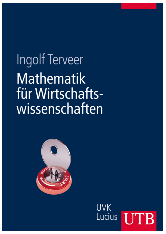
Lösungen zu den Übungsaufgaben

Stand 9. Januar 2015

Nachfolgend finden Sie zu den Übungsaufgaben im Buch



Ingolf Terveer
Mathematik für Wirtschaftswissenschaften

3., überarbeitete Auflage, 308 Seiten
ISBN 978-3-8252-8506-7

die ausführlichen Lösungen.

Kapitel 1

Aufgabe 1.

a) Das Polynom hat die Form $f(x) = a_0 + a_1 x$. Die Steckbriefaussagen lauten

– $f(2) = 4$, d.h. $a_0 + 2a_1 = 4$

– $f(3) = 0$, d.h. $a_0 + 3a_1 = 0$

b) Das Polynom hat die Form $f(x) = a_0 + a_1 x + x_2 x^2$. Die Steckbriefaussagen lauten

– $f(2) = 4$, d.h. $a_0 + 2a_1 + 4a_2 = 4$

– $f(3) = 0$, d.h. $a_0 + 3a_1 + 9a_2 = 0$

– $f(4) = -6$, d.h. $a_0 + 4a_1 + 16a_2 = -6$

c) $grad(f) = 2$, Das Polynom hat die Form $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ mit der Ableitung $f'(x) = a_1 + 2a_2 x$. Die Steckbriefaussagen lauten

– $f(0) = 5$, d.h. $a_0 = 5$

– $f'(3) = 1$, d.h. $a_1 + 6a_2 = 1$

– $f(5) = 0$, d.h. $a_0 + 5a_1 + 25a_2 = 0$

d) $grad(f) = 3$, Das Polynom hat die Form $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a3x^3$ mit den Ableitungen $f'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2$ und $f''(x) = 2a_2 + 6a_3 x$. Die Steckbriefaussagen lauten

– $f(4) = 0$, d.h. $a_0 + 4a_1 + 16a_2 + 64a_3 = 0$

– $f'(4) = 4$, d.h. $a_1 + 8a_2 + 48a_3 = 4$

– $f''(4) = 0$, d.h. $2a_2 + 24a_3 = 0$

– $f(0) = 16$, d.h. $a_0 = 16$

Aufgabe 2. Benennen Sie mit x_1, x_2, x_3 die drei Nikolausgrößen (in Anzahlen gemessen) und mit y_1, y_2 die Schokoladensorten (in Kilogramm gemessen). Zwischen Nikoläusen und Schokoladen besteht der Input-Output-Zusammenhang

$$\begin{aligned} \frac{1}{5}x_1 + \frac{1}{5}x_2 + \frac{3}{5}x_3 &= y_1 \\ \frac{2}{5}x_2 + \frac{2}{5}x_3 &= y_2 \end{aligned}$$

Eine mögliche Fragestellung könnte darin bestehen, einen vorgegebenen Schokoladen-Vorrat $(y_1|y_2)$ aufzubrauchen.

Aufgabe 3. Ein Zusammenhang betrifft den Zuschnitt der Figuren aus den Platten. Wenn $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ die Anzahlen bezeichnen, mit denen die jeweiligen Verschnittmuster angewendet werden, und mit y_1, y_2, y_3, y_4 die daraus produzierten Figurenzahlen gemeint sind, so gilt

$$\begin{array}{rrrrrrl} x_1 & +2x_2 & +2x_3 & & & & = y_1 \\ 2x_1 & & & +x_4 & +x_5 & & = y_2 \\ & x_2 & & +x_4 & & +x_6 & = y_3 \\ & & x_3 & & +x_5 & +x_6 & = y_4 \end{array}$$

Der andere Zusammenhang betrifft die Zuordnung der Mobileanzahlen z_1, z_2, z_3 zu den benötigten Figurenanzahlen y_1, y_2, y_3, y_4

$$\begin{array}{rrrl} z_1 & +z_2 & +z_3 & = y_1 \\ z_1 & & +z_3 & = y_2 \\ & z_2 & +z_3 & = y_3 \\ z_1 & & +z_3 & = y_4 \end{array}$$

Daraus ergibt sich, dass $y_1 = 300, y_2 = y_3 = y_4 = 200$. Das LGS lautet also

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 300 \\ 2x_1 + x_4 + x_5 &= 200 \\ x_2 + x_4 + x_6 &= 200 \\ x_3 + x_5 + x_6 &= 200 \end{aligned}$$

Aufgabe 4. Sind x_1 (G. Auß), x_2 (F. Ermat) und x_3 (E. Uler) die Anzahlen der Klausuren vor der Umverteilung und y_1, y_2, y_3 die Anzahlen danach, so lautet der Zusammenhang $y_1 = \frac{3}{5}x_1 + \frac{1}{4}x_3$, $y_2 = \frac{1}{5}x_1 + \frac{3}{5}x_2 + \frac{1}{4}x_3$, $y_3 = \frac{1}{5}x_1 + \frac{2}{5}x_2 + \frac{1}{2}x_3$.

Wenn sich die Klausuranteile durch die Umverteilung nicht verändert haben, so bedeutet das

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{3}{5}x_1 + \frac{1}{4}x_3 \Leftrightarrow -\frac{2}{5}x_1 + \frac{1}{4}x_3 = 0 \\ x_2 &= \frac{1}{5}x_1 + \frac{3}{5}x_2 + \frac{1}{4}x_3 \Leftrightarrow \frac{1}{5}x_1 - \frac{2}{5}x_2 + \frac{1}{4}x_3 = 0 \\ x_3 &= \frac{1}{5}x_1 + \frac{2}{5}x_2 + \frac{1}{2}x_3 \Leftrightarrow \frac{1}{5}x_1 + \frac{2}{5}x_2 - \frac{1}{2}x_3 = 0 \end{aligned}$$

Wir lösen dieses LGS mit der aus der Schule bekannten Technik des Einsetzungsverfahrens. Wenn Sie das Gauß'sche Eliminationsverfahren im übernächsten Abschnitt erarbeitet haben, lösen Sie die Aufgabe hiermit zur Übung noch einmal.

Zunächst wird die erste Gleichung nach x_3 umgestellt: $x_3 = \frac{8}{5}x_1$. Wir setzen dies in die zweite und dritte Gleichung ein:

$\frac{1}{5}x_1 - \frac{2}{5}x_2 + \frac{1}{4}x_3 = 0 \Rightarrow \frac{1}{5}x_1 - \frac{2}{5}x_2 + \frac{1}{4}\frac{8}{5}x_1 = 0 \Rightarrow \frac{3}{5}x_1 - \frac{2}{5}x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = \frac{3}{2}x_1$

$\frac{1}{5}x_1 + \frac{2}{5}x_2 - \frac{1}{2}x_3 = 0 \Rightarrow \frac{1}{5}x_1 + \frac{2}{5}x_2 - \frac{1}{2}\frac{8}{5}x_1 = 0 \Rightarrow -\frac{3}{5}x_1 + \frac{2}{5}x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = \frac{3}{2}x_1$

Die zweite und dritte Gleichung ergeben also dieselbe Bedingung, das LGS ist also nicht eindeutig lösbar (das ist bei solchen Gleichgewichtsberechnungen stets der Fall). Man kann die gewonnenen Beziehungen $x_3 = \frac{8}{5}x_1$ und $x_2 = \frac{3}{2}x_1$ aber in die zusätzlich bekannte Gleichung $x_1 + x_2 + x_3 = 820$ einsetzen und erhält

$x_1 + \frac{3}{2}x_1 + \frac{8}{5}x_1 = 820 \Leftrightarrow (1 + \frac{3}{2} + \frac{8}{5})x_1 = 1 \Leftrightarrow \frac{41}{10}x_1 = 820 \Leftrightarrow x_1 = 200$

Daraus folgt dann $x_2 = \frac{3}{2}x_1 = 300$ und $x_3 = \frac{8}{5}x_1 = 320$.

Also hatte G. Auß vor und nach der Umverteilung 200 Klausuren, F. Ermat musste 300 Klausuren korrigieren und auf E. Ulers Schreibtisch lagen 320 Klausuren.

