sich schon etwas mit Parabeln bzw. ihren Scheitelpunkten beschäftigt zu haben.

Kapitel 4

1. a) $a = \frac{7}{4}$ und $c = 3$ b) $a = -\frac{1}{3}$ und $c = -48$ c) $a = \frac{t}{4}$ und $c = t - 4$ d) $a = \frac{2}{t^2}$ für $t \neq 0$. Für $t = 0$ gibt es keine derartige Funktion. $c = 2 - t^2$ e) Für $t \neq 0$ ist $a = \frac{2}{t}$, für $t = 0$ kann a beliebig gewählt werden. $c = 2t - t^2$

2. a) $a = 1, c = -1$ b) $a = \frac{1}{2}, c = -\frac{5}{2}$ c) $a = \frac{t-2}{3}, c = \frac{8-t}{3}$ d) Für $s \neq 0$: $a = \frac{t}{3s^2}, c = \frac{2t}{3}$. Für $s = 0, t \neq 0$ unlösbar. Für $s = 0, t = 0$ nicht eindeutig lösbar. e) $a = \frac{y_1-y_0}{x_1^2-x_0^2}, c = -\frac{x_0^2y_1-x_1^2y_0}{x_1^2-x_0^2}$

3. a) $f(x) = x^2 + 1$ b) $f(x) = -x^2 + 4x - 2$ c) $f(x) = -\frac{3t}{2}x^2 + \frac{15t}{2}x - 5t$ d) $f(x) = \frac{t+4}{8}x^2 - 2x + \frac{12-t}{8}$ e) Für $t \notin \{-2, 2\}$ ist $f(x) = -\frac{1}{t^2-4}x^2 - \frac{t^2}{t^2-4}$

4. a) $(-2)(x - \frac{5}{4})^2 + \frac{33}{8}$, b) $6(x - 0)^2 - 12$, c) $(x + \frac{3}{2})^2 - \frac{9}{4}$

5. a) $f(x) = -3(x-\frac{5}{6})^2+\frac{25}{12}$. b) $f(x) = (x-2t)^2-3t^2$ c) $f(x) = t(x+t)^2-2t-t^3$

6.

$-2(x-3)^2+2$	$2(x-3)^2+2$	$-(x-3)^2+2$
$(x-3)^2+2$	$-(x-2)^2+3$	$\frac{1}{2}(x-2)^2+3$

7.Lösungsmengen sind: a) $\{-9, 1\}$, b) $\{1\}$, c) $\{\}$,
d) $\{\}$ für $t \in \,]-1; 5[$, $\{-\frac{t}{2}\}$ für $t \in \{-1, 5\}$, $\{\frac{t}{2} \pm \frac{\sqrt{(t-2)^2-9}}{2}\}$ sonst,
e) $\{\}$ für $t \in]-2; 2[$, $\{\frac{t+2}{2}\}$ für $t = \pm 2$, $\{\frac{t+2}{2} - \frac{\sqrt{t^2-4}}{2}, \frac{t+2}{2} + \frac{\sqrt{t^2-4}}{2}\}$ sonst.

8. a) a1) $\frac{5\pm\sqrt{33}}{4}$ a2) $\pm\sqrt{2}$, a3) $x = 0 \vee x = -3$ b) a1)=a2) $S_1(-1|-6)$ und $S_2(\frac{13}{8}|\frac{123}{32})$, a1)=a3) $S_1(1|4)$ und $S_2(-\frac{1}{3}|-\frac{8}{9})$, a2)=a3) $S_1(\frac{1}{10}\left(3-\sqrt{249}\right)|\frac{3}{25}\left(29-3\sqrt{249}\right))$ und $S_2(\frac{1}{10}\left(3+\sqrt{249}\right)|\frac{3}{25}\left(3\sqrt{249}+29\right))$

9. a) Schnittpunkte sind $(-2|-1)$ und $(4|11)$. g ist Sekante zu f. b) Für $t \neq 0$ zu bearbeiten. Schnittpunkte $(\frac{1}{2}t|0)$ und $(\frac{5}{4}t|\frac{3}{8}t)$. g ist Sekante von f.

10. Berührpunkt ist $(\frac{9}{4}|\frac{23}{32})$ für $t = -\frac{49}{32}$.

11. Die Aufgabe lässt sich recht schnell und einfach mit den später noch behandelten Methoden der Differentialrechnung lösen. Sie sollten aber, um das Rechnen mit quadratischen Termen und parametrischen Gleichungen zu üben, hier noch nicht darauf zurückgreifen.
a) $y = 2x - 1$ b) $y = 4x - 9$ c) $y = 4x + 13$ d) $y = (16 + t)x - 14$ e) $y = (1 - 2t)x + 1 + t^2$ f) $y = -2(t^2 + 1)x - t^3 - 5$

12. $h(x) = -\frac{1}{2}x - \frac{17}{8}$

13. a) $f(x) = (x-2)(x-3)$ b) $g(x) = 2x^2 + 34x + 144 = 2(x+8)(x+9)$ c) $h(x) = x(x+3) - 70 = (x+10)(x-7)$. d) $(x+2)(x-4)$ e) $(x-\sqrt{7})(x+\sqrt{7})$ f) $(x-0)(x+5)$ g) $7(x+15x+56) = 7(x+7)(x+8)$ h) $(x+4)(x+t)$

14. $f(x) = \frac{4}{t}x^2 - 16x + 12t$

15. a) $x_s = 0,\ f^{-1}(x) = \sqrt{x-2}$ b) $x_s = 2,\ f^{-1}(x) = 2 + \sqrt{x+4}$
c) $x_s = -2,\ f^{-1}(x) = -2 - \sqrt{-\frac{x-4}{3}}$ d) $x_s = -\frac{t}{2},\ f^{-1}(x) = \frac{t}{2} \pm \sqrt{x + \frac{t^2}{4} + 2}$

16. a) $p(x) = 126 - \frac{3}{50}x,\ C(750|81)$ b) $p(x) = 64 - \frac{7}{375}x,\ C(375|57)$
c) $p(x) = \mathrm{t} - \frac{t-c_0}{20}x,\ C(10|\frac{t+c_0}{2})$

17. $p(x) = 160 - \frac{130}{4000000}x^2$ und $G(x) = 130x - \frac{130}{4000000}x^3 - 1000$

18. a) $Q(0|7)$ b) $Q(6|3)$ c) $S(2|-\frac{1}{3})$ d) $S(1|-3)$ oder $S(-3|-3)$ e) Für $t = \frac{1}{2}$ gibt es keine solche Funktion, Lösung für alle anderen t ist $S(t|\frac{(1-t)^2}{1-2t})$ f) keine Lösung für $t \neq 4$, während für $t = 4$ der Wert y_s beliebig gesetzt werden kann.

19. Die Scheitelpunktform ist $f(x) = n(x-\bar{x})^2 + x_1^2 + \cdots + x_n^2 - n\bar{x}^2$, wobei $\bar{x} = \frac{x_1+\cdots+x_n}{n}$. Der Scheitelpunkt liefert die Lösung.

Kapitel 5

1. Schreiben Sie $(a+b)^4 = (a+b)^3(a+b)$, wenden Sie die binomische Formel auf den ersten Faktor $(a+b)^3$ an und lösen Sie die Klammer des zweiten Faktors $(a+b)$ mit Distributivgesetz auf. Anschließend nach gleichen Potenzen zusammenfassen.

2. a) $3^{3^3} = 7.625.597.484.987$ und nicht 19683, b) $(2^n)^3 \cdot \sqrt{4} = 2^{3n+1}$, c) $\frac{(ab^2)^{2n}}{(ba^2)^n} = b^{3n}$

3. a) $22a^4b^2$ b) $\frac{(1-u^4)v^2w^4}{u^2}$ c) $\frac{1-25x^{27}}{x^{25}}$ d) $x(1-x)^2$ e) $(a^n-9)^2$
f) $3xy^2(x-2y)^3$ g) $2a^3b^3(-6a^2+b)$

4. a) $6 - 8\sqrt{2}$ b) $266\sqrt{7} - 14$ c) $2x^2\sqrt[5]{3}$ d) $\frac{4a^2-5b^2}{5ab}$ e) $\sqrt{u}(\sqrt{u} - 5\sqrt{v})^3$
f) t

5. a) -2 b) $3\sqrt{\frac{3}{2}} - 3$ c) $3a(a-1)$ d) $\frac{x}{x+1}$ e) $\frac{2t+5s}{\sqrt{s}}$ f) $2 - x^2$

6.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	t	$\frac{1}{\sqrt{t}}$
a)	55	25	11	7	7	5	-5		
b)	221	32	-9	-10	-7	36	227		
c)	$6-26t$	$4-7t$	2	t	$2t-2$	$9t-4$	$28t-6$	t^4-t	$t-\frac{1}{\sqrt{t}}$

7. $h(x) = x^3 - 3x^2$. Der Graph von h entspricht dem Graph von f, der um drei Einheiten nach links verschoben wurde. Nullstellen von f sind 3 und 6.

8. a) ja, b) nein, c) ja, d) ja, für $t = -2$, e) ja, f) ja, für $a = 2, b = 19$

9. a) $f(x) + g(x) = 5x^2 - 6x + 2,\ f(x)g(x) = 4x^4 - 9x^3 + 7x^2 - 2x$

b) $f(x) + g(x) = x^4 + 3x^3 - 5,\ f(x)g(x) = 3x^7 - 7x^4 + 6x^3 - 14$

c) $f(x)+g(x)=x^3-6x^2+18x-15$, $f(x)g(x)=x^5-5x^4-x^3+41x^2-72x+36$

d) $f(x)+g(x)=tx^3+x^2-tx-2t+7$
$f(x)g(x)=tx^5+\left(2t-t^2\right)x^4-\left(2t^2+2\right)x^3+(2t+3)\,x^2-(3t-14)\,x-14t$

10. a) $f_1(x)/g_1(x)=x+2+\frac{12}{x-5}$. g_1 ist kein Teiler von f_1. $f_1(x)/g_2(x)=x-2$. g_2 ist Teiler von f_1.

b) $f_2(x)/g_1(x)=x^2-3x+2$. g_1 ist Teiler von f_2. $f_2(x)/g_2(x)=x^2-7x+10$. g_2 ist Teiler von f_2. $f_2(x)/g_4(x)=x-2$. g_4 ist Teiler von f_2.

c) $f_3(x)/g_2(x)=x^4+4x^3-9x^2-48x-12+\frac{96}{x-1}$. g_2 ist kein Teiler von f_3. $f_3(x)/g_4(x)=x^3+9x^2+36x+132+\frac{648x-552}{x^2-6x+5}$. g_4 ist kein Teiler von f_3.

d) $f_1(x)/g_3(x)=x+t-3+\frac{t^2-3t+2}{x-t}$. g_3 ist Teiler von f_1 genau dann, wenn t Nullstelle von $f_1$ist.
$f_2(x)/g_3(x)=x^2+17+(t-8)\,x+t\,(t-8)+\frac{t^3-8t^2+17t-10}{x-t}$. g_3 ist Teiler von f_1 genau dann, wenn t Nullstelle von $f_1$ist. $f_2(x)/g_5(x)=x-8+\frac{(t+17)x-8t-10}{x^2-t}$. g_5 ist kein Teiler von f_2

e) $f_4(x)/g_2(x)=x^3+6x^2-(t-10)\,x-6t+10-\frac{10t-10}{x-1}$. g_2 ist genau dann Teiler von f_4, wenn $t=1$. $f_4(x)/g_5(x)=x^2+5x+4$. g_5 ist Teiler von f_4

11. a) 2 und -4 sind Nullstellen von p und von f. p ist Teiler von f.
b) 3 ist (einzige) Nullstelle von p, und auch Nullstelle von f. p ist aber kein Teiler von f.
c) t und 0 sind Nullstellen von p und von f. p ist Teiler von f.
d) -1 ist einzige Nullstelle von p und von f. p ist kein Teiler von f.