Aufgabe 5.

a) $\left\{\begin{aligned} 2x + 3y &= 7 \\ x - 4y &= 3 \end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} 2x + 3y &= 7 \\ x &= 3 + 4y \end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} 2\,(3 + 4y) + 3y &= 7 \\ x &= 3 + 4y \end{aligned}\right.$

$\Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} 11y + 6 &= 7 \\ x &= 3 + 4y \end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} y &= \tfrac{1}{11} \\ x &= 3 + 4y \end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} y &= \tfrac{1}{11} \\ x &= 3 + 4 \cdot \tfrac{1}{11} \end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} y &= \tfrac{1}{11} \\ x &= \tfrac{37}{11} \end{aligned}\right.$

Also $\mathbb{L} = \{(\frac{37}{11}, \frac{1}{11})\}$

b) $\left\{\begin{aligned} x + 3y &= 1 \\ 3x + 3y &= 0 \end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} 3y &= 1 - x \\ 3y &= -3x \end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} 3y &= 1 - x \\ 1 - x &= -3x \end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} 3y &= 1 - x \\ 2x &= -1 \end{aligned}\right.$

$\Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} 3y &= 1 - x \\ x &= -\tfrac{1}{2} \end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} 3y &= 1 - \left(-\tfrac{1}{2}\right) \\ x &= -\tfrac{1}{2} \end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} 3y &= \tfrac{3}{2} \\ x &= -\tfrac{1}{2} \end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} y &= \tfrac{1}{2} \\ x &= -\tfrac{1}{2} \end{aligned}\right.$

Also $\mathbb{L} = \{(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})\}$

c) $\left\{\begin{aligned} x + 3y &= 1 \\ -2x - 6y &= 0 \end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} x &= 1 - 3y \\ -2x - 6y &= 0 \end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} x &= 1 - 3y \\ -2\,(1 - 3y) - 6y &= 0 \end{aligned}\right.$

$\Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} x &= 1 - 3y \\ -2 &= 0 \end{aligned}\right.$

Also $\mathbb{L} = \{\}$

d) $\left\{\begin{aligned} 9x + 3y + z &= 1 \\ x - 2y + 3z &= 2 \\ 3x + 2y - z &= 0 \end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} 9x + 3y + z &= 1 \\ x &= 2 + 2y - 3z \\ 3x + 2y - z &= 0 \end{aligned}\right.$

$\Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} 9\,(2 + 2y - 3z) + 3y + z &= 1 \\ x &= 2 + 2y - 3z \\ 3\,(2 + 2y - 3z) + 2y - z &= 0 \end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} 21y - 26z &= -17 \\ x &= 2 + 2y - 3z \\ 8y - 10z &= -6 \end{aligned}\right.$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 21y - 26z = -17 \\ x = 2 + 2y - 3z \\ y = \frac{5}{4}z - \frac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 21\left(\frac{5}{4}z - \frac{3}{4}\right) - 26z = -17 \\ x = 2 + 2y - 3z \\ y = \frac{5}{4}z - \frac{3}{4} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{4}z = -\frac{5}{4} \\ x = 2 + 2y - 3z \\ y = \frac{5}{4}z - \frac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -5 \\ x = 2 + 2y - 3z \\ y = \frac{5}{4}z - \frac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -5 \\ x = 2 + 2y - 3z \\ y = -7 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = -5 \\ x = 3 \\ y = -7 \end{cases}$$

Also $\mathbb{L} = \{(3, -7, -5)\}$

e) $$\begin{cases} x + 2y = 2 \\ x + y = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 - 2y \\ x = b - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 - 2y \\ 2 - 2y = b - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 - 2y \\ -y = b - 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 - 2y \\ y = 2 - b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 - 2\,(2 - b) \\ y = 2 - b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2b - 2 \\ y = 2 - b \end{cases}$$

Also $\mathbb{L} = \{(2b - 2, 2 - b)\}$

f) $$\begin{cases} -4x + 2y = 2 \\ x + ay = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4x + 2y = 2 \\ x = b - ay \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4(b - ay) + 2y = 2 \\ x = b - ay \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (4a + 2)\,y = 2 + 4b \\ x = b - ay \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (4a + 2)\,y = 2 + 4b \\ x = b - ay \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2a + 1)\,y = 2b + 1 \\ x = b - ay \end{cases}$$

Möglichkeit 1: $a = -\frac{1}{2}, b = -\frac{1}{2}$. Dann lautet die erste Gleichung $0 = 0$ und ist allgemeingültig. Lösungsmenge ist dann $\mathbb{L} = \{(x, y) : x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}, x = b - ay\} = \{(b - ay, y) : y \in \mathbb{R}\}$.

Möglichkeit 2: $a = -\frac{1}{2}, b \neq -\frac{1}{2}$. Dann lautet die erste Gleichung $0 = 2b + 1 (\neq 0)$ und ist unlösbar. Daher ist $\mathbb{L} = \{\}$.

Möglichkeit 3: $a \neq -\frac{1}{2}$. Dann kann das LGS weiter umgeformt werden zu

$$\begin{cases} y = \frac{2b+1}{2a+1} \\ x = b - ay \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{2b+1}{2a+1} \\ x = b - a\frac{2b+1}{2a+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{2b+1}{2a+1} \\ x = \frac{b-a}{2a+1} \end{cases}$$

Also ist dann $\mathbb{L} = \{(\frac{b-a}{2a+1}, \frac{2b+1}{2a+1})\}$.

Aufgabe 6. Man kann zunächst davon ausgehen, dass $a \neq 0$. Dann lautet die erste Gleichung umgeschrieben $x = \frac{e}{a} - \frac{b}{a}y$. Eingesetzt in die zweite Gleichung folgt $c(\frac{e}{a} - \frac{b}{a}y) + dy = f$ bzw. $(d - \frac{bc}{a})y = f - c\frac{e}{a}$ bzw. $\frac{ad-bc}{a}y = \frac{af-ec}{a}$ Diese Gleichung – und damit das LGS – ist genau dann lösbar, wenn $ad - bc \neq 0$. Der Ausdruck $ad - bc$ wird auch Determinante der Koeffizientenmatrix genannt.

Aufgabe 7. Die Gleichungsmatrix wird in Zeilenstufenform überführt:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & -1 & -2 & 1 & 7 \\ -1 & 3 & -2 & 3 & 2 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{II - 2I \\ III - I \\ IV - 4I \\ V + I}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & 3 & -4 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & -6 & 3 & -6 & -3 & 3 \\ 0 & 5 & -3 & 4 & 3 & -1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{II/(-5)}\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & -6 & 3 & -6 & -3 & 3 \\ 0 & 5 & -3 & 4 & 3 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{III+II \\ IV+6II \\ V-5II}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 & -\frac{3}{5} & -\frac{6}{5} & \frac{3}{5} & \frac{9}{5} \\ 0 & 0 & -\frac{3}{5} & -\frac{6}{5} & \frac{3}{5} & \frac{9}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{III\cdot(-\frac{5}{3})}\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{5} & -\frac{6}{5} & \frac{3}{5} & \frac{9}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{IV+\frac{3}{5}III} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\substack{I+III \\ II+\frac{3}{5}III}}\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{I-2II} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Die Lösungsmenge besteht aus allen $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ mit $x_1 = 2 + x_4$, $x_2 = -2 - 2x_4$,$x_3 = -3 - 2x_4 + x_5$ wobei $x_4 \in \mathbb{R}, x_5 \in \mathbb{R}$

Aufgabe 8. Es wird zu den Gleichungssystemen aus Aufgabe 1 jeweils die Gleichungsmatrix aufgestellt und in Zeilenstufenform überführt.

a) $$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{II-I} \left[\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -4 \end{array}\right] \xrightarrow{I-2II} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 12 \\ 0 & 1 & -4 \end{array}\right]$$

Die eindeutige Lösung ist $a_0 = 12, a_1 = -4$, also lautet die Funktion $f(x) = 12-4x$.

b) $$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 9 & 0 \\ 1 & 4 & 16 & -6 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{II-I \\ III-I}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & -4 \\ 0 & 2 & 12 & -10 \end{array}\right] \xrightarrow{III-2II} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{III/2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{I-4III \\ 2-5III}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{I-2II} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

Die eindeutige Lösung ist $a_0 = 6, a_1 = 1, a_2 = -1$, also lautet die Funktion $f(x) = 6 + x - x^2$.

c) $$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 6 & 1 \\ 1 & 5 & 25 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{III-I} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 6 & 1 \\ 0 & 5 & 25 & -5 \end{array}\right] \xrightarrow{III-5II} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & -10 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{III/(-5)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{II-6III} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -11 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

Die eindeutige Lösung ist $a_0 = 5, a_1 = -11, a_2 = 2$, also lautet die Funktion $f(x) = 5 - 11x + 2x^2$.

d) $$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 16 & 64 & 0 \\ 0 & 1 & 8 & 48 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 24 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 16 \end{array}\right] \xrightarrow{IV-I} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 16 & 64 & 0 \\ 0 & 1 & 8 & 48 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 24 & 0 \\ 0 & -4 & -16 & -64 & 16 \end{array}\right] \xrightarrow{IV+4II} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 16 & 64 & 0 \\ 0 & 1 & 8 & 48 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 24 & 0 \\ 0 & 0 & 16 & 128 & 32 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{III/2}\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 16 & 64 & 0 \\ 0 & 1 & 8 & 48 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 16 & 128 & 32 \end{array}\right] \xrightarrow{IV-16III}\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 16 & 64 & 0 \\ 0 & 1 & 8 & 48 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -64 & 32 \end{array}\right] \xrightarrow{IV/(-64)}\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 16 & 64 & 0 \\ 0 & 1 & 8 & 48 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[III-12IV]{\substack{I-64IV \\ II-48IV}}\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 16 & 0 & 32 \\ 0 & 1 & 8 & 0 & 28 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{array}\right] \xrightarrow[II-8III]{I-16III}\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 0 & 0 & -64 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -20 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{array}\right] \xrightarrow{I-4II}\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 16 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -20 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{array}\right]$$

Die eindeutige Lösung ist $a_0 = 16, a_1 = -20, a_2 = 6, a_3 = -1/2$, also lautet die Funktion $f(x) = 16 - 20x + 6x^2 - \frac{1}{2}x^3$.

Aufgabe 9.

a) $\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & t \\ -4 & -2 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{I \to \left(\frac{1}{2}\right) I} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{t}{2} \\ -4 & -2 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{II + (4)\, I} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{t}{2} \\ 0 & 0 & 2t+3 \end{array}\right].$

Das LGS ist lösbar genau dann, wenn $2t + 3 = 0$, d.h. $t = -\frac{3}{2}$ Die Lösungsmenge besteht dann aus allen (x, y), welche die Gleichung $x = -\frac{3}{4} - \frac{1}{2}y$ lösen.

b) $\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & t \\ -4 & t & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{I/2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{t}{2} \\ -4 & t & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{II+4I} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{t}{2} \\ 0 & t+2 & 2t+3 \end{array}\right]$

Für $t \neq -2$ ist das Gleichungssystem eindeutig lösbar mit $y = \frac{3+2t}{2+t}$ und $x = \frac{t}{2} - \frac{1}{2}y = \frac{-3+t^2}{2(2+t)}$. Für $t = -2$ ist das Gleichungssystem unlösbar.

Aufgabe 10. Löst man die erste Gleichung nach x auf, so erhält man $x = -2y + 4z + 3/2$. Substituiert man dies in die zweite Gleichung, so folgt $6(-2y+4z+3/2)+2y+2z = 15$, d.h. $0x - 10y + 26z = 6$.

Subtrahiert man andererseits im Ausgangs-LGS das dreifache der ersten von der zweiten Gleichung, so erhält man $-10y + 26y = 6$, also dieselbe Gleichung.

Das Substitutionsverfahren ist hier (aber auch in anderen LGS) also nur eine spezielle Variante des Additionsverfahrens.

Beim Gleichsetzungsverfahren werden beide Gleichungen z.B. nach x aufgelöst: $x = -2y+4z+3/2$ und $x = -\frac{1}{3}y - \frac{1}{3}z + \frac{5}{2}$. Beim Gleichsetzen ergibt sich $-2y+4z+3/2 = -\frac{1}{3}y - \frac{1}{3}z + \frac{5}{2} \Leftrightarrow -6y + 12z + \frac{9}{2} = -y - z + \frac{15}{2} \Leftrightarrow -5y + 13z = 3$. Die gewonnene Gleichung ist bis auf eine multiplikative Konstante ebenfalls die durch Subtraktion entstandene. Auch das Gleichsetzungsverfahren entspricht also der Anwendung des Additionsverfahrens.

Aufgabe 11.

a) Zunächst wird die Gleichung nach x_1 aufgelöst:

$$2x_1 + 4x_2 = 5 \Leftrightarrow x_1 = \frac{5}{2} - 2x_2$$

Damit $x_1, x_2 \geq 0$ sind, muss dann gelten $x_2 \geq 0$ und $x_2 \leq \frac{5}{4}$. x_1 wird nun durch x_2 in der Zielfunktion substituiert:

$$3x_1 + 5x_2 = 3(\frac{5}{2} - 2x_2) + 5x_2 = \frac{15}{2} - x_2$$

$3x_1 + 5x_2$ wird also maximal (minimal), wenn x_2 minimal (maximal) innerhalb des zulässigen Bereichs $[0; \frac{5}{4}]$ ist.

Für $x_2 = 0$ und $x_1 = \frac{5}{2}$ wird also der maximale Wert $\frac{15}{2}$, für $x_2 = \frac{5}{4}$, $x_1 = 0$ hingegen der minimale Wert $\frac{25}{4}$ erreicht.

b) Auch hier wird die Gleichung nach x_1 aufgelöst:

$$4x_1 - tx_2 = 3 \Leftrightarrow x_1 = \frac{3}{4} + \frac{t}{4}x_2$$

Der für x_1 gewonnene Term wird in den Zielwert substituiert:

$$2x_1 + tx_2 = 2(\frac{3}{4} + \frac{t}{4}x_2) + tx_2 = \frac{3}{2} + \frac{3t}{2}x_2$$

Man kann jetzt drei Fälle unterscheiden:

– Wenn $t = 0$, so ist der Zielwert stets $\frac{3}{2}$ und wird für $x_1 = \frac{3}{4}$ und beliebiges $x_2 \geq 0$ angenommen. Maximum und Minimum stimmen hier also überein.

– Wenn $t < 0$, so wird der Zielwert minimal (maximal), wenn x_2 maximal (minimal) wird. Aus der Gleichung $x_1 = \frac{3}{4} + \frac{t}{4}x_2$ und $x_1 \geq 0$ folgt aber $0 \leq \frac{3}{4} + \frac{t}{4}x_2 \Leftrightarrow \frac{t}{4}x_2 \geq -\frac{3}{4} \Leftrightarrow x_2 \leq -\frac{3}{t}$ (beachten Sie, dass sich das Ungleichheitszeichen durch die Multiplikation mit $\frac{4}{t} < 0$ umkehrt). Für $x_2 = 0, x_1 = \frac{3}{4}$ liegt dann der maximale Zielwert $\frac{3}{2}$, für $x_1 = 0, x_2 = -\frac{3}{t}$ der minimale Zielwert -3 vor.

– Wenn $t > 0$, so wird der Zielwert minimal (maximal), wenn x_2 minimal (maximal) wird. Das ergibt für $x_2 = 0, x_1 = \frac{3}{4}$ den minimalen Zielwert $\frac{3}{4}$. Einen Maximalwert gibt es nicht, da x_2 und damit auch der Zielwert beliebig groß werden kann .

c) Zunächst wird das LGS mit dem Gauß'schen Eliminationsverfahren gelöst, d.h. die zugehörige Gleichungsmatrix in ZSF gebracht:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & 3 & 6 \\ 4 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{9} & \frac{7}{9} \\ 0 & 1 & \frac{5}{9} & \frac{8}{9} \end{array}\right]$$

Die Variablen x_1, x_2 lassen sich also mit Hilfe von x_3 darstellen

$$x_1 = \frac{7}{9} - \frac{1}{9}x_3 \quad , \quad x_2 = \frac{8}{9} - \frac{5}{9}x_3$$

und in der Zielfunktion substituieren:

$$3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 3(\frac{7}{9} - \frac{1}{9}x_3) - 2(\frac{8}{9} - \frac{5}{9}x_3) + 5x_3 = \frac{5}{9} + \frac{52}{9}x_3$$

Der Zielwert wird also maximal (minimal), wenn x_3 maximal (minimal) wird.