12. a) $p(x)=(x+1)(x-4)^2(x^2+1)$, b) $p(x)=(x-1)^3(x^2+14x+49)=(x-1)^3(x+7)^2$

13. a) $p(x)=(2x-5)(2x-1)(2x+1)$ b) $p(x)=(x-3)(x-1)(x+1)(x+8)$ c) $p(x)=\frac{1}{4}(x-3)(x-1)^3(x+5)$ d) $p(x)=2(x-4)(x-2)(x+\frac{7}{2})$
e) $p(x)=5x^3(x-1)(x+8)$ f) $p(x)=(x+7)\left(x^2+1\right)\left(x^2+5\right)$
g) $p(x)=4(x-3)(x+1)\left(x^2-x+1\right)$ $\left(x^2+3x+9\right)$
h) Die Gleichung hat für $t\le-\frac{\sqrt5}{2}$ und $-\frac{\sqrt5}{2}<t<\frac{\sqrt5}{2}$ keine Lösung, für $t=\frac{\sqrt5}{2}$ zwei Lösungen $\pm\sqrt[4]{5}$, für $t>\frac{\sqrt5}{2}$ vier Lösungen, nämlich $\pm\sqrt{2t\pm\sqrt{4t^2-5}}$

14.

	P,Q	P,Q,R	P,Q,R,S
a)	$5-3x$	$5-4x+x^2$	$5-13x+13x^2-3x^3$
b)	$\frac{19}{4}-\frac{x}{4}$	$\frac{23}{10}+\frac{11x}{12}-\frac{7x^2}{60}$	$\frac{23}{10}+\frac{11x}{12}-\frac{7x^2}{60}$
c)	$t-x$	$t-(1+t)x+x^2$	$t-x-tx^2+x^3$
d)	$\frac{3t-1}{2}-\frac{x}{2}$	$\frac{3t-1}{2}-\frac{x}{2}$	
e)	$\frac{7t-2}{3}+\frac{1-2t}{3}x$	$\frac{4+t}{9}+\frac{8t-4}{9}x+\frac{1-2t}{9}x^2$	

15. a) $\frac{x+1}{x^2}$ für $x\ne1, x\ne0$ b) $\frac{5x^2+18x+28}{2x^2-3x-14}$ für $x\ne-2$, $x\ne\frac{7}{2}$ c) $\frac{2x-4}{x-5}$ für $x\ne2$, $x\ne5$.

16. a) $\frac{3x+7}{(x-2)(x-1)}=\frac{-10}{x-1}+\frac{13}{x-2}$, b) $\frac{3x+7}{(x-1)^2}=\frac{3}{x-1}+\frac{10}{(x-1)^2}$, c) $\frac{2x^2-4x+1}{(x-1)^3}=\frac{2}{x-1}-\frac{1}{(x-1)^3}$

17. a) $\frac{2}{x-6}-\frac{1}{x+1}$ b) $\frac{2}{x-4}+\frac{6}{x+4}$ c) $-\frac{1}{x-t}+\frac{3}{x+3}$ d) $\frac{2}{x-3}-\frac{5}{(x-3)^2}$
e) $-\frac{2}{3x-1}+\frac{1}{x-1}-\frac{6}{(x-1)^2}$ f) $2x+7+\frac{2}{x}-\frac{4}{x-1}$

18.	Ordinatenschnittpunkt	Abszissenschnittpunkte
a)	$(0\|0)$	$(0\|0), (4\|0), (-4\|0)$
b)	$(0\|0)$	$(0\|0), (\frac{1}{2}\|0), (\frac{5}{2}\|0)$
c)	$(0\|-4)$	$(-1\|0), (-1 \pm \sqrt{3}\|0)$
d)	$(0\|0)$	$(0\|0), (\pm\sqrt{3}\|0)$
e)	$(0\|0)$	$(0\|0), (-1\|0), (2\|0)$
f)	$(0\|15)$	$(5\|0), (\pm\frac{1}{2}\|0), (-\frac{3}{2}\|0)$

19. a) $f(x) = \frac{2}{3}x - \frac{8}{3}x^3$ und $g(x) = -2 - \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{6}x^4$
b) $f(x) = \frac{4}{3}tx - \frac{1}{3}tx^3$ und $g(x) = \frac{8}{6}t - \frac{2}{3}tx^2 + \frac{1}{15}tx^4$

20. a) Schnittpunkt mit Ordinate: $(0|0)$. Schnittpunkte mit Abszisse: für $t > -\frac{1}{8}$: $(0|0)$ und $(-\frac{1}{2} \pm \sqrt{2t + \frac{1}{4}}|0)$, für $t = -\frac{1}{8}$: $(0|0)$ und $(-\frac{1}{2}|0)$, für $t < -\frac{1}{8}$: $(0|0)$

b) Schnittpunkte $(-1|2t)$ und für $t = 0$ noch zusätzlich $(0|0)$ bzw. für $t > 0$ noch zusätzlich $(\pm\sqrt{t}|1 \mp \sqrt{t})$

21. kleinster Wert ist $\frac{x}{y+1}$, größter Wert ist $\frac{x}{y-1}$

Kapitel 6

1. Die Exponentialfunktion zur Basis e ist streng monoton wachsend. Im Gegensatz hierzu ist f_1 eine streng monoton fallende Funktion. Die anderen beiden Funktionen sind ebenfalls streng monoton steigend, wobei f_1 weniger stark und f_2 stärker ansteigt als die Exponentialfunktion.

2. Achsensymmetrisch zueinander bzgl. Abszisse sind f_1 und f_3 sowie f_2 und f_4, bzgl. Ordinate f_1 und f_2 sowie f_3 und f_4. Punktsymmetrisch zueinander sind f_1 und f_4 sowie f_2 und f_3.

3. a) Verwenden Sie $f(1) = 2$ b) $g(x+1) = 5g(x)$ und $h(x+1) = 0,3h(x)$ c) $f_a(x+1) = af_a(x)$

4. a) $c = 2$, $a = 3$ b) $c = \frac{1}{3}$, $a = 9$ c) $c = \frac{4}{t}$, $a = \frac{t}{2}$ d) $c = 2$, $a = \left(\frac{t}{2}\right)^{\frac{1}{s}}$

5. $p \approx 8,45\%$

6. a) $a = e^2$ b) $a = e^{-2}$

7. a) -4 b) 6 c) -1 d) 0 e) $\frac{5}{2}$ f) $\frac{a}{3}$

8. Angegeben sind Näherungen bei Verwendung der Tabellenwerte, in Klammern gerundete Taschenrechnerwerte: a) $3,5563$ (3,5553) b) $5,1929$ $(5,1926)$ c) $1,7048$ $(1,70474)$ d) $-3,5064$ $(-3,5066)$
e) $2,326$ $(2,3263)$ f) $-0,7939$ $(0,7937)$

9. $\log_a(y)r = \log_a(y^r) = \log_{a^{1/r}}(y)$ und $\log_a(y)/r = \log_a(y^{1/r}) = \log_{a^r}(y)$

10. a) $x = 3 = \log_3(27)$ b) $x = 4 = \log_{0,1}(0,0001)$ c) $x = \frac{1}{2} = \log_{196}(14)$ d) $x = -3 = \log_4 1/64$ e) $x = 3 = \log_{1,8}(5,832)$

11. a) $x = 5$, b) $x \geq 2$

12. Tipp: $z = \sqrt{5}^x$ substituieren. Die Lösungen sind $2\log_5(2)$ und $2\log_5(3)$.

13. a) $a = 10$ b) $a = 0,5$ c) $a = t^{1/t^2}$

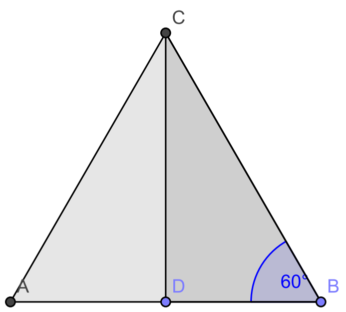
14. a) $c = \ln(2)$ b) $c = -\ln(2)$ c) $c = \ln(a)$

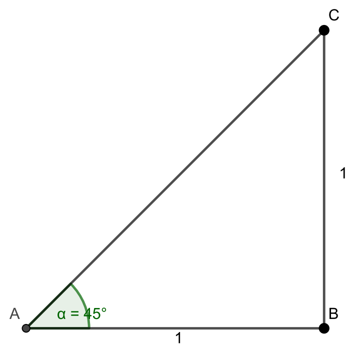
15. Nach 29 Jahren ist das Kapital erstmals auf mindestens seinen doppelten Wert angewachsen.

16. a) $\sqrt{x}$, b) $\sqrt[7]{x^5y^2z}$, c) $x - x^3$

17. a) es ist näherungsweise $f(x) = 2,0391 \cdot x^{0,7691}$ b) um 200 Einheiten.

18. a) Planskizze b) Planskizze





$\tan(\frac{\pi}{3}) = \frac{\overline{CD}}{\overline{BD}} = \sqrt{3}$ $\cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

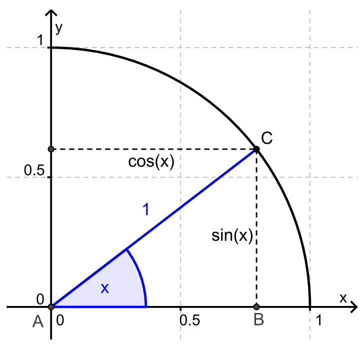
19. a) $\frac{1}{2}$ b) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

20.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

21. Setzen Sie mit $\sin(x + y) = \cos(x + (y - \frac{\pi}{2}))$ an und verwenden Sie dann das Additionstheorem des Cosinus.

22. Für den ersten Quadranten mit folgender Planskizze



gilt: Im rechtwinkligen Dreieck zum Winkel $x \in [0; \frac{\pi}{2}[$ gilt der Satz des Pythagoras, hieraus folgt das Additionstheorem.

23. Hinweis: Leiten Sie $\sin^2(\pi - \gamma)a^2 = h^2$ her und stellen Sie h^2 mit Hilfe des Satzes von Pythagoras im Dreieck ABD dar.

24. $h \approx 69,61$

25. a) $x = \frac{\pi}{6}$, $x = \frac{5\pi}{6}$ b) $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \frac{7\pi}{6}$, $x = \frac{11\pi}{6}$ c) $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$

26. $f(x) = \frac{1}{2}\sin(2x - \frac{\pi}{4}) + \frac{1}{4}$ $g(x) = \frac{1}{4}\cos(x + \frac{\pi}{2}) + 1$

27. $f(x) = -2\pi + 6x + \sin(2x)$

28. $f(x) = \begin{cases} x+2 & x \leq 6 \\ -\frac{1}{2}x + 11 & x > 6 \end{cases}$, mit drei Abschnitten: $f(x) = \begin{cases} x+2 & x \leq 5 \\ 7 & 5 < c \leq 8 \\ -\frac{1}{2}x + 11 & x > 8 \end{cases}$

29. a) Für Münster $f(x) = 1,6\lceil x \rceil + 2,5$, für Dortmund $g(x) = 1,45\lceil x \rceil + 3,3$ b) Bis 5 Kilometer ist Münster günstiger, ab 6 Kilometer dann Dortmund.

30. a) Verwenden Sie die Ungleichungen zur Fallunterscheidung, also z.B. $\sqrt{x} \lesseqgtr t$. b) Die Punkte sind $(0|0)$, $(t^2|t)$. c) Für $t = 1$ liegt der Winkel vor.