Aus den Darstellungen von x_1, x_2 mittels x_3 folgt wegen $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$, dass

$$\frac{7}{9} - \frac{1}{9}x_3 \geq 0 \Leftrightarrow x_3 \leq 7 \quad , \quad \frac{8}{9} - \frac{5}{9}x_3 \geq 0 \Leftrightarrow x_3 \leq \frac{8}{5}$$

d.h. es muss gelten $0 \leq x_2 \leq \frac{8}{5}$. Für $x_3 = 0$ erhält man den minimalen Zielwert $\frac{5}{9}$, für $x_3 = \frac{8}{5}$ den maximalen Zielwert $\frac{49}{5}$.

d) Es wird wie in der vorangegangenen Teilaufgabe verfahren:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & -3 & 6 \\ 4 & 1 & -1 & 4 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{9} & \frac{7}{9} \\ 0 & 1 & -\frac{5}{9} & \frac{8}{9} \end{array}\right]$$

x_1, x_2 lassen sich wieder durch x_3 substituieren

$$x_1 = \frac{7}{9} + \frac{1}{9}x_3 \geq 0 \Leftrightarrow x_3 \geq -7$$
$$x_2 = \frac{8}{9} + \frac{5}{9}x_3 \geq 0 \Leftrightarrow x_3 \geq -\frac{8}{5}$$

x_1, x_2 werden wieder in der Zielfunktion substituiert:

$$3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 3(\frac{7}{9} + \frac{1}{9}x_3) - 2(\frac{8}{9} + \frac{5}{9}x_3) + 5x_3 = \frac{5}{9} + \frac{38}{9}x_3$$

Minimal wird dieser Ausdruck für $x_3 = 0, x_1 = \frac{7}{9}, x_2 = \frac{8}{9}$. Der Zielwert ist dann $\frac{5}{9}$. Nach oben ist der Ausdruck unbeschränkt, weil auch x_3 beliebig groß werden kann.

e) Es wird wie in der vorangegangenen Teilaufgabe verfahren:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -5 & -3 & 6 \\ 4 & -1 & -1 & 4 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{9} & \frac{7}{9} \\ 0 & 1 & \frac{5}{9} & -\frac{8}{9} \end{array}\right]$$

x_1, x_2 lassen sich wieder durch x_3 substituieren

$$x_1 = \frac{7}{9} + \frac{1}{9}x_3 \geq 0 \Leftrightarrow x_3 \geq -7$$
$$x_2 = -\frac{8}{9} - \frac{5}{9}x_3 \geq 0 \Leftrightarrow x_3 \leq -\frac{8}{5}$$

Da aber nicht gleichzeitig $x_3 \geq 0$ sein kann, hat das LGS keine Lösung mit $x_j \geq 0$, also gibt es auch kein Minimum und Maximum.

f) Es wird wieder zunächst das LGS gelöst:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 5 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & 1 \end{array}\right]$$

Lösung für x_1, x_2, x_3 ist

$$x_1 = 2 + x_4 \geq 0 \Leftrightarrow x_4 \geq -2$$
$$x_2 = \frac{2}{3}x_4 \geq 0 \Leftrightarrow x_4 \geq 0$$
$$x_3 = 1 - \frac{1}{3}x_4 \geq 0 \Leftrightarrow x_3 \leq 3$$

x_1, x_2, x_3 werden jetzt in der Zielfunktion substituiert:

$$5x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 5(2 + x_4) - (\frac{2}{3}x_4) + (1 - \frac{1}{3}x_4) + 2x_4 = 11 + 6x_4$$

Minimal wird dieser Ausdruck für minimales x_4, also für $x_4 = 0, x_1 = 2, x_2 = 0, x_3 = 1$ mit Zielwert 11. Maximal wird dieser Ausdruck für maximales x_4, also aufgrund der obigen Ungleichungen für $x_4 = 3, x_1 = 5, x_2 = 2, x_3 = 0$ mit Zielwert 29.

Aufgabe 12. Der Engpass ist sowohl durch die erste als auch durch die dritte Gleichung gegeben. Die nächste Umformung kann z.B. lauten:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 30 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -2 & 40 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & 30 \end{array}\right] \xrightarrow[]{I-III \quad II+2III} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 100 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & 30 \end{array}\right]$$

Die spezielle Lösung lautet nun $x_1 = 0$, $x_2 = 100$, $x_5 = 30$ und $x_3 = x_4 = 0$. Sie liefert den Deckungsbeitrag 12000 und ist ebenfalls optimal, denn die reduzierte Deckungsbeitragsfunktion zu dieser Gleichungsmatrix lautet $65(x_3 + 2x_4) + 120(100 - 2x_3 - 3x_4) + 170x_3 + 230x_4 = 12000 - 5x_4$. An dieser Form erkennt man, dass mit $x_4 = 0$ und beliebigem Wert für x_3 die Optimallösung realisiert wird, also z.B. auch für $x_3 = 0$.

Aufgabe 13. Gleichungsmatrix und Umformungen zur Zeilenstufenform lauten

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1440 \\ 1 & 0 & 3 & 2 & 1 & 0 & 2160 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & 4 & 1080 \end{array}\right] \xrightarrow{-I+II+III,\ \text{dann Zeilenvertauschungen}} \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 3 & 2 & 1 & 0 & 2160 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & 4 & 1080 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 4 & 4 & 1800 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{I-III,\ \text{dann}\ III/3} \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & -3 & -4 & 360 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & 4 & 1080 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{4}{3} & \frac{4}{3} & 600 \end{array}\right]$$

Die Lösungsmenge besteht aus allen $(x_1, \ldots, x_6) \in [0; \infty[^6$ mit $x_1 = 360 + x_4 + 3x_5 + 4x_6$, $x_2 = 1080 - x_4 - 3x_5 - 4x_6$, $x_3 = 600 - x_4 - \frac{4}{3}x_5 - \frac{4}{3}x_6$.

Eine spezielle Lösung ist $x_1 = 360$, $x_2 = 1080$, $x_3 = 600$, $x_4 = x_5 = x_6 = 0$. Diese benötigt 2040 Rollen. Substitution der Pivot-Variablen in der Verschnittfunktion ergibt

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 2040 + 0x_4 - \frac{1}{3}x_5 - \frac{1}{3}x_6$$

Jede Einführung eines der Schnittmuster x_5, x_6 verringert den Verschnitt. Beispielsweise könnte man Schnittmuster 5 maximal 360mal verwenden. Für $x_5 = 360$, $x_4 = x_6 = 0$ ergibt sich $x_1 = 1440$, $x_2 = 0$, $x_3 = 330$ und ein Verschnitt von 1920 Rollen. Einführung des Schnittmusters 4 ändert den Verschnitt nicht.