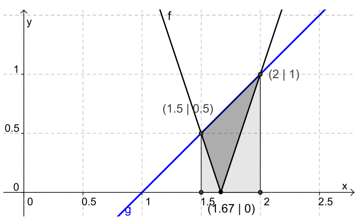
31. a) $f(x) = \begin{cases} x+3 & \text{für } x \geq -3 \\ -x-3 & \text{für } x < -3 \end{cases}$ b) $g(x) = \begin{cases} x+3 & \text{für } x \geq 0 \\ -x+3 & \text{für } x < 0 \end{cases}$

c) $h(x) = \begin{cases} 2x & \text{für } x \geq 0 \\ 0 & \text{für } x < 0 \end{cases}$

32. a) Für $x > 0$ gilt $x^+ - x^- = x - 0 = x$, für $x \leq 0$ gilt $x^+ - x^- = 0 - (-x) = x$, b) Für $x > 0$ gilt $x^+ + x^- = x = |x|$, für $x \leq 0$ gilt $x^+ + x^- = 0 + (-x) = -x = |x|$

33. Lösung ist a) $x > 3$, b) $x \in \mathbb{R} \setminus [-1;3]$, c) $x \in \mathbb{R} \setminus [-1;3]$, d) $x \in \mathbb{R} \setminus [-4;1]$

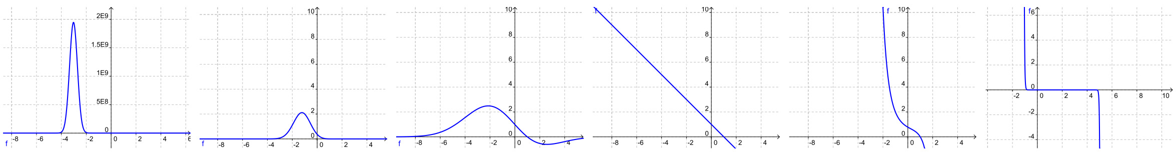
34. Planskizze:



Der Flächeninhalt ist $\frac{1}{6}$.

35. Vergleichen Sie die Werte der beiden Ausdrücke $\mathbb{1}_{A\cap B}(x)$ und $\mathbb{1}_A(x)\mathbb{1}_B(x)$ für jeden der vier Fälle $x \in A, y \in B$ bzw. $x \in A, y \notin B$ bzw. $x \notin A, x \in B$ bzw. $x \notin A, y \notin B$.

36. a) Abszissenschnittpunkt $(1|0)$, Ordinatenschnittpunkt $(0|e^{-t^2})$. b) :



c) Die allen G_t gemeinsamen Punkte sind $(1|0)$ und $(-1|-2)$.

37. a) Die Graphen schneiden sich für $x = k\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$. b) Es ist $s + t = y$.

38. a) $\mathbb{1}_{A^c}(x) = 1 - \mathbb{1}_A(x)$, b) $\mathbb{1}_{A\cup B}(x) = \max(\mathbb{1}_A(x), \mathbb{1}_B(x)) = \mathbb{1}_A(x) + \mathbb{1}_B(x) - \mathbb{1}_A(x)\mathbb{1}_B(x)$, c) $\mathbb{1}_{A\setminus B}(x) = \mathbb{1}_A(x) - \mathbb{1}_A(x)\mathbb{1}_B(x)$, d) $\mathbb{1}_{A\Delta B}(x) = \mathbb{1}_A(x) + \mathbb{1}_B(x) - 2 \cdot \mathbb{1}_A(x)\mathbb{1}_B(x)$

Kapitel 7

1. a) arithmetrische Folge, $a_n = \frac{5}{4}n$, monoton wachsend; nach unten beschränkt. b) geometrische Folge, $b_n = \frac{27}{8} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n$, monoton fallend; nach oben beschränkt. c) geometrische Folge, $c_n = (-1)^{n-1} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^n$, nicht monoton; nach oben und nach unten beschränkt.

2. $a_1 = 200$, $q = 0,8$, $a_5 = 81,92$ oder $a_1 = -200$, $q = -0,8$, $a_5 = -81,92$

3. $a_n = 8n + 1$, $a_5 = 41$, $s_4 = 84$ (bei Start mit a_1) bzw. $s_4 = 85$ (bei Start mit $a_0 = 1$).

4. Der Anfangswert betrug 62500€. Jährlich wurden 12300€ linear abgeschrieben.

5.$b_n = \ln(3) + n \cdot \ln(2)$, arithmetische Folge.

6. $y_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n$

7. a) $a_n = a_{n-1} + p^n = a_n = p + p \cdot a_{n-1}$, jeweils nach a_{n-1} auflösen und gleichsetzen, b) $a_n = p(1+p+\cdots+p^{n-1})$ und die Aussage des Satzes nutzen, c) Induktionsanfang mit $n = 1$. Im Induktionsschritt wird die Gleichung $p + p^2 + \cdots + p^n = \frac{p^{n+1}-p}{p-1}$ als Induktionsvoraussetzung genutzt, um $p + p^2 + \cdots + p^{n+1} = \frac{p^{n+2}-p}{p-1}$ zu zeigen.

8. $p_n = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$

9.$a_n = \frac{n}{n+1}$

10. Zum Induktionsschritt: Für $n + 1$ ist zu zeigen dass $p_{n+1} = \frac{a}{1-b} + b^{n+1}(p_0 - \frac{a}{1-b})$ richtig ist, wenn $p_n = \frac{a}{1-b} + b^n(p_0 - \frac{a}{1-b})$ richtig ist.

11. Forme $|\frac{n^2}{n^2+1} - 1| < \epsilon$ um zu $n > \sqrt{\frac{1}{\epsilon} - 1}$

12. Wesentlicher Teil der Rechnung ist (für $\epsilon > 0$) $|p^n| < \epsilon \Leftrightarrow n > \log_{|p|}(\epsilon)$

13. Nullfolge für $a = 0$, divergent für $a \neq 0, b = 0$, konvergent mit Grenzwert $\frac{a}{b}$ für $a \neq 0, b \neq 0$.

14. a) konvergent mit Grenzwert $t/(t-1)$ für $t \neq 1$, divergent für $t = 1$. b) Nullfolge für $0 < t < 2$, konvergent mit Grenzwert $\frac{1}{5}$ für $t = 2$, divergent für $t > 2$ c) divergent für $t \geq 1$, Nullfolge für $0 < t < 1$. Für letzteres imitiere man die Rechnung aus Beispiel 7.14 ⇨ vgl. S. 136 und behalte bei der Abschätzung von der binomischen Summe einen Summanden mehr.

15. Wesentlicher Schritt ist die Ungleichung $|a_n + b_n - (a + b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b|$.

16. a) Hinweis: addieren Sie jeweils auf beiden Seiten der Ungleichung $\sqrt{n}$ und quadrieren Sie die Ungleichung danach. b) Erweitern Sie den Ausdruck ähnlich wie in Beispiel 7.19 ⇨ vgl. S. 138. c) Klammern Sie $\sqrt{n}$ aus.

17. $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$

18. a) im Jahr 2036 b) bis zum Jahr 2050.

19. Speziell: $a_n = \frac{2}{3}(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n) \to \frac{2}{3}$. Allgemein: $a_n = a + \frac{2}{3}(b-a)(1 - (-\frac{1}{2})^n) \to a + \frac{2}{3}(b-a)$

20. a) 5 (konstant), b) $6n + 7$ (linear)

21. a) 1785, b) 545

22. a) $1/(x-1)$ für $|x| > 1$ b) $x\sqrt{x}/(\sqrt{x} - 1)$ für $x > 1$ c) $x^2/(1 - x^2)$ für $|x| < 1$ d) $1 + 1/x$ für $x > 0$ oder $x < -2$

23. $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq \frac{8}{9}$ für $n \geq 3$

24. $\frac{4}{5}$

25. a) Etwa $149,16\,\mathrm{cm}$ b) $200\,\mathrm{cm}$

26. Implizite Funktionsgleichung $f(x) = x + \frac{1}{2}x^2 f(x) + \frac{1}{2}xf(x)$. Explizite Funktionsgleichung $f(x) = \frac{x}{(1-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x)} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3} - \frac{2}{3}(-\frac{1}{2})^n\right)x^n$

27. a) $p_1 = 0$, $p_2 = 4$, $p_3 = 4/5$, $p_4 = 84/25$ b) $p_n = \frac{20}{9} + \frac{25}{9}\cdot(-\frac{4}{5})^n$ c) Grenzwert $\frac{20}{9}$

28. $K_n = K_0 q^n + qr\frac{q^n-1}{q-1}$

29. a) $r \approx 2915,91$ b) $r \approx 721,57$ c) $r \approx 239,97$

30. a) $p \approx 3,54$ b) $K_0 \approx 10001,55$

31. a) $K_0 \approx 215532,21$ b) $K_0 \approx 428571,42$

32. Kapitalwerte 128946 und $95795,86$, d.h. die erste Investion ist besser. Interne Zinsfüße $20,05$ und $27,34$, d.h. die zweite Investition ist besser.

33. $I = 250643,14$

Kapitel 8

Hinweis: Die Nummerierung der Aufgaben und Aufgabenabschnitte in der Printversion des Lehrbuches ist in Kapitel 8 leider nicht fortlaufend. Verwenden Sie die folgende Tabelle, um zu den Aufgabennummern im Buch die Nummer hier in der Lösungsdatei zu finden.

Buchseite	Nummer	Nummer hier	Buchseite	Nummer	Nummer hier	Buchseite	Nummer	Nummer hier
172	3	1	185	6	17	207	22	33
172	4	2	185	7	18	207	23	34
172	5	3	185	8	19	207	24	35
172	6	4	190	9	20	207	25	36
172	7	5	191	10	21	207	26	37
172	8	6	191	11	22	207	27	38
177	9	7	191	12	23	207	28	39
177	10	8	191	13	24	217	29	40
177	11	9	191	14	25	217	30	41
177	12	10	207	15	26	217	31	42
177	13	11	207	16	27	217	32	43
185	1	12	207	17	28	217	33	44
185	2	13	207	18	29	217	34	45
185	3	14	207	19	30	217	35	46
185	4	15	207	20	31	218	36	47
185	5	16	207	21	32			

1. a) -4 b) 12 c) Für $t = -3$ Grenzwert $\frac{1}{7}$, für $t \neq -3$ kein Grenzwert d) Für $s \neq 0$ Grenzwert 0, für $s = r = 0$ kein Grenzwert, für $s = 0$, $r \neq 0$ Grenzwert $\frac{1}{r}$ e) -1

2. Hinweis: Folgern Sie aus der Exponentialungleichung $1 + x \leq e^x$ die Ungleichung $x \leq e^{x-1}$ und logarithmieren Sie diese.

3. a) Der Grenzwert ist e. Benötigt wird die Abschätzung $\frac{e}{1+x} \leq (1+x)^{\frac{1}{x}} \leq e$. Schauen Sie sich dazu noch einmal die Herleitung zu Satz **??** ⇨ vgl. S. ?? an und beginnen Sie mit der Abschätzung $e^x \geq 1 + x$. b) Der Grenzwert ist 1. Logarithmieren Sie die Grenzwertaussage der ersten Teilaufgabe.

4. a) $-\infty$ b) $\frac{1}{2}$ c) 0 d) Fall $r \neq 0, rt \geq 0$: ∞; Fall $r \neq 0, rt < 0$: $-\infty$; Fall $r = 0, st \neq 0$: $\frac{s}{t}$; Fall $r = 0, s = 0, t = 0$: ∞; Fall $r = 0, s = 0, t \neq 0$: 0; Fall $r = 0, s > 0, t = 0$: ∞; Fall $r = 0, s < 0, t = 0$: $-\infty$
e) Fall $n > 2$: ∞; Fall $n = 2$: 4; Fall $n = 1$: 0.

5.$g(x) = x - 5$

6. Aufgabe 8.1: a) 1 b) x^2+2x+4 c) 1 d) 1 e) keine gebrochen-rationale Funktion. f) keine gebrochen-rationale Funktion.

Aufgabe 8.4: a) $-3x - 6$ b) $\frac{1}{2}$
c) 0 d) Für $t = 0$ ist der Ausdruck bereits Asymptote. Für $t \neq 0, r \neq 0$ ist $\frac{r}{t}x + \frac{s}{t}$ Asymptote. Für $t \neq 0, r = 0, s \neq 0$ ist $\frac{s}{t}$ Asymptote. Für $t \neq 0, r = 0, s = 0$ ist 0 Asymptote. e) keine gebrochen-rationale Funktion.

7. a) 10 in $x = 5$ b) -2 in $x = 1$ c) in $x = -1$ keine stetige Ergänzung möglich
d) in $x = 0$ Ergänzung $\frac{x}{t}$, falls $t \neq 0$, für $t = 0$ nicht stetig ergänzbar; in $x = 2$ nicht stetig ergänzbar; in $x = 2t$ stetig ergänzbar mit 4, falls $t = -4$, für $t \neq -4$ nicht stetig ergänzbar

8.Stellen Sie hierzu das Schaubild auf, betrachten Sie eine monoton fallende Funktion.

9.Stellen Sie die Punkt-Steigungsform der Sekante durch die Punkte $(a|f(a))$ und $(b|f(b))$ auf und berechnen Sie eine Nullstelle dieser Funktion.

10.$x_0 = \frac{ab^2+a^2b+1}{a^2+ab+b^2-2}$

11. Für $n = 8$ ergibt sich $x_8 \approx 1,2596659$ mit $f(x_8) \approx -0,0012148235$

12. $g(x) = -\frac{1}{4}x + 1$

13. $f'(x_0) = a$

14. für $t = 2$

15. a) 1 b) $-\frac{3}{16}$ c) $\frac{1}{(x+1)^2}$

16. Setzen Sie an mit $g'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{\cos(x+h)-\cos(x)}{h}$ und formen Sie $\cos(x + h)$ mit dem Additionstheorem des Cosinus um. Führen Sie dann wieder auf die Grenzwerte von Sinus und Cosinus zurück, d.h. auf $\lim\limits_{h \to 0} \frac{\cos(h)-1}{h}$ und $\lim\limits_{h \to 0} \frac{\sin(h)}{h}$

17. a) $g(x) = 44x - 60$ b) $g(x) = \frac{1}{2}$ c) $g(x) = 2x + 2 - \ln 4$

18. a) $x = \sqrt{6} - 1$ b) $x = \sqrt{2t + 4} - 1$

19. $f''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}$

20.

	$f'(x)$	$f''(x)$
a) $-21x^2+4x-5$	$-42x+4$	
b)	$4x^2-3$	$8x$
c)	$8(2x^3+6x^2+x-3)$	$8(6x^2+12x+1)$
d)	$x^{n-2}(anx-(a-1)(n-1))$	$(n-1)x^{n-3}(anx-(a-1)(n-2))$
e)	$2x+1$	2
f)	$x^{n-1}e^x(x+n)$	$x^{n-2}e^x(x^2+2nx+n(n-1))$
g)	$\frac{9x+1}{\sqrt{x}}$	$\frac{9x-1}{4x^{3/2}}$
h)	ax^{a-1}	$a(a-1)x^{a-2}$
i)	$x^x(\ln(x)+1)$	$x^x(\frac{1}{x}+(\ln(x)+1)^2)$
j)	$3\cos(x)^3-2\cos(x)$	$9\sin(x)^3-7\sin(x)$
k)	$x^{a-2}e^{-x}(a-1-x)$	$x^{a-3}e^{-x}((a-1)(a-2)-2(a-1)x+x^2)$
l)	$-\frac{1}{2}(x+3)^{\frac{1}{2}}\frac{x+6}{x^2}$	$\frac{3}{4}(x+3)^{-\frac{3}{2}}\frac{x^2+12x+24}{x^3}$
m)	$\frac{1-3x}{2\sqrt{x}(3x+1)^2}$	$\frac{27x^2-18x-1}{4x^{3/2}(3x+1)^3}$
n)	$e^{-x^3}(-3x^2)$	$e^{-x^3}(9x^4-6x)$
o)	$e^{1-x-e^{-x}}$	$e^{1-x-e^{-x}}(e^{-x}-1)$
p)	$e^x\frac{x-1}{x^2}$	$e^x\frac{x^2-3x+2}{x}$
q)	$\frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}$	$\frac{e^{-x}(e^{-x}-1)}{(1+e^{-x})^3}$
r)	$\frac{2x}{x^2+1}$	$\frac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$
s)	$\frac{2}{x}$	$-\frac{2}{x^2}$

21. a) $f(x)=g(x)=x$ b) $f(x)=x,\ g(x)=x^2$

22. Mit der Produktregel gilt $(f(x)\cdot\frac{1}{g(x)})'=f'(x)\cdot\frac{1}{g(x)}+f(x)\cdot(\frac{1}{g(x)})'$. Leiten Sie die Kehrfunktion ab und fassen Sie alles zu einem Bruch zusammen.

23. a) falsch b) richtig c) falsch d) richtig

24. $(f^{-1})'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

25. a) $f'(x)=-\sin(x)$, b) $f'(x)=1/(1+x)$, c) $f'(x)=1/(1+x^2)$

26. Suchen Sie eine Nullstelle von $f(x)=x^3-2$.

27. a) 1 b) 0 c) $\frac{1}{2}$ d) 0

28. a) $t_a=\frac{3}{2}-a$, b) Für $a<\frac{3}{2}$ lokales (nicht globales) Maximum in 0, lokales (auch globales) Minimum in $\frac{2}{3}a$. Für $a=\frac{3}{2}$ globales Maximum in $x=0$, globales Minimum in jedem $x\geq 1$. für $a>\frac{3}{2}$ globales Maximum in $x=0$, kein globales/lokales Minimum.

29. Ist die Funktion konstant, so sind ihre erste und zweite Ableitung Null. Setzen Sie in diese Ableitungen speziell $x=1$ ein und lösen Sie das entstehende Gleichungssystem, dies ergibt $u=v=0$.

30. Nullstellen in $0,\frac{1}{2},1$, lokale Extrema in $\frac{-1\pm\sqrt{1/3}}{2}$, Monotonieverhalten um Extrema: fallend/wachsend/fallend. Wendestelle in $\frac{1}{2}$, Krümmungsverhalten um Wendestellen: konvex/konkav.

31. keine Nullstellen, globales Maximum in $x=0$, Monotonieverhalten um Extremum: wachsend/fallend. Wendestellen in $\pm\sqrt{\frac{1}{2}}$, Krümmungsverhalten um Wendestellen: konvex/konkav/konvex.

32. Nullstelle in 1, globales Maximum in e, Monotonieverhalten um Extremum: wachsend/fallend. Wendestelle in $e^{\frac{3}{2}}$, Krümmungsverhalten um Wendestelle: konkav/konvex.

33. Funktionsgrenzwerte: 0 für $x \to -\infty$ und 1 für $x \to \infty$; keine Nullstelle; streng monoton wachsend; Wendestelle in $-\ln(a)$, Krümmungsverhalten um Wendestelle: konvex/konkav.

34. Mit $x_1 = \frac{3a-\sqrt{9a^2+8a}}{2}$, $x_2 = \frac{3a+\sqrt{9a^2+8a}}{2}$, $x_3 = -\frac{a}{3a+2}$ liegen folgende Nullstellen, Extrema und Wendestellen in Abhängigkeit von a vor:

	$f(x)=0$	$f'(x)=0$		$f''(x)=0$	
$a \in$		max	min	$f'''(x)<0$	$f'''(x)>0$
$]-\infty;-1[$	$0,-1$	x_1,x_2	0		x_3
$\{-1\}$	0	-2	0		
$]-1;-\frac{8}{9}[$	$0,-1$	x_1	$x_2,0$		x_3
$\{-\frac{8}{9}\}$	$0,-1$		0		$-\frac{4}{3}$
$]-\frac{8}{9};-\frac{2}{3}[$	$0,-1$		0		x_3
$\{-\frac{2}{3}\}$	$0,-1$		0		
$]-\frac{2}{3};0[$	$0,-1$		0	x_3	
$\{0\}$	-1	f stetig ergänzbar zu $g(x)=x+1$			
$]0;\infty[$	$0,-1$	x_1	$0,x_2$		x_3

35. a) f ist streng monoton wachsend für $x \leq \frac{1}{a}$ und streng monoton fallend für $x \geq \frac{1}{a}$, b) f ist streng konvex für $x \geq \frac{2}{a}$ und streng konkav für $x \leq \frac{2}{a}$, c) in $x=0$ liegt ein globales Minimum vor, d) eEs liegt eine Wendestelle in $x = \frac{2}{a}$ vor

36. $f(x) = \frac{1}{11}x^3 - \frac{12}{11}x$

37. $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{4}x^3 + x$

38. a) richtig (falsch) b) richtig c) falsch

39. a) $h'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$ b) folgt aus der Multiplikationsregel des Logarithmus, $\ln(f(x)g(x)) = \ln(f(x)) + \ln(g(x))$ c) Leiten Sie $h'(x)$ nochmals ab und setzen Sie den Nenner gleich Null.

40. a) $f(p) = 3200(p-1)^2$ b) $E(p) = 3200p^3 - 6400p^2 + 3200p$, $K(p) = 800p^2 - 1600p + 900$, $G(p) = 3200p^3 - 7200p^2 + 4800p - 900$
c) $[\frac{1}{4}\left(3-\sqrt{3}\right), \frac{3}{4}]$, d) max. Gewinn 100 bei $p = \frac{1}{2}$. Absatz 800 Flaschen.

41. Brötchenbeispiel: In Abhängigkeit von der Brötchenzahl x Nachfragefunktion $f(x) = \frac{8}{5} - \frac{1}{200}x$, Gewinnfunktion $G(x) = -\frac{1}{200}x^2 + x - 15$. Gewinnmaximum für $x = 100$ und $f(100) = \frac{11}{10}$. Der maximale Gewinn ist $G(100) = 35$. Es ergibt sich dasselbe Ergebnis. Das war zu erwarten, weil die beiden Zuordnungen $x \mapsto = \frac{8}{5} - \frac{1}{200}x$ und $p \mapsto 320 - 200p$ Umkehrfunktionen zueinander sind und denselben Absatz-Preis-Zusammenhang beschreiben.

Mineralwasserbeispiel: $f(x) = 1 - \frac{x^2}{4320000}$, $G(x) = -\frac{1}{4320000}x^3 + \frac{3}{4}x - 15$. Maximaler Gewinn $\approx 419,62$ für $x = 600\sqrt{3} \approx 1039,23$ bei Flaschenpreis $\frac{3}{4}$. Es ergibt sich ein anderes Ergebnis als in der vorigen Aufgabe. Ursache: Die beiden Zuordnungen $x \mapsto 1 - \frac{x^2}{4320000}$ und $p \mapsto 3200(p-1)^2$ haben zwar denselben Steckbrief, sie sind aber keine Umkehrfunktionen zueinander und stellen daher nicht den gleichen Absatz-Preis-Zusammenhang dar.

42. Elastizität ist ax.

43. a) $\epsilon_f(x) = \frac{-15x}{120-15x}$ b) $\epsilon_f(x) = \frac{2\left(-1-3x+3x^2\right)}{(-2+x)(1+2x)}$ c) $\epsilon_f(x) = a$ d) $\epsilon_f(x) = \frac{1}{\ln(x)}$

44. a) Berechnen Sie $f(0 \cdot 1)$ auf zwei Arten. b) Berechnen Sie $f(x \cdot 1)$ auf zwei Arten mit $c = f(1)$. c) Lesen Sie hierzu noch einmal die Erläuterungen zu Elastizitäten.

45. Deckungsbeitrag maximal für $x = \sqrt[1-t]{t \cdot \frac{d}{c}}$, Funktion ist konkav, Asymptote für $x \to \infty$ ist $x \mapsto -cx$.

Durchschnittlicher Deckungsbeitrag ist streng monoton fallend, konvex, hat Funktionsgrenzwert $-\infty$, hat keine polynomiale Asymptote.

46. Die Kosten werden minimal für $x_0 = \sqrt{\frac{2000d}{c+d}}$ und $y_0 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2000(c+d)}{d}}$. Sie betragen $f(x_0) = 2\sqrt{2000d(c+d)}$.

47. Globales Minimum für $x_e = \sqrt[t]{\frac{a}{b(t-1)}}$, streng monoton fallend für $x \leq x_e$, streng monoton wachsend für $x \geq x_e$. Für $t \geq 1$ ist f (streng) konvex. Für $1 < t < 2$ hat f eine Wendestelle in $x = \sqrt[t]{\frac{2a}{b(t-1)(2-t)}}$ mit links-rechts-Krümmungswechsel. Keine polynomiale Asymptote.