Aufgabe 14. Es wird das Gauß-Verfahren ausgeführt. Auf der rechten Seite müssen dabei lineare Terme in a, b, c verwaltet werden.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & a \\ 2 & -1 & 5 & b \\ 0 & 2 & -5 & c \end{array}\right] \xrightarrow{II + (-2)\,I} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & a \\ 0 & -3 & 7 & b - 2a \\ 0 & 2 & -5 & c \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{II \to \left(-\frac{1}{3}\right) II} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & a \\ 0 & 1 & -\frac{7}{3} & \frac{1}{3}(2a - b) \\ 0 & 2 & -5 & c \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{III+(-2)\,II}\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & a \\ 0 & 1 & -\frac{7}{3} & \frac{1}{3}(2a-b) \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{4a}{3}+\frac{2b}{3}+c \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{III\to(-3)\,III}\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & a \\ 0 & 1 & -\frac{7}{3} & \frac{1}{3}(2a-b) \\ 0 & 0 & 1 & 4a-2b-3c \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\substack{I+(1)\,III \\ II+\left(\frac{7}{3}\right)III}}\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 5a-2b-3c \\ 0 & 1 & 0 & 10a-5b-7c \\ 0 & 0 & 1 & 4a-2b-3c \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{I+(-1)\,II}\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -5a+3b+4c \\ 0 & 1 & 0 & 10a-5b-7c \\ 0 & 0 & 1 & 4a-2b-3c \end{array}\right]$$

Lösung ist also $x_1 = -5a+3b+4c, x_2 = 10a-5b-7c, x_3 = 4a-2b-3c$

Aufgabe 15. Die Gleichungsmatrix wird ähnlich wie im Regalbeispiel anhand der Verflechtungstabelle aufgestellt und in eine Basisform gebracht (möglich, aber aufwändiger wäre die Bestimmung der ZSF)

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 13 & 12 & 2 & 8 & 29 & 7300 \\ 6 & 3 & 10 & 5 & 16 & 3200 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 3 & 600 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 5 & 200 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & 5 & 400 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{I+(-13)\,V \\ II+(-6)\,V \\ III+(-1)\,V \\ IV+(-1)\,V}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 12 & -24 & -18 & -36 & 2100 \\ 0 & 3 & -2 & -7 & -14 & 800 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -2 & 200 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -200 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & 5 & 400 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\substack{I+(-12)\,III \\ II+(-3)\,III}}\left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 0 & -6 & -12 & -300 \\ 0 & 0 & 4 & -4 & -8 & 200 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -2 & 200 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -200 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & 5 & 400 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{II\to\left(\frac{1}{4}\right)II}\left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 0 & -6 & -12 & -300 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 50 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -2 & 200 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -200 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & 5 & 400 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\substack{III+(2)\,II \\ IV+(2)\,II \\ V+(-2)\,II}}\left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 0 & -6 & -12 & -300 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 50 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -6 & 300 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -4 & -100 \\ 1 & 0 & 0 & 4 & 9 & 300 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{I\to\left(-\frac{1}{6}\right)I}\left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 50 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 50 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -6 & 300 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -4 & -100 \\ 1 & 0 & 0 & 4 & 9 & 300 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{c} II + (1)\, I \\ III + (3)\, I \\ IV + (2)\, I \\ V + (-4)\, I \\ \longrightarrow \end{array} \left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 50 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 100 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 450 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 100 \end{array}\right]$$

Die Variablen x_A, x_B, x_C, x_D lassen sich dann mittels x_E substituieren:

$$x_A = 100 - x_E, x_B = 450, x_C = 100, x_D = 50 - 2x_E$$

a) Wir substituieren x_A, x_B, x_C, x_D in der Zielfunktion:

$$\begin{aligned} & 44,00x_A + 24,99x_B + 44,99x_C + 44,99x_D + 149,99x_E \\ =& 44,00(100 - x_E) + 24,99 \cdot 450 + 44,99 \cdot 100 + 44,99(50 - 2x_E) + 149,99x_E \\ =& 22494 + 15,02x_E \end{aligned}$$

Maximal wird der Umsatz, wenn x_E maximal wird. Aus den Bestimmungsgleichungen für die übrigen Variablen bekommt man für x_E den Engpass $x_E \leq 25$. Der maximale Umsatz wird daher für $x_E = 25$ erzielt und beträgt 22868,50 Euro. Die optimale Lösung ist also $x_A = 25, x_B = 450, x_C = 100, x_D = 0, x_E = 25$.

Kapitel 2

Aufgabe 1.

a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2 \\ 2+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-1 \\ 3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) Dieser Ausdruck kann nicht gebildet werden, weil a ein Spaltenvektor und b^T ein Zeilenvektor ist (selbst wenn die beiden gleich viele Komponenten haben).

d) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}^T + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}^T = (1|2) + (2|3) = (1+2|2+3) = (3|5)$

e) $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}^T - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}^T = (2|3) - (1|2) = (2-1|3-2) = (1|1)$

f) Dieser Ausdruck kann nicht gebildet werden, weil a und c unterschiedlich viele Komponenten haben.

g) Dieser Ausdruck kann nicht gebildet werden weil d^T ein Zeilenvektor und c ein Spaltenvektor ist.

h) $2\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 2 - 2\cdot 1 \\ 2\cdot 3 - 2\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

Alternativ mit Distributivgesetz: $2\ b - 2\ a = 2(b-a) = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

i) $3a + 3b = 3(a+b) = 3\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 15 \end{pmatrix}$

j) $3c + 2c = (3+2)c = 5\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\10\\15\end{pmatrix}$

k) Dieser Ausdruck ist nicht möglich, da der erste Summand ein Spaltenvektor und der zweite ein Zeilenvektor ist.

l) $3c + 4\alpha_1 d = 3c + 12d = 3\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + 12\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\cdot 1 + 12\cdot 2\\3\cdot 2 + 12\cdot 3\\3\cdot 3 + 12\cdot 4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}27\\42\\57\end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix}9\\14\\19\end{pmatrix}$

Aufgabe 2. Erster Ansatz: Man berechne zunächst, wieviel alle 5000000 Kunden insgesamt zahlen und teile durch die Gesamtzahl der Kunden:

$$3.000.000 \cdot 12,5 + 500.000 \cdot 10,5 + 900.000 \cdot 12,0 + 600.000 \cdot 11 = 60.150.000$$

Daraus ergibt sich dann der Durchschnittspreis $60.150.000/5.000.000 = 12,03$.

Zweiter Ansatz: Wenn man schon in jedem Summanden durch die Gesamtzahl der Kunden teilt, darf man auch die Tarifpreise direkt mit den relativen Kundenanzahlen multiplizieren: $12,5 \cdot \frac{3}{5} + 10,5 \cdot \frac{1}{10} + 12 \cdot \frac{9}{50} + 11 \cdot \frac{3}{25} = 12,03$. Es handelt sich hier um das später noch behandelte Skalarprodukt des Tarifvektors mit dem Anteilsvektor.

Aufgabe 3. Die angegebene Menge sei jeweils mit $\mathbb{L}$ bezeichnet. Es wird geprüft, ob die Anforderungen

[1] $\bar{0} \in \mathbb{L}$

[2] Wenn $x, y \in \mathbb{L}$, dann auch $x + y \in \mathbb{L}$.

[3] Wenn $x \in \mathbb{L}$, dann auch $\alpha x \in \mathbb{L}$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$.

an einen $\mathbb{R}$-Vektorraum erfüllt sind. Sobald eine der drei Forderungen nicht erfüllt ist, kann man ausschließen, dass es sich bei $\mathbb{L}$ um einen Vektorraum handelt.

a) Für $t = 0$ ist $\mathbb{L}$ die Menge aller Vektoren $(x_1, x_2)^T$ mit $x_1 + 2x_2 = 0$. Wir prüfen die drei Anforderungen einen Vektorraum:

   [1] $(0,0)^T$ liegt in $\mathbb{L}$, denn $0 + 2 \cdot 0 = 0$, d.h. der Nullvektor erfüllt die Forderung, die an Vektoren aus $\mathbb{L}$ gestellt wird.

   [2] Sind $(x_1, x_2)^T$ und $(y_1, y_2)^T$ zwei Vektoren aus $\mathbb{L}$, so gelten die Gleichungen $x_1 + 2x_2 = 0$, $y_1 + 2y_2 = 0$. Dann gilt auch $(x_1 + y_1) + 2(x_2 + y_2) = x_1 + 2x_2 + y_1 + 2y_2 = 0$, d.h. der Vektor $(x_1 + y_1, x_2 + y_2)^T$ erfüllt die Forderung an einen Vektor aus $\mathbb{L}$.

   [3] Ist $(x_1, x_2)^T$ ein Vektor aus $\mathbb{L}$ und $\alpha \in \mathbb{R}$, so gilt $x_1 + 2x_2 = 0$ und daher auch $(\alpha x_1) + 2(\alpha x_2) = \alpha(x_1 + 2x_2) = 0$, d.h. auch $\alpha(x_1, x_2)^T = (\alpha x_1, \alpha x_2)^T$ erfüllt die Forderung an einen Vektor in $\mathbb{L}$.

   Für $t \neq 0$ liegt der der Nullvektor $(0,0)^T$ nicht in $\mathbb{L}$, denn $0 + 2 \cdot 0 = 0 \neq t$. Dann ist $\mathbb{L}$ kein $\mathbb{R}$-Vektorraum.

b) Wir formen die Bedingungsgleichung mittels quadratischer Ergänzung zunächst um: $x_1^2 - 2tx_1x_2 + x_2^2 = 0 \Leftrightarrow x_1^2 - 2tx_1x_2 + t^2x_2^2 = (t^2-1)x_2^2 \Leftrightarrow (x_1 - tx_2)^2 = (t^2-1)x_2^2$. Dann kann man drei Fälle unterscheiden:

   – Wenn $t^2 = 1$, d.h. $t = \pm 1$, so lautet die Bestimmungsgleichung für Vektoren aus $\mathbb{L}$ gerade $(x_1 - tx_2)^2 = 0 \Leftrightarrow x_1 - tx_2 = 0$. Dass es sich bei $\mathbb{L}$ um einen Vektorraum handelt, leitet man dann genau auf die gleiche Art und Weise her wie in der letzten Teilaufgabe.

[1] $(0,0)^T$ in $\mathbb{L}$, denn $0 - t \cdot 0 = 0$

[2] Wenn $(x_1, x_2)^T \in \mathbb{L}$ und $(y_1, y_2)^T \in \mathbb{L}$, dann gilt $(x_1 + y_1) - t(x_2 + y_2) = x_1 - tx_2 + y_2 - ty_2 = 0 + 0 = 0$, also auch $(x_1 + y_1, x_2 + y_2)^T \in \mathbb{L}$

[3] Wenn $(x_1, x_2)^T \in \mathbb{L}$ und $\alpha \in \mathbb{R}$, dann gilt $(\alpha x_1) - t(\alpha x_2) = \alpha(x_1 - tx_2) = \alpha \cdot 0 = 0$, also auch $\alpha(x_1, x_2)^T = (\alpha x_1, \alpha x_2)^T \in \mathbb{L}$.

– Wenn $t^2 < 1$, dann erfüllt nur der Vektor $(0,0)^T$ die Gleichung $(x_1 - tx_2)^2 = (t^2 - 1)x_2^2$, denn die linke Seite der Gleichung ist – mit Ausnahme von $x_2 = 0$ und $x_1 = tx_2 = 0$ – stets kleiner als Null, während die rechte größer oder gleich Null ist. Es ist dann $\mathbb{L} = \{(0,0)^T\}$ und dies ist ein Vektorraum.

– Wenn $t^2 > 1$, so erfüllt $\mathbb{L}$ auch die Anforderungen [1] und [3] an einen Vektorraum, nicht aber die Eigenschaft [2], dass die Summe zweier Vektoren aus $\mathbb{L}$ wieder in $\mathbb{L}$ liegt. Dazu genügt es, zwei spezielle Vektoren $(x_1, x_2)^T$ und $(y_1, y_2)^T$ anzugeben, so dass diese die Anforderung an $\mathbb{L}$ erfüllen, aber deren Summe nicht mehr. Solche Vektoren kann man finden, wenn man die Gleichung $(x_1 - tx_2)^2 = (t^2 - 1)x_2^2$ nach x_1 auflöst. Das ergibt

$$x_1 = tx_2 \pm \sqrt{t^2 - 1}\sqrt{x_2^2}$$

Daraus ergibt sich, dass z.B. $(t - \sqrt{t^2 - 1}, 1)^T$ und $(t + \sqrt{t^2 - 1}, 1)^T$ Vektoren in $\mathbb{L}$ sind. Ihre Summe $(2t, 2)^T$ liegt aber nicht in $\mathbb{L}$, denn $2(2t)^2 - 2t(2t)2 + 2^2 = 4 - 4t^2 = 4(1 - t^2) \neq 0$ (Beachten Sie, dass $t^2 > 1$).

c) $\mathbb{L}$ ist kein Vektorraum. Es sind zwar die Forderungen [1] und [3] erfüllt, nicht aber [2], denn z.B. die Vektoren $(1,1,1)^T$ und $(1,-1,-1)^T$ liegen in $\mathbb{L}$, nicht aber deren Summe $(2,0,0)$.

d) $\mathbb{L}$ ist kein Vektorraum. Es sind zwar die Forderungen [1] und [2] erfüllt, nicht aber [3], denn z.B. liegt $(1,0,0)^T$ in $\mathbb{L}$, nicht aber $\frac{1}{2}(1,0,0)^T = (\frac{1}{2}, 0, 0)^T$.

e) $\mathbb{L}$ ist ein Vektorraum:

[1] $(0,0,0,0,0)^T$ liegt in $\mathbb{L}$, denn $a(0-0) = 2 \cdot 0 + 0 + 0$ und $0 + a \cdot 0 = 2 \cdot 0 - 0$.

[2] Mit $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)^T$ und $y = (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5)^T$ liegt auch $x + y = (x_1 + y_1, \ldots, x_5 + y_5)^T$ in $\mathbb{L}$, denn

$$\begin{aligned}
a((x_3 + y_3) - (x_5 + y_5)) &= a(x_3 - x_5) + a(y_3 - y_5) \\
&= 2x_1 + x_2 + x_4 + 2y_1 + y_2 + y_4 \\
&= 2(x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) + (x_4 + y_4) \\
(x_1 + y_1) + a(x_3 + y_3) &= (x_1 + ax_3) + (y_1 + ay_3) \\
&= 2x_4 - x_5 + 2y_4 - y_5 \\
&= 2(x_4 + y_4) - (x_5 + y_5)
\end{aligned}$$

[3] Mit $x = (x_1, \ldots, x_5)^T \in \mathbb{L}$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ liegt auch $\alpha x = (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_5)^T$ in $\mathbb{L}$, denn

$$\begin{aligned}
a(\alpha x_3 - \alpha x_5) &= \alpha a(x_3 - x_5) \\
&= \alpha(2x_1 + x_2 + x_4) \\
&= 2(\alpha x_1) + (\alpha x_2) + (\alpha x_4) \\
(\alpha x_1) + a(\alpha x_3) &= \alpha(x_1 + ax_3) \\
&= \alpha(2x_4 - x_5) \\
&= 2(\alpha x_4) - (\alpha x_5)
\end{aligned}$$

Aufgabe 4.

[1] Die Nullfunktion $0 \mapsto 0$ hat die Rolle des Nullvektors. Sie ist differenzierbar

[2] Sind zwei Funktionen f, g differenzierbar, so auch ihre (Vektor-)Summe $f+g$ (Summenregel der Differentialrechnung).

[3] Ist eine Funktion f differenzierbar und $\alpha \in \mathbb{R}$, so ist auch αf eine differenzierbare Funktion (Faktorregel der Differentialrechnung).

Aufgabe 5. Es wird jeweils das zugehörige lineare Gleichungssystem aus den Spaltenvektoren gebildet und gelöst:

a) $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{II+(-3)\,I} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -7 \end{array}\right] \xrightarrow{II \to (-1)\,II} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 7 \end{array}\right] \xrightarrow{I+(-2)\,II} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & 7 \end{array}\right]$

Daraus ergibt sich die eindeutige LK $x = (-11)a^{(1)} + 7a^{(2)}$

b) $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 3 \\ 3 & t & t \end{array}\right] \xrightarrow{III-3I} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 3 \\ 0 & t-12 & t-9 \end{array}\right]$

Wenn jetzt $t = 12$, dann ist $t - 9 \neq 0$ und das LGS ist nicht lösbar. Dann gibt es also keine LK. Für $t \neq 12$ kann man weiter bis zur ZSF umformen:

$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 3 \\ 0 & t-12 & t-9 \end{array}\right] \xrightarrow{II/(t-12)} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & \frac{t-9}{t-12} \end{array}\right] \xrightarrow{I-4II} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{-t}{t-12} \\ 0 & 1 & \frac{t-9}{t-12} \end{array}\right]$ Dann gibt es genau eine LK, nämlich $x = (-\frac{t}{t-12} \cdot a^{(1)} + \frac{t-9}{t-12} \cdot a^{(2)}$

c) $\left[\begin{array}{ccc|c} -3 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{-\frac{1}{3}I} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{2}{3} & -1 & -\frac{5}{3} \\ 2 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{II-2I} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{2}{3} & -1 & -\frac{5}{3} \\ 0 & \frac{4}{3} & 5 & \frac{22}{3} \\ 0 & 2 & 3 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{(\frac{3}{4})\,II}$