Kapitel 9

1. a) 36 b) $\frac{152}{3}$ c) 8

2. a) $\frac{1}{6}$ b) f hat drei Nullstellen $\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{1+4a}\right) < 0 < \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{1+4a}\right)$. Die Fläche beträgt $\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}a + \frac{1}{12}$

3. Der Flächeninhalt ist 2.

4.Mit einem parametrischen Ansatz für $F(x)$ wird $F'(x)$ mit $f(x)$ verglichen: a) $F(x) = ax^4 - bx^2$ ergibt $F(x) = \frac{1}{2}x^4 - \frac{7}{2}x^2$, b) Ansatz $F(x) = a(3x)^{5/4}$ ergibt $F(x) = \frac{4}{15}(3x)^{5/4}$, c) Ansatz $F(x) = ae^{-x}$ ergibt $F(x) = \frac{4}{15}(3x)^{5/4}$

5. a) $\frac{4}{15}$ b) $\frac{4}{3}$

6. $a = \pm 2$

7.$m = 9$

8. $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}$

9. Die Obersumme ist $\frac{1}{n}f(1+\frac{1}{n}) + \frac{1}{n}f(1+\frac{2}{n}) + \cdots + \frac{1}{n}f(1+\frac{n}{n}) = \frac{14n^2+9n+1}{8n^2}$. Mit $n \to \infty$ ergibt sich als Grenzwert $\frac{7}{4}$.

10. $1 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$. Mit $f(x) = x^3$ ist die Untersumme

$\frac{2}{n}\left(f(0) + f(\frac{2}{n}) + f(\frac{4}{n}) + \cdots + f(\frac{2(n-1)}{n})\right) = 4\frac{n^4-2n^2+1}{n^4} \to 4$ für $n \to \infty$, was mit dem Wert $\int_0^2 x^3 dx$ übereinstimmt.

11. a) Das Integral beschreibt die Fläche eines (auf der Seite liegenden) Trapezes mit Grundseitenlängen $\frac{3}{2}$ und 1 und Höhe 1. Flächeninhalt ist $\frac{5}{4}$.

b) $\int_0^1 (\frac{1}{2}x+1)dx = \frac{5}{4}$.

c) Untersumme: $\frac{1}{n}\left(f(\frac{0}{n})+f(\frac{1}{n})+\cdots+f(\frac{n-1}{n})\right) = \frac{5}{4}-\frac{1}{4n} \to \frac{5}{4}$ für $n \to \infty$.

12. Setzen Sie $\frac{b-a}{6}(f(a)+4f(\frac{a+b}{2})+f(b))$ mit $f(x)=x^4$ ein und multiplizieren Sie den Klammerausdruck so weit wie möglich aus. Multiplizieren Sie erst zum Schluss mit $(b-a)$.

13. a) 210 b) $54\sqrt{2}$ c) e^2+e-1 d) e e) $\frac{13}{3}$ f) $a^2\frac{e^2-1}{e}$
g) $x-\frac{4}{x-1}+4\ln(x-1)$

14. a) $(4+x)e^x$ b) $\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\sin(x)\cos(x)$ c) $\cos(x)+x\sin(x)$
d) $(e^{-\pi}-e^{\pi})/2$ e) $2x-2x\ln(x)+x\ln(x)^2$ f) $x\ln(\frac{x}{1-x})+\ln(1-x)$

15. a) $\frac{5}{44}\left(2x^2+1\right)^{11}$ b) $-\frac{e^{-x^2}}{2}$ c) $\frac{x^{2x}}{2}$ d) $\frac{1}{2}\sin^2(x)$ e) $\sqrt{x^2+2x+4}$

16. 3560 Kilogramm

17. etwa 14,75 cm^2

18. a) 1 b) 1 c) $\frac{1}{2}$

19. a) 2 b) $\frac{1}{4}$ c) 0 d) ∞

20. A hat endlichen Flächeninhhalt für $t<1$, B hat endlichen Flächeninhalt für $t>1$.

21. $\frac{1}{n(n-1)}$

22. $(n-1)!$

23. a) $p=3$, Wohlfahrt 150 b) $p=16$, Wohlfahrt $\frac{550}{3}$ c) $p=10$, Wohlfahrt 2400. d) $p\approx 9,23$, Wohlfahrt $\approx 27,58$

24. a) $N(x)=500-\frac{17x}{24}+\frac{x^2}{800}-\frac{x^3}{960000}$ b) $p=300$ c) Wohlfahrt 138750.

25.teilaufgabe $b\ln(b)-b$, a) $b=e$, b) $\frac{1}{e}$

26. a) Maximalabsatz sind ≈ 771 Anzüge (Lösung mit Newton-Verfahren oder Regula falsi)
b) $x=\frac{1000}{3}\approx 333$. Bei dieser Nachfragemenge reagiert der Preis besonders stark auf Änderungen der Nachfrage.
c) Maximaler Erlös bei $x=500$.
d) Maximaler Gewinn $27768,75$ bei $x=350$
e) Nein, die geringsten Durchschnittskosten (Betriebsoptimum) sind $\approx 70,72$ € bei ≈ 226 hergestellten Anzügen.
f) $A(x)=\frac{1}{4000}x^2+\frac{1}{20}x+80$
g) Break-Even-Preis $\approx 143,49$ bei $x\approx 413,75$. Konsumentenrente ist $\approx 17556,86$, Produzentenrente ist $\approx 16084,60$, Wohlfahrt ist $\approx 33641,45$.

Kapitel 10

1. a) $a_0+2a_1=4, a_0+3a_1=0$ b) $a_0+2a_1+4a_2=4, a_0+3a_1+9a_2=0, a_0+4a_1+16a_2=-6$ c) $a_0=5, a_1+6a_2=1, a_0+5a_1+25a_2=0$ d) $a_0+4a_1+16a_2+64a_3=0, a_1+8a_2+48a_3=4, 2a_2+24a_3=0, a_0=16$

2. $\frac{1}{5}x_1 + \frac{1}{5}x_2 + \frac{3}{5}x_3 = y_1$, $\frac{2}{5}x_2 + \frac{2}{5}x_3 = y_2$

3. $x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 300$, $2x_1 + x_4 + x_5 = 200$, $x_2 + x_4 + x_6 = 200$, $x_3 + x_5 + x_6 = 200$

4. a) $-\frac{2}{5}x_1 + \frac{1}{4}x_3 = 0$, $\frac{1}{5}x_1 - \frac{2}{5}x_2 + \frac{1}{4}x_3 = 0$, $\frac{1}{5}x_1 + \frac{2}{5}x_2 - \frac{1}{2}x_3 = 0$, $x_1 + x_2 + x_3 = 820$ b) $x_1 = 200, x_2 = 300, x_3 = 320$

5. a) $x = \frac{1}{11}, y = \frac{37}{11}$ b) $x = -\frac{1}{2}, y = \frac{1}{2}$ c) keine Lösung d) $x = 3, y = -7, z = -5$ e) $x = 2b-2, y = 2-b$ f) Für $a = b = -\frac{1}{2}$ gibt es unendlich viele Lösungen $x = b - ay$. Für $a = \frac{1}{2} \neq b$ gibt es keine Lösung. Für $a \neq \frac{1}{2}$ ist die Lösung $x = \frac{b-a}{2a+1}, y = \frac{2b+1}{2a+1}$

6. Es muss gelten $ad - bc \neq 0$.

7. Die Lösungsmenge besteht aus allen $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ mit $x_1 = 2 + x_4$, $x_2 = -2 - 2x_4$,$x_3 = -3 - 2x_4 + x_5$ wobei $x_4 \in \mathbb{R}, x_5 \in \mathbb{R}$

8. a) $f(x) = 12 - 4x$ b) $f(x) = 6 + x - x^2$ c) $f(x) = 5 - 11x + 2x^2$ d) $f(x) = 16 - 20x + 6x^2 - x^3/2$

9. a) $x = -\frac{3}{4} - \frac{1}{2}y$ für $t = -\frac{3}{2}$ b) unlösbar für $t = -2$. Anderenfalls $x = \frac{-3+t^2}{2(2+t)}$, $y = \frac{3+2t}{2+t}$.

10. Das Einsetzungsverfahren entspricht einem geeigneten Additionsschritt. Löst man z.B. die erste Gleichung nach x auf und substituiert dies in die zweite Gleichung, so ergibt sich die Gleichung $-12y + 26z = 6$. Das selbe Ergebnis bekommt man durch die Zeilenumformung $II \to II - 3I$.

11. a) maximal für $x_1 = \frac{5}{2}, x_2 = 0$, minimal für $x_1 = 0, x_2 = \frac{5}{4}$ b) für $t = 0$ minimal/maximal für jede Wahl von x_1, x_2. Für $t > 0$ minimal für $x_1 = \frac{3}{4}, x_2 = 0$, ein Maximum gibt es nicht (Zielwert nach oben unbeschränkt). Für $t < 0$ minimal für $x_1 = 0, x_2 = -\frac{3}{t}$ und maximal für $x_1 = \frac{3}{4}, x_2 = 0$ c) minimal für $x_1 = \frac{7}{9}, x_2 = \frac{8}{9}, x_3 = 0$, maximal für $x_1 = \frac{3}{5}, x_2 = 0, x_3 = \frac{8}{5}$. d) minimal für $x_1 = \frac{7}{9}, x_2 = \frac{8}{9}, x_3 = 0$, ein Maximum gibt es nicht, die Zielfunktion ist nach oben unbeschränkt. e) das LGS hat keine Lösung mit $x_i \geq 0$, es gibt daher auch keine Lösung des Optimierungsproblems. f) minimal für $x_1 = 2, x_2 = 0, x_3 = 1, x_4 = 0$, maximal für $x_1 = 5, x_2 = 2, x_3 = 0, x_4 = 3$.

12. Eine Lösung ist $x_1 = x_3 = x_4 = 0, x_2 = 100, x_5 = 30$.

13. Spezielle Lösung auf Grundlage der ZSF: $x_1 = 360, x_2 = 1080, x_3 = 600, x_4 = x_5 = x_6 = 0$ mit 2040 Rollen Bedarf. Verwendet man z.B. Schnittmuster 5 bis zu 360 mal, dann verringert sich der Rollenbedarf auf 1920. Die spezielle Lösung ist noch nicht optimal.

14. $x_1 = -5a + 3b + 4c, x_2 = 10a - 5b - 7c, x_3 = 4a - 2b - 3c$

15. a) $x_A = 100 - x_E$, x_B, $x_C = 100$, $x_D = 50 - 2x_E$, $x_E \in \{0, \ldots, 25\}$. b) Der höchste Umsatz wird mit 75 Starter-Sets (A), 450 Starter-Sets (B), 100 Ergänzungs-Sets (C), 0 Ergänzungssets D und 25 XXL-Sets (E) erzielt.

Kapitel 11

1. $200x_A + 200x_B + 400x_C \stackrel{!}{=} \max$ unter
$$\begin{aligned} x_B + x_C &\leq 100 \\ 2x_A + x_B + x_C &\leq 120 \\ 2x_A + x_B &\leq 120 \\ x_A \geq 0, x_B \geq 0, x_C &\geq 0 \end{aligned}$$

2. $600x_I + 900x_{II} + 1350x_{III} \stackrel{!}{=} \min$ unter unter

$$\begin{aligned} &x_I + x_{II} + x_{III} \geq 12 \\ &x_{II} + 2x_{III} \geq 10 \\ &2x_I + x_{II} + x_{III} \geq 16 \\ &x_I \geq 0, x_{II} \geq 0, x_{III} \geq 0 \end{aligned}$$

3. $10x_1 + 10x_2 + 20x_3 + 40x_4 \stackrel{!}{=} \min$ unter

$$\begin{aligned} &2x_1 - 4x_2 + 3x_3 + x_4 - x_5 = 200 \\ &2x_2 - 2x_3 + 4x_4 - x_6 = 100 \\ &-x_1 + x_2 + x_7 = 100 \\ &x_1 + x_2 + 2x_4 = 150 \\ &x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0 \end{aligned}$$

4. Zu Aufgabe „Maschinenbelegung“:

$-200x_A - 200x_B - 400x_C \stackrel{!}{=} \min$ unter

$$\begin{aligned} &x_B + x_C + x_I = 100 \\ &2x_A + x_B + x_C + x_{II} = 120 \\ &2x_A + x_B + x_{III} = 120 \\ &x_A \geq 0, x_B \geq 0, x_C \geq 0, x_I \geq 0, x_{II} \geq 0, x_{III} \geq 0 \end{aligned}$$

Die Schlupfvariablen geben an, wieviele Stunden die entsprechende Maschine bereitsteht, aber nicht genutzt wird.

Zu Aufgabe „Lastwagenplanung“:

$600x_I + 900x_{II} + 1350x_{III} \stackrel{!}{=} \min$ unter

$$\begin{aligned} &x_I + x_{II} + x_{III} - x_A = 12 \\ &x_{II} + 2x_{III} - x_B = 10 \\ &2x_I + x_{II} + x_{III} - x_C = 16 \\ &x_I \geq 0, x_{II} \geq 0, x_{III} \geq 0, x_A \geq 0, x_B \geq 0, x_C \geq 0 \end{aligned}$$

Die Schlupfvariablen geben an, um wieviel das mindestens zur Lieferung der Maschinen der Typen A,B,C benötigte Ladevolumen (in Anzahlen der Maschinen) überschritten wird (entspricht dem während der Fahrten nicht genutzten Ladevolumen).

5. Gleichungsmatrix: $\left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & -1 & 0 & -1 & 13 \\ 0 & -3 & -1 & -10 & 12 \\ -2 & 1 & 2 & 3 & 7 \end{array}\right)$

Allgemeine Lösung (daraus Basislösung mit $x_4 = 0$):

$$\begin{aligned} x_4 &\in \mathbb{R} \text{ beliebige reelle Zahl} \\ x_1 &= \tfrac{17}{6} - x_4 \\ x_2 &= -\tfrac{22}{3} - 3x_4 \\ x_3 &= 10 - x_4 \end{aligned}$$

Basisformen sind

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & \frac{17}{6} \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -\frac{22}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 10 \end{array}\right), \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & -\frac{43}{6} \\ 0 & 1 & -3 & 0 & -\frac{112}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 10 \end{array}\right), \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{95}{18} \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 1 & -\frac{22}{9} \\ 0 & -\frac{1}{3} & 1 & 0 & \frac{112}{9} \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & \frac{17}{6} \\ -3 & 1 & 0 & 0 & -\frac{95}{6} \\ -1 & 0 & 1 & 0 & \frac{43}{6} \end{array}\right)$$

6.

Basisform	zulässig?	Zielwert
$\left(\begin{array}{cccccc\|c} -1 & 1 & 0 & -2 & -1 & 0 & 200 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 200 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 600 \end{array}\right)$	ja	27000
$\left(\begin{array}{cccccc\|c} 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 400 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 200 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & 1 & 400 \end{array}\right)$	ja	20000
$\left(\begin{array}{cccccc\|c} 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 400 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 200 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & 1 & 400 \end{array}\right)$	ja	20000
$\left(\begin{array}{cccccc\|c} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 600 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 200 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 800 \end{array}\right)$	ja	37000
$\left(\begin{array}{cccccc\|c} 1 & -1 & 0 & 2 & 1 & 0 & -200 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 400 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 & 1 & 800 \end{array}\right)$	nein	

7. Der maximale Deckungsbeitrag von 12000 Euro wird mit 20 Regalen Bill1, 70 Regalen Bill2 und 10 Regalen Bill4 erzielt.

8. $x_1 = 0, x_2 = \frac{3}{2}, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = \frac{7}{2}, x_6 = 1$

9. Das Problem hat keine Lösung, die Zielfunktion ist nach unten unbeschränkt.

10. Optimallösung: 10 Stück des Gutes A und 100 Stü ck des Gutes C werden hergestellt. Die Betriebsstunden der Maschine III werden dabei nicht voll ausgenutzt, sie wird nur 20 Stunden benötigt.

11. Lösung: $x_1 = 150, x_2 = x_3 = x_4 = 0$ mit dem Zielwert 1500

12. Es gibt keine Startlösung für Phase 2, das Problem ist unlösbar.

13. Zur Minimierung der Fahrkosten sollten 4 LKW vom Typ I, 6 LKW vom Typ II und 2 LKW vom Typ III eingesetzt werden. Die Transportflächen der LKW sind voll ausgelastet. Die minimalen Transportkosten belaufen sich auf 10500 €.

14. Von 1920 Rollen der Breite 95cm werden 1440 nach Schnittmuster 1, 120 nach Schnittmuster 3 und 360 nach Schnittmuster 5 zerschnitten.

15. Ergebnisse:

a) $x_1 = 20, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 10$, Zielwert 20

b) Das Problem hat keine Lösung.

c) Problem ist unlösbar, Zielfunktion nach unten unbeschränkt.

d) $x_1 = 100, x_2 = 400, x_3 = 300, x_4 = 0$, Zielwert 800.

e) Das Ausgangsproblem hat keine Lösung.

f) $x_1 = 0, x_2 = 500, x_3 = 125, x_4 = 25$, Zielwert -1725

g) $x_1 = 0, x_2 = 400, x_3 = 125, x_4 = 25, x_5 = 0$, Zielwert -1325.

h) $x_1 = 275, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 25, x_6 = 125$, Zielwert 4250.

16. Nur die erste und vierte Zielfunktion passen zum Tableau. Das Folgetableau lautet

	1	2	3	4	5	6	x
6	0	$-\frac{3}{2}$	2	$\frac{1}{2}$	0	1	2
5	0	$\frac{1}{2}$	2	$-\frac{1}{2}$	1	0	4
1	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	0	2
	0	$-\frac{5}{2}$	0	$-\frac{5}{2}$	0	0	8

17. In Anlage 1 sollten 10 Mio €, in Anlage 2 sollten 20 Mio € investiert werden. Anlage 3 sollte nicht gewählt werden. Die Rendite beträgt 2 Mio €.

18.

a) Die Anforderungen an die Scheinproduktionen lauten

Nebenbedingung an	gefertigte Werte	Mindestwert
5 und 10 Duro	$5(x_1+1)+10(x_2+1)$	30
10 und 20 Duro	$10(x_2+1)+20(x_3+1)$	50
20 und 50 Duro	$20(x_3+1)+50(x_4+1)$	200

was durch Auflösen die drei Ungleichungen der Aufgabenstellung ergibt.

b)
$$\begin{aligned} x_1+5x_2+5x_3+10x_4 &\overset{!}{=} \min \\ 5x_1+10x_2-x_5 &= 15 \\ 10x_2+20x_3-x_6 &= 20 \\ 20x_3+50x_4-x_7 &= 130 \\ x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7 &\geq 0 \end{aligned}$$

c) Folgetableau:

	1	5	5	10	0	0	0	x
1	1	2	0	0	$-\frac{1}{5}$	0	0	3
3	0	$\frac{1}{2}$	1	0	0	$-\frac{1}{20}$	0	1
4	0	$-\frac{1}{5}$	0	1	0	$\frac{1}{50}$	$-\frac{1}{50}$	$\frac{11}{5}$
	0	$-\frac{5}{2}$	0	0	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{20}$	$-\frac{1}{5}$	30

d) Gesamtherstellung von 4 Mio 5-Duro-Noten, 1 Mio 10-Duro-Noten, 2 Mio 20-Duro-Noten und $3,2$ Mio 50-Duro-Noten.

Kapitel 12

1. a) $\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ c) nicht möglich d) $(3,5)$ e) $(1,1)$ f) nicht möglich g) nicht möglich h) $\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$ i) $\begin{pmatrix}9\\15\end{pmatrix}$ j) $\begin{pmatrix}5\\10\\15\end{pmatrix}$ k) nicht möglich l) $\begin{pmatrix}9\alpha_1\\14\alpha_1\\19\alpha_1\end{pmatrix}$

2. $12,03$ €

3. a) ja für $t=0$, nein für alle anderen t b) ja für $t^2<1$, nein für alle anderen t c) nein d) nein e) ja

4. Benötigt werden die Faktorregel (mit f ist auch αf differenzierbar) und die Summenregel (mit f,g ist auch $f+g$ differenzierbar).

5. a) $\alpha_1 = -11, \alpha_2 = 7$ b) Es gibt keine LK für $t = 12$. Anderenfalls $\alpha_1 = -\frac{t}{-12+t}, \alpha_2 = \frac{-9+t}{-12+t}$ c) $\alpha_1 = -1, \alpha_2 = -2, \alpha_3 = 2$ d) allgemeine Lösung: $\alpha_1 = -1 - 4\alpha_4, \alpha_2 = -2 - \frac{19\alpha_4}{2}, \alpha_3 = 2 + \frac{7\alpha_4}{3}$

6. a) $\frac{3}{16}$ b) $-17/6 - (5t)/12$

7. a) $-6x_1 + x_2 + 4x_3 = 0$ b) $9x_1 - 13x_2 + x_3 = 0,\ -7x_1 + 10x_2 + x_4$

8. a) l.u. b) l.a. c) l.a. für $t \in \left\{3 - \sqrt{7}, 3 + \sqrt{7}\right\}$, sonst l.u.

9. a) Aus $\alpha_1 sa^{(1)} + \alpha_2 ta^{(2)} = \bar{0}$ folgt $\alpha_1 s = \alpha_2 t = 0$ b) Aus $\alpha_1 a^{(1)} + \alpha_2(a^{(1)} + a^{(2)}) = \bar{0}$ folgt $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha_2 = 0$. c) Aus $\alpha_1 a^{(1)} + \alpha_2(sa^{(1)} + ta^{(2)}) = \bar{0}$ folgt $\alpha_1 + s\alpha_2 = t\alpha_2 = 0$.

10. a) $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\5\\4\end{pmatrix}$ c) für $t = -2$ $\begin{pmatrix}3\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\t\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\5\\4\end{pmatrix}$, für alle anderen t $\begin{pmatrix}3\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\t\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$,

11. a) $(-1, 2, 1)^T$ b) $(-t, t, 1)^T$ c) $(-2, -1, -2, 1, 0, 0)^T$ und $(-1, -3, -4, 0, -1, 1)^T$

12. $A = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1/3 & -2 & 0\\ 0 & 1 & 7/3 & 6 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

13. a) $x_1 - x_2 + 2x_3 = 0$ b) $x_1 - 3x_2 + 2x_4 = 0, -(3x_2/2) + x_3 + x_4 = 0$

14. Zwei Geraden stehen genau dann senkrecht aufeinander, wenn für alle Punkte $(x|y)$ auf der einen und $(\tilde{x}|\tilde{y})$ auf der anderen Gerade gilt $\langle (x|y) - (x_0|y_0), (\tilde{x}|\tilde{y}) - (x_0|y_0)\rangle = 0$. Vereinfachen Sie diesen Term und führen ihn auf $m_1 m_2$ zurück.

15. a) für $n = 5$ mindestens 34, höchstens 55; für $n = 6$ mindestens 56, höchstens 91 b) mindestens $\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$, höchstens $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

16. a) $\cos(\phi) = \frac{4}{5}$, also $\phi \approx 0,644$ (im Bogenmaß), b) $\cos(\phi) = 1/\sqrt{21}$, $\phi \approx 1,35$

17. für $t = -1$ und $t = -\frac{1}{5}$

18. Wenden Sie Satz 12.11 ⇨ vgl. S. 308 auf $b^{(j)} = \frac{1}{\|a^{(j)}\|} a^{(j)}$, $j = 1, \ldots, n$, an.

19. Lösen Sie den Betrag auf: die Ungleichungen $\|x\| - \|y\| \leq \|x - y$ und $\|x\| - \|y\| \geq -\|x - y\|$ sind dann herzuleiten. Für die erste Ungleichung schreiben Sie $\|x\| = \|(x - y) + y\|$ und wenden die Dreiecksungleichung an. Die zweite Ungleichung können Sie z.B. auf die erste zurückführen.