$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{2}{3} & -1 & -\frac{5}{3} \\ 0 & 1 & \frac{15}{4} & \frac{11}{2} \\ 0 & 2 & 3 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{III-2II} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{2}{3} & -1 & -\frac{5}{3} \\ 0 & 1 & \frac{15}{4} & \frac{11}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{9}{2} & -9 \end{array}\right] \xrightarrow{-\frac{2}{9}III} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{2}{3} & -1 & -\frac{5}{3} \\ 0 & 1 & \frac{15}{4} & \frac{11}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$

$\xrightarrow[II+(-\frac{15}{4})\,III]{I+(1)\,III} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{I+(\frac{2}{3})\,II} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$

Die eindeutige LK ist $x = (-1)a^{(1)} + (-2)a^{(2)} + 2a^{(3)}$.

d) $\left[\begin{array}{cccc|c} -3 & 2 & 3 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 12 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{-\frac{1}{3}I} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -\frac{2}{3} & -1 & 0 & -\frac{5}{3} \\ 2 & 0 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 12 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{II-2I} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -\frac{2}{3} & -1 & 0 & -\frac{5}{3} \\ 0 & \frac{4}{3} & 5 & 1 & \frac{22}{3} \\ 0 & 2 & 3 & 12 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{3}{4}II}$

$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -\frac{2}{3} & -1 & 0 & -\frac{5}{3} \\ 0 & 1 & \frac{15}{4} & \frac{3}{4} & \frac{11}{2} \\ 0 & 2 & 3 & 12 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{III-2II} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -\frac{2}{3} & -1 & 0 & -\frac{5}{3} \\ 0 & 1 & \frac{15}{4} & \frac{3}{4} & \frac{11}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{9}{2} & \frac{21}{2} & -9 \end{array}\right] \xrightarrow{-\frac{2}{9}III}$

$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -\frac{2}{3} & -1 & 0 & -\frac{5}{3} \\ 0 & 1 & \frac{15}{4} & \frac{3}{4} & \frac{11}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{7}{3} & 2 \end{array}\right] \xrightarrow[II-\frac{15}{4}III]{I+III} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -\frac{2}{3} & 0 & -\frac{7}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{19}{2} & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{7}{3} & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{I+\frac{2}{3}II} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{19}{2} & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{7}{3} & 2 \end{array}\right]$

Es gibt mehrere Möglichkeiten für die LK, nämlich

$$x = (-1-4\alpha_4)a^{(1)} + (-2 - \frac{19}{2}\alpha_4)a^{(2)} + (2 + \frac{7}{3}\alpha_4)a^{(3)} + \alpha_4 a^{(4)}$$

wobei $\alpha_4 \in \mathbb{R}$ beliebig gewählt werden kann.

Aufgabe 6. Wir ersetzen die fehlende Koordinate durch eine Unbekannte und lesen die Lösbarkeit (bzw. ggf. auch noch die Lösung) aus der Staffelform (bzw. der ZSF) ab:

a) $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -6 & 5 \\ 3 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & t \end{array}\right] \xrightarrow[III-1I]{II-3I} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -6 & 5 \\ 0 & 16 & -11 \\ 0 & 7 & t-5 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{1}{16}II} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -6 & 5 \\ 0 & 1 & -\frac{11}{16} \\ 0 & 7 & t-5 \end{array}\right] \xrightarrow{III-7II} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -6 & 5 \\ 0 & 1 & -\frac{11}{16} \\ 0 & 0 & t-\frac{3}{16} \end{array}\right]$

$\xrightarrow{I+6II} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{7}{8} \\ 0 & 1 & -\frac{11}{16} \\ 0 & 0 & t-\frac{3}{16} \end{array}\right]$

Aus der Staffelform erkennt man schon, dass die LK nur möglich ist (und dann eindeutig) für $t = \frac{3}{16}$. Aus der ZSF erkennt man, dass die LK dann $x = \frac{7}{8}a^{(1)} - \frac{11}{16}a^{(2)}$ lautet.

b) Wir bringen das LGS in eine der ZSF ähnliche Form, vermeiden dabei aber Zeilenvertauschungen:

$\left[\begin{array}{cc|c} 0 & -6 & 5 \\ 4 & t & 4 \\ -2 & 1 & s \end{array}\right] \xrightarrow{-\frac{1}{2}III} \left[\begin{array}{cc|c} 0 & -6 & 5 \\ 4 & t & 4 \\ 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{s}{2} \end{array}\right] \xrightarrow{II-4III} \left[\begin{array}{cc|c} 0 & -6 & 5 \\ 0 & t+2 & 2(s+2) \\ 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{s}{2} \end{array}\right] \xrightarrow{-\frac{1}{6}I}$

$\left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & -\frac{5}{6} \\ 0 & t+2 & 2(s+2) \\ 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{s}{2} \end{array}\right] \xrightarrow[III+\frac{1}{2}I]{II-(t+2)I} \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & -\frac{5}{6} \\ 0 & 0 & 2s+\frac{5t}{6}+\frac{17}{3} \\ 1 & 0 & \frac{1}{12}(-6s-5) \end{array}\right]$

Das LGS ist (dann eindeutig) lösbar genau dann, wenn die mittlere Zeile nur Nulleinträge hat, d.h. wenn $2s + \frac{5}{6}t + \frac{17}{3} = 0$, also für $s = -\frac{5}{12}t - \frac{17}{6}$. Die LK ist dann $x = (-\frac{6s+5}{12})a^{(1)} + (-\frac{5}{6})a^{(2)}$.

Aufgabe 7. Es wird jeweils für einen Vektor $x = (x_1, x_2, x_3)^T$ bzw. $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$ geprüft, ob sich dieser als LK der angegebenen beiden Vektoren $a^{(1)}$, $a^{(2)}$ darstellen lässt. Dazu wird ein LGS aufgestellt, dessen rechte Seite aus dem Vektor x besteht. Mit Zeilenumformungen bis zur Staffelform (bzw. Zeilenstufenform) bzw. vergleichbar einfachen Form erhält man auf der rechten Seite schließlich lineare Terme in x_1, x_2, x_3, x_4, die z.T. gleich Null sein müssen, damit x darstellbar ist. Dies ergibt die gesuchten homogenen linearen Gleichungen:

a) $\left[\begin{array}{cc|c} -3 & 0 & x_1 \\ 2 & -4 & x_2 \\ -5 & 1 & x_3 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{1}{2}II} \left[\begin{array}{cc|c} -3 & 0 & x_1 \\ 1 & -2 & \frac{x_2}{2} \\ -5 & 1 & x_3 \end{array}\right] \xrightarrow[III+5II]{I+3II} \left[\begin{array}{cc|c} 0 & -6 & x_1+\frac{3x_2}{2} \\ 1 & -2 & \frac{x_2}{2} \\ 0 & -9 & \frac{5x_2}{2}+x_3 \end{array}\right] \xrightarrow{-\frac{1}{6}I}$

$\left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & -\frac{x_1}{6}-\frac{x_2}{4} \\ 1 & -2 & \frac{x_2}{2} \\ 0 & -9 & \frac{5x_2}{2}+x_3 \end{array}\right] \xrightarrow[III+9I]{II+2I} \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & -\frac{x_1}{6}-\frac{x_2}{4} \\ 1 & 0 & -\frac{x_1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4}(-6x_1+x_2+4x_3) \end{array}\right]$

Der Vektor x ist darstellbar genau dann, wenn $-6x_1 + x_2 + 4x_3 = 0$.

b) $\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & x_1 \\ 1 & 2 & x_2 \\ -5 & -1 & x_3 \\ 4 & 1 & x_4 \end{array}\right] \xrightarrow{I \leftrightarrow II} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x_2 \\ 2 & 3 & x_1 \\ -5 & -1 & x_3 \\ 4 & 1 & x_4 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{III+5I \\ IV-4I}]{II-2I} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x_2 \\ 0 & -1 & x_1-2x_2 \\ 0 & 9 & 5x_2+x_3 \\ 0 & -7 & x_4-4x_2 \end{array}\right] \xrightarrow{-II}$