20. z.B. [1] $(3, 4, 0)^T$, [2] $(42, 0, 0)^T$

21. a) $z^* = (-3/5, -3, -6/5)^T$ b) $z^* = (-4, 1, 3, 5)^T$ c) $z^* = (-4 - 3t, -2 - t, 3t)^T$

22. Die Normalgleichung lautet $\alpha\|a\|^2 = \langle a, x\rangle$

23. $z^* = \begin{pmatrix}\frac{5}{14}x_1 + \frac{3}{7}x_2 - \frac{3}{14}x_3\\ \frac{3}{7}x_1 + \frac{5}{7}x_2 + \frac{1}{7}x_3\\ -\frac{3}{14}x_1 + \frac{1}{7}x_2 + \frac{13}{14}x_3\end{pmatrix}$

24. a) Projektion von $(2,60|1,80|2,70|1,70|1,80)^T$ auf den UVR $\mathbb{L} \subset \mathbb{R}^5$, der von den Vektoren $(1|1|1|1|1)$, $(3|2|1|1|2)$, $(2|1|0|1|1))$ aufgespannt wird (ohne Berücksichtigung einer Pauschale den Erzeugenden-Vektor $(1|1|1|1|1)$ weglassen) b) Für die Variablen

p (Preis), x_B (kg Bananen) x_O (kg Orangen) erhält man die Gleichung $p = 0,93 + 0,43x_B + 0,16x_O$ (Koeffizienten gerundet). Ohne Pauschale lautet die Gleichung $p = 0,66x_B + 0,47x_O$ c) Hubert sollte sich sich mit Pauschale auf 1,52 ägyptische Pfund und ohne Pauschale auf 1,12 ägyptische Pfund einstellen.

25. Die Normalgleichungen sind auf Seite 316 in Matrixform angegeben. Man teile die erste und die zweite Gleichung durch n und subtrahiere das $\bar{x}$-fache der zweiten Gleichung von der ersten. Die erste Gleichung enthält dann nur noch eine Variable. Wenn man nach dieser auflöst, erhält man die Formel für die Steigung der Regressionsgerade. Die Formel für den Achsenabschnitt ist durch Auflösen der zweiten Gleichung gegeben.

26. a) Man projiziere $y = (88, 95, 70, \ldots, 34, 33)^T \in \mathbb{R}^{10}$ auf den UVR des $\mathbb{R}^{10}$, der von $(1, 1, \ldots, 1)^T$, $(2, 2, 18, \ldots, 39, 33)^T$ und $(2^2, 2^2, 18^2, \ldots, 39^2, 33^2)^T$ aufgespannt wird. Lösung ist $y = 102.492 - 4.606x + 0.070x^2$ b) Die nach oben geöffnete Parabel hat ihren Scheitelpunkt etwa in $x = 32.76$ und ist rechts davon monoton wachsend. Im Preismodell, das auf der Datengrundlage berechnet wurde, ergibt sich also ab einem gewissen Alter wieder ein steigender Wert (Oldtimer-Effekt).

27. Man berechne die Projektion z^* von x auf $\mathbb{L} = Span(a^{(1)}, \ldots, a^{(m)})$. Falls $x \in \mathbb{L}$, so gilt $z^* = x$.

Kapitel 13

1. a) $\begin{pmatrix} 33 \\ -16 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -st \\ 2s^2 - t^2 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} n(n+1)/2 \\ n(n+1)(n+2)/6 \end{pmatrix}$

2. a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ t & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3. a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ b) es gibt keine solche Matrix. (L1.) und (L2.) gemäß Satz 13.1 ⇨ vgl. S. 322 sind verletzt. c) es gibt keine solche Matrix. (L1.) ist verletzt, zudem ist f für $x_3 \neq 0$ nicht definiert.

4.

a) $\begin{pmatrix} 14 & -32 \\ -32 & 77 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 17 & -22 & 27 \\ -22 & 29 & -36 \\ 27 & -36 & 45 \end{pmatrix}$, n. def., $\begin{pmatrix} -7 & -1 & -10 \\ 8 & -1 & 11 \\ -9 & 3 & -12 \end{pmatrix}$,

$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 9 & -21 \end{pmatrix}$, n. def., $\begin{pmatrix} 1 & -4 & 9 \\ -4 & 10 & -18 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -4 & 10 \\ 9 & -18 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 7 & -10 \\ 25 & -52 \end{pmatrix}$

b) $(-7, 8, -9)^T, -33, 39, 194, x^2 + 2y^2 + 3z^2$

5. a) $\begin{pmatrix} 2 & 6 & 4 & 8 \\ 2 & 6 & 3 & 3 \\ 4 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 10 & 10 & 5 & 3 \\ 4 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 6 & 3 & 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & 6 & 4 & 8 \\ 8 & 14 & 7 & 6 \\ 2 & 6 & 3 & 3 \end{pmatrix}$, c) Durch Matrixmultiplikation mit diesen so genannten Elementarmatrizen kann man elementare Zeilenumformungen darstellen.

6. a) $C = \begin{pmatrix} 14 & 14 \\ 3 & 10 \end{pmatrix}$. b) Einkaufskosten 37 für P_1 und 58 für P_2. c) Es werden 210 bzw. 80 Stück der Bauteile benötigt.

7. a) $\frac{1}{6}\begin{pmatrix} -3 & 6 & -3 \\ 18 & -30 & 6 \\ -13 & 22 & -3 \end{pmatrix}$ b) nicht invertierbar c) $\frac{1}{40}\begin{pmatrix} -5 & 5 & 5 \\ 11 & -3 & 5 \\ -3 & 19 & -5 \end{pmatrix}$ d) $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

8. a) $10A = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 0 \\ 20 & 60 & 30 \\ 0 & 30 & 50 \end{pmatrix}$, $A+B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 9 & 3 \\ 0 & 3 & 10 \end{pmatrix}$, $A^2 = \begin{pmatrix} 5 & 14 & 6 \\ 14 & 49 & 33 \\ 6 & 33 & 34 \end{pmatrix}$, $AB = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 0 \\ 4 & 18 & 15 \\ 0 & 9 & 25 \end{pmatrix}$, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 21 & -10 & 6 \\ -10 & 5 & -3 \\ 6 & -3 & 2 \end{pmatrix}$. Ökonomisch interpretieren lassen sich $10A$, AB und A^{-1}. b) $C = (AB)^{-1}$

9. $a = -\frac{3}{4}$, $b = \frac{3}{4}$

10. a) -19, b) 0, c) 7, d) 16, e) $-2t + 2t^2$ f) $8a^3b$

11. $(\frac{1-a_1-a_2-a_3-a_4}{x_1x_2x_3x_4}) \cdot (\frac{a_1a_2a_3a_4}{x_1x_2x_3x_4})$

12. Es gibt keine solche Matrix, ihre Determinante müsste ein Vielfaches von 28 sein.

13. a) $(-\frac{5}{2}, \frac{5}{2})^T$, b) $(-\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, 0)^T$, c) $(\frac{t}{2}, \frac{(t-1)}{2}, \frac{t}{2})^T$

14. a) $\lambda_{1,2} = 2 \pm \sqrt{5}$ b) $\lambda_1 = 1 \vee \lambda_{2,3} = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5}$ c) $\lambda_1 = 3 \vee \lambda_2 = -1$

15. a) $\lambda = 4$ bzw. $\lambda = 5$ b) $x = (6, -2)^T$ bzw. $x = (9, -6, -9)^T$ c) $x = (1, 2, -2)^T$, $\lambda = 3$ d) Hier gibt es viele Lösungen, z.B. $A = \frac{1}{9}xx^T = \begin{pmatrix} 1/9 & 2/9 & -2/9 \\ 2/9 & 4/9 & -4/9 \\ -2/9 & -4/9 & 4/9 \end{pmatrix}$

16. Die Matrix hat zwei Eigenwerte für $t \in]-1, \frac{1}{3}[$, einen Eigenwert für $t \in \{-1, \frac{1}{3}\}$ und keinen Eigenwert für alle anderen t.

17. Die Eigenwerte sind $\lambda_{1,2} = (a + c)/2 \pm \sqrt{(a - c)^2/4 + b^2}$.

18. $\begin{pmatrix} 29525 & 29524 \\ 29524 & 29525 \end{pmatrix}$ (möglichst mit Hauptachsentransformation zu bestimmen).

19. Das ergibt sich, wenn man das charakteristische Polynom auf zwei Arten berechnet, einmal mit der gegebenen Matrix und einmal als Linearform mit den beiden Eigenwerten.

20. positiv definit, indefinit, negativ definit, indefinit, negativ definit, indefinit,positiv semidefinit

21. Die Matrix ist positiv definit für $0 < a < 1$

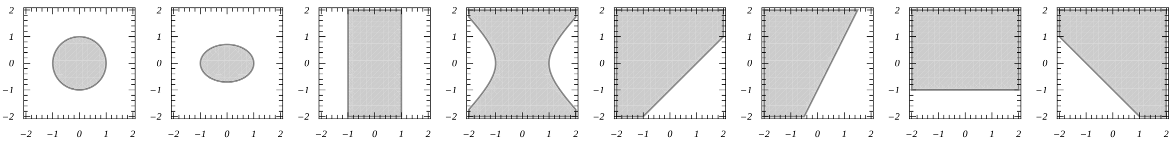
22. a) pauschal indefinit, positiv definit unter NB b) pauschal indefinit negativ definit unter NB c) pauschal positiv definit für $t > 9$, positiv semidefinit für $t = 0$ und indefinit für $t < 9$. Unter NB: positiv definit für $t > -99/25$, positiv(negativ) semidefinit für $t = -99/25$, negativ definit sonst d) pauschal indefinit, positiv definit unter NB e) pauschal indefinit negativ definit unter NB f) pauschal indefinit, positiv definit unter NB

23. a) $A := \frac{1}{100}\begin{pmatrix} 80 & 20 & 15 \\ 10 & 65 & 5 \\ 10 & 15 & 80 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 45,75\% \\ 25,25\% \\ 29,00\% \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 46,00\% \\ 22,44 \\ 31,56\% \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} \frac{5}{11} \\ \frac{2}{11} \\ \frac{4}{11} \end{pmatrix}$

24. a) $A = \begin{pmatrix} \frac{3}{10} & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$ b) z.B. $\begin{pmatrix} 100 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 200 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 200 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 200 \\ 450 \\ 240 \end{pmatrix}$, c) $\begin{aligned} x_E &= 200 \\ x_J &= 800 \\ x_V &= 600 \end{aligned}$

Kapitel 14

1. a) $\mathbb{D}_i$ schraffiert von links nach rechts: $\mathbb{D}_1$ mit $t = 1, 2, 0, -1$, $\mathbb{D}_2$ mit $t = 1, 2, 0, -1$:



b) Kreis: $\mathbb{D}_1$ mit $t = 1$; Ellipse: $\mathbb{D}_1$ mit $t = 1$ und $t = 2$; Polytop: $\mathbb{D}_1$ mit $t = 0$ und $\mathbb{D}_2$. c) konvex sind $\mathbb{D}_1$ mit $t = 1, 2, 0$ und $\mathbb{D}_2$.

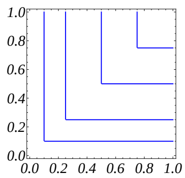
2. a) f ist Polynom und auch quadratische Funktion. Für $c = 0$ ist f quadratische Form. Für $a = b = 0$ ist f lineare Funktion. b) f ist quadratische Funktion (Bruch kürzen!) c) Beide Versionen sind für $t = 0$ lineare bzw. konstante Funktion, für andere Werte von t ist f jeweils kein Polynom.

3. a) 10, f ist stetig b) 0, f ist stetig c) Für $t \neq 0$: $\frac{1}{2}$, f ist stetig; für $t = 0$ existiert der Grenzwert nicht. f ist in $(0,0)^T$ nicht definiert und kann auch nicht stetig dorthin fortgesetzt werden.

4. a) $N_g(c) = N_f(c/2)$ b) $N_h(c)$ entsteht aus $N_f(c)$ durch eine Vertikalverschiebung um 1 Einheit nach unten. $N_u(c)$ entsteht aus $N_f(c)$ durch eine Verschiebung von 1 Einheit nach unten und 1 Einheit nach rechts.

5. Wenden Sie die Regel von L'Hospital auf den logarithmierten CES-Term an.

6. a) Die Iso-Quanten sind rechts dargestellt. b) Der Ertrag wird dadurch begrenzt, dass einer der Produktionsfaktoren nicht in ausreichender Quantität zur Verfügung steht (limitationale Funktion). c) f ist positiv homogen vom Grad r.



7. a) homogen vom Grad 2 b) nicht homogen c) positiv homogen vom Grad 0 d) nicht homogen e) positiv homogen vom Grad 2 f) positiv homogen vom Grad -2.

8. $x = (u^{\delta} v^{-\beta})^{\frac{1}{\alpha\delta - \beta\gamma}}$, $y = (u^{-\gamma} v^{\alpha})^{\frac{1}{\alpha\delta - \beta\gamma}}$

9.$4a + 24b = 7$

10. a) y und x b) $-y/x^2$ und -1 c) 1 d) $x^{y-1}y$ und $x^y \ln(x)$

11. a) $\frac{1}{\sqrt{1+2x^2-3y^2}}(4x, -6y)^T$

b) $(e^{x-y^2} + \cos(x+y) - \sqrt{1+y^2}, -2ye^{x-y^2} + \cos(x+y) - \frac{xy}{\sqrt{1+y^2}})^T$

c) $(\ln \frac{y}{z}, \frac{x}{y}, -\frac{x}{z})^T$

d) $(y+z+\frac{yz}{x}+\ln(xyz)(y+z), x+\frac{xz}{y}+z+\ln(xyz)(x+z), \frac{xy}{z}+x+y+\ln(xyz)(x+y))^T$

e) $x^{\frac{y}{z}}(\frac{y}{z}x^{-1}, \frac{1}{z}\ln(x), -\frac{y}{z^2}\ln(x))^T$

12. $(-28p + 3q + 2396, -6q + 3p + 1197)^T$

13. a) Die Aussage ist falsch für $f(x,y) = xy$ b) Ersetze „unabhängig von x“ durch „konstant in allen Variablen“.

14. $g(x,y) = 8x + 6y - 8$

15. $h(0 + \Delta_x, 0 + \Delta_y, 3 + \Delta_z) = 3 + 7\Delta_x + 9\Delta_y + \Delta_z$

16. a) $Dg(x,y) = p(x^2 + y^2)^{p-1}(2x, 2y)^T$ b) Für $p > 1/2$ ist g in $(0,0)^T$ total differenzierbar mit $Dg(0,0) = (0,0)^T$. Für $p \leq 1/2$ ist g nicht total differenzierbar in $(0,0)^T$. c) $Dg(x_1, \ldots, x_n) = 2p(x_1^2 + \cdots + x_n^2)^{p-1}(x_1, \ldots, x_n)^T$. g ist für $p > 1/2$ auf $\mathbb{R}^n$ und für $p \leq 1/2$ auf $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ total differenzierbar.

17. $h(t) = -t$

18. a) l.u.r. Seite ausmultiplizieren und verrechnen, b) setze $x^2 + y^2 = 1$ dann ein, c) Gleichheit für $bx - ay = 0$, d) maximal für $bx = ay$, e) Wert ausrechnen **19.** a) $\epsilon_{f,1}(x_1, x_2) = -\alpha$, b) $\epsilon_{f,2}(x_1, x_2) = \beta x_2$

20. a) $\epsilon_f(100, 10) = (7/4, 1/2)^T$ b) etwa $1{,}75$ Prozent. c) etwa $1{,}5$ Prozent. d) etwa $2{,}25$ Prozent.

21. a) ca. $(0{,}6|0{,}8|0{,}07)$ mit steilstem Anstieg $3{,}76$, b) ca. $\frac{3}{4}\Delta_x$, c) exakter Wert $0{,}351\%$, näherungsweise $0{,}3532\%$

22. a) der Produzent muß den Einsatz des ersten Faktors um etwa $\frac{7}{5}$ Tonnen erhöhen. b) Nein, diese Aussage gilt nur bei „marginalen“ Änderungen.

23. $SEL(y|x) = 7/3$

24. a) $H_f(x,y) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{x^2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{y^2} \end{pmatrix}$, f ist konkav.

b) $H_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -18y & 0 \\ 0 & 0 & 36z^2 \end{pmatrix}$. f ist weder konkav noch konvex.

c) $H_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{12x^2}{yz} & \frac{-4x^3}{y^2z} & \frac{-4x^3}{yz^2} \\ \frac{-4x^3}{y^2z} & \frac{2x^4}{y^3z} & \frac{x^4}{y^2z^2} \\ \frac{-4x^3}{yz^2} & \frac{x^4}{y^2z^2} & \frac{2x^4}{yz^3} \end{pmatrix}$. f ist konvex.

d) $H_f(x,y,z) = e^{xyz}\begin{pmatrix} y^2z^2 & 1 + xyz & 1 + xyz \\ 1 + xyz & x^2z^2 & 1 + xyz \\ 1 + xyz & 1 + xyz & x^2y^2 \end{pmatrix}$. f ist weder konkav noch konvex.

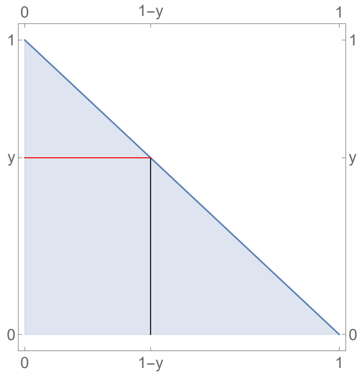
25. todo

26. a) $2\pi(r-1)$ b) $\frac{14}{3}$ c) $\frac{25}{6}$

27. Schreiben Sie das uneigentliche Integral zunächst als Grenzwert (in der oberen Integrationsgrenze) und verwenden Sie dann die Substitution $y = g(x) = x/\sqrt{2}$, um auf das Fehlerintegral $\int_0^\infty e^{-y^2}$ zu kommen.

28. a) $\pi^2 + 4$ b) $\pi^2/2$ c) 2

29. Planskizze für den y-Schnitt:



$\mathbb{D}_y = [0; 1-y]$

Ergebnis ist $\frac{5}{24}$

30. 4/15

31. a) $\nabla f(x,y,z) = \left(-\frac{y^2}{z(x+y)^2}, \frac{y^2+2xy}{z(x+y)^2}, -\frac{y^2}{z^2(x+y)}\right)^T$ b) $H_f(x,y) = \frac{2}{z(x+y)^3}\begin{bmatrix} y^2 & -xy \\ -xy & x^2 \end{bmatrix}$
c) f ist homogen vom Grad 0. $\epsilon_f(x,y,z) = (-\frac{x}{x+y}, \frac{y+2x}{x+y}, -1)^T$. Summe der partiellen Elastizitäten ist 0. d) g ist konvex.

Kapitel 15

1. a) globales Maximum bei $(0,0)$, g ist konkav. b) keine Extrema, h ist weder konkav noch konvex c) keine Extrema. Funktion ist weder konkav noch konvex

2. lokales (nicht globales) Minimum in $(1,0)^T$, Sattelpunkt in $(1,-2/3)$

3. Jeweils in $(0,0)^T$ liegt ein kritischer Punkt vor. a) globales Minimum b) globales aber nicht isoliert liegendes Minimum c) kein lokales Extremum

4. a) $G(x,y) = cx^\alpha y^\beta - ax - by$ b) $x_0 = \sqrt[\alpha+\beta-1]{\frac{a}{\alpha c}\left(\frac{\alpha b}{a\beta}\right)^\beta}$, $y_0 = \sqrt[\alpha+\beta-1]{\frac{b}{\beta c}\left(\frac{a\beta}{\alpha b}\right)^\alpha}$
c) $H_G(x,y) = cx^\alpha y^\beta \begin{bmatrix} \alpha(\alpha-1)/x^2 & \alpha\beta/(xy) \\ \alpha\beta/(xy) & \beta(\beta-1)/y^2 \end{bmatrix}$. G ist konkav und hat daher im kritischen Punkt ein globales Maximum.

5. a) $x_1 = \frac{2}{3}x_0 - \frac{1}{3}$, $y_1 = 0$ b) $x_1 = \frac{4x_0^3}{6x_0^2-1}$, $y_1 = -\frac{4x_0^3}{6x_0^2-1}$

6. a) $\pm(2,2)^T$ b) $(t,-2t)^T$ c) $\pm(t,-2t)^T$.

7. $x = y = 1$

8. $(1,-2,1)^T$ und $(-1,2,-1)^T$

9. $x_j = \frac{\alpha_j}{\alpha_1+\cdots+\alpha_n}$. Hinweis: Mit logarithmierter Zielfunktion ist das Ableiten leichter.

10. $x = \frac{5}{9}, y = \frac{1}{18}, z = \frac{7}{18}$

11. a) Sattelpunkt in $(0,0)^T$ b) $\pm(1/\sqrt{10}, 3/\sqrt{10})^T$ und $\pm(3/\sqrt{10}, -1/\sqrt{10})^T$

12. $x = 60, y = 180$

13. a) $x = 8, y = 2$ b) $x = 10, y = 5$

14. $(0,0,0)^T$, $(1,1,1)^T$, $(-1,-1,1)^T$. Bei den auch noch in Frage kommenden Punkten $(-1,1,-1)^T$ und $(1,-1,-1)^T$ passt das Vorzeichen des Lagrange-Multiplikators nicht.

15. Aufgabe 6: erstes Problem: in $\pm(2,2)^T$ jeweils lokales Minimum; zweites Problem: in $(t,2t)^T$ lokales Minimum; drittes Problem: in $(t,-2t)^T$ lokales Maximum; in $(-t,2t)^T$ lokales Minimum;
Aufgabe 7: in $(1,1)^T$ lokales Maximum;
Aufgabe 8: in $(-1,2,-1)^T$ lokales Minimum, in $(1,-2,1)^T$ lokales Maximum
Aufgabe 10:in $(5/9, 1/18, 7/18)^T$ lokales Minimum.

16. $x = c/(2a)$, $y = c/(2b)$. Randwertvergleich mit $x = 0, y = c/b$ bzw. $y = 0, x = c/a$

17. Kritischer Punkt $(2/5, 3/10)^T$. Vergleich mit Randpunkten $(x,0)$, und $(0,y)$ ergibt Randmaxima $(1/2,0)^T$ und $(0,1/2)$ mit kleineren Zielwert. Also liegt im kritischen Punkt ein globales Maximum vor.

18. Aufgabe 7: erstes Optimierungsproblem; globales Minimum in beiden kritischen Punkten; zweites Optimierungsproblem: globales Minimum im kritischen Punkt; drittes Optimierungsproblem: globales Minimum in $(-t,2t)^T$, globales Maximum in $(t,-2t)$.
Aufgabe 7: globales Maximum im kritischen Punkt
Aufgabe 8: globales Minimum in $(-1,2,-1)^T$ und globales Maximum in $(1,-2,1)^T$
Aufgabe 9: globales Maximum im kritischen Punkt. Aufgabe 10: globales Minimum im kritischen Punkt.

19. Aufgabe 12: $-G$ ist konvex, NB ist linear, also konvex, Slater-Bedingung z.B. mit $(1,1)^T$ erfüllt. Der kritische Punkt ist nach dem Satz von Kuhn-Tucker Stelle eines globalen Minimums.

Aufgabe 13: Voraussetzungen des Satzes von Kuhn-Tucker sind erfüllt (k ist konvex, g linear, also konvex,Slater-Bedingung z.B. mit $(1,1)^T$). In beiden Teilaufgaben ist der kritische Punkt globale Minimalstelle.

20. a) i) $-0{,}17329$, ii) $1/2$ b) i) $-0{,}17329$, ii) $-1/2$, iii) $-0{,}67329$ c) i) -4682131, ii) $-5{,}182131$

21. a) $x = 200$, $y = 10$, $z = 50$. Ausbringung 30 Mengeneinheiten. b) Mit dem Lagrange-Multiplikator $\lambda = -3/160$ beträgt die Erhöhung etwa $0{,}9375$ Mengeneinheiten. c) Die maximale Ausbringung verringert sich um etwa $0{,}46875$ Mengeneinheiten. d) Die maximale Ausbringung verringert sich um etwa $3{,}97$ Mengeneinheiten. e) Die maximale Ausbringung verringert sich um etwa $3{,}5$ Mengeneinheiten.

22. a) $\nabla f(x,y) = (64x + 72y - 1712, 72x + 130y - 2220)^T$, $H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 64 & 72 \\ 72 & 130 \end{pmatrix}$, f ist konvex. b) $x = 20, y = 6$ c) $x = 49, y = 2, \lambda = -784$ d) Betrachten Sie die Nebenbedingung zunächst als geeignete Ungleichung und prüfen Sie die Voraussetzungen des Satzes von Kuhn-Tucker. e) Erhöhung um näherungsweise 784 Einheiten.