$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x_2 \\ 0 & 1 & 2x_2-x_1 \\ 0 & 9 & 5x_2+x_3 \\ 0 & -7 & x_4-4x_2 \end{array}\right] \xrightarrow[IV+7II]{III-9II} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x_2 \\ 0 & 1 & 2x_2-x_1 \\ 0 & 0 & 9x_1-13x_2+x_3 \\ 0 & 0 & -7x_1+10x_2+x_4 \end{array}\right] \xrightarrow{I-2II}$

$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2x_1-3x_2 \\ 0 & 1 & 2x_2-x_1 \\ 0 & 0 & 9x_1-13x_2+x_3 \\ 0 & 0 & -7x_1+10x_2+x_4 \end{array}\right]$

x ist LK von $a^{(1)}, a^{(2)}$ genau dann, wenn das zugehörige LGS lösbar ist, d.h. wenn $9x_1 - 13x_2 + x_3 = 0 = -7x_1 + 10x_2 + x_4$. Dann lautet die (eindeutige) LK $x = (2x_1 - 3x_2)a^{(1)} + (2x_2 - x_1)a^{(2)}$.

Aufgabe 8. Ein System von Vektoren ist genau dann l.u., wenn sich der Nullvektor auf genau eine Art linear aus ihnen kombinieren lässt, d.h. wenn das zugehörige homogene LGS genau eine Lösung hat. Wir stellen jeweils dieses LGS auf und führen es bis zur Staffelform, aus der sich die Eindeutigkeit erkennen lässt – nämlich dann, wenn keine Nichtpivotspalten vorhanden sind (anderenfalls ist das System l.a.).

a) $$\left[\begin{array}{ccc|c} -3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 1 & 0 \\ -5 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{-\frac{1}{3}I} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 2 & -4 & 1 & 0 \\ -5 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[III+5I]{II-2I} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -4 & \frac{5}{3} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{3} & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{II \leftrightarrow III}$$
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{3} & 0 \\ 0 & -4 & \frac{5}{3} & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{III+4II} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{-\frac{1}{5}III} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Es liegen nur Pivotspalten vor, deshalb sind die Vektoren l.u.

b) $$\left[\begin{array}{ccc|c} -3 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & -4 & -10 & 0 \\ -5 & 1 & 7 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{-\frac{1}{3}I} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & -4 & -10 & 0 \\ -5 & 1 & 7 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[III+5I]{II-2I} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & -8 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{II \leftrightarrow III}$$
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & -8 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{III+4II} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Es liegt eine Nichtpivotspalte vor, also sind die Vektoren l.a.

c) $$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & t & 2 & 0 \\ 3 & 1 & t & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[III-3I]{II-2I} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & t & -2 & 0 \\ 0 & 1 & t-6 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{II \leftrightarrow III} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & t-6 & 0 \\ 0 & t & -2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{III-tII}$$
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & t-6 & 0 \\ 0 & 0 & -2-(t-6)t & 0 \end{array}\right]$$

Es liegt genau eine Nichtpivotspalte vor, wenn $-2-(t-6)t = 0$. Das ist der Fall für $t = 3 \pm \sqrt{7}$. Also sind die Vektoren für $t = 3 \pm \sqrt{7}$ l.a. und anderenfalls l.u.

Aufgabe 9.

a) Man muss zeigen, dass aus $\alpha_1(sa^{(1)}) + \alpha_2(ta^{(2)}) = \bar{0}$ folgt $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Es gilt aber schon $\alpha_1 s = \alpha_2 t = 0$, weil $a^{(1)}, a^{(2)}$ linear unabhängig sind, und damit $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Deshalb sind $sa^{(1)}$ und $ta^{(2)}$ l.u.

b) Aus $\alpha_1 a^{(1)} + \alpha_2(a^{(1)} + a^{(2)}) = \bar{0}$ folgt $\bar{0} = (\alpha_1 + \alpha_2)a^{(1)} + \alpha_2 a^{(2)}$, d.h., weil $a^{(1)}, a^{(2)}$ linear unabhängig sind, also $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha_2 = 0$. Damit ist auch $\alpha_1 = 0$. Deshalb sind $a(1)$ und $a^{(1)} + a^{(2)}$ l.u.

c) Aus $\alpha_1 a^{(1)} + \alpha_2(sa^{(1)} + ta^{(2)}) = \bar{0}$ folgt $(\alpha_1 + s\alpha_2)a^{(1)} + t\alpha_2 a^{(2)} = \bar{0}$. Weil $a^{(1)}, a^{(2)}$ l.u. sind, folgt daraus $\alpha_1 + s\alpha_2 = 0 = t\alpha_2$. Wegen $t \neq 0$ folgt daraus $\alpha_2 = 0$ und damit letztlich $\alpha_1 + s \cdot 0 = 0$, also $\alpha_1 = 0$. Daher sind auch $a^{(1)}$ und $sa^{(1)} + ta^{(2)}$ l.u.

Aufgabe 10. Es wird jeweils aus den Spaltenvektoren eine Matrix gebildet und in Staffelform (bzw. Zeilenstufenform) überführt. Eine mögliche Basis bekommt man dann, indem man diejenigen Vektoren auswählt, die zu Pivotspalten in der Staffelform korrespondieren:

a) $$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 6 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{II+(-2)\,I} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -3 & 12 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{II \to (-\frac{1}{3})\,II} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & -1 \end{bmatrix}$$

Die ersten beiden Spalten sind Pivotspalten, also ist eine mögliche Basis $a^{(1)}, a^{(2)}$.

b) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \\ -1 & -2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{I \leftrightarrow III} \begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{-I} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{III-3I}$
$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & -4 & 4 & 13 \end{bmatrix} \xrightarrow{III+4II} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 33 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{33}III} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
Die erste, zweite und vierte Spalte sind Pivotspalten, also ist eine mögliche Basis $a^{(1)}, a^{(2)}, a^{(4)}$.

c) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \\ -1 & t & 1 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{I \leftrightarrow III} \begin{bmatrix} -1 & t & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{-I} \begin{bmatrix} 1 & -t & -1 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{III-3I}$
$\begin{bmatrix} 1 & -t & -1 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 3t+2 & 4 & 13 \end{bmatrix} \xrightarrow{III-(2+3t)II} \begin{bmatrix} 1 & -t & -1 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 3(t+2) & 3-15t \end{bmatrix}$ Wenn $t \neq -2$, so teilt man die dritte Zeile durch $3(t+2)$ und liest ab, dass die erste, zweite und dritte Spalte Pivotspalten sind und $a^{(1)}, a^{(2)}, a^{(3)}$ eine Basis ist. Wenn $t = -2$, so ist $a^{(1)}, a^{(2)}, a^{(4)}$ eine Basis.

Aufgabe 11. Für alle drei Koeffizientenmatrizen wird zunächst die ZSF hergeleitet. Aus dieser wird eine Basis von $Kern(A)$ abgelesen.

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[III-3I]{II-2I} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -3 & 6 \\ 0 & -5 & 10 \end{bmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{3}II} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -5 & 10 \end{bmatrix} \xrightarrow{III+5II} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
$\xrightarrow{I-2II} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$
Basis von $Kern(A)$ ist z.B. $(-1, 2, 1)^T$ (aus der 3. Spalte abgelesen)

b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -t \\ 2 & 1 & t \\ 3 & 1 & 2t \end{bmatrix} \xrightarrow[III-3I]{II-2I} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -t \\ 0 & -3 & 3t \\ 0 & -5 & 5t \end{bmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{3}II} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -t \\ 0 & 1 & -t \\ 0 & -5 & 5t \end{bmatrix} \xrightarrow{III+5II} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -t \\ 0 & 1 & -t \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
$\xrightarrow{I-2II} \begin{bmatrix} 1 & 0 & t \\ 0 & 1 & -t \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
Basis von $Kern(A)$ ist z.B. $(-t, t, 1)^T$.

c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 0 & -1 & 0 & 7 \\ -2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 9 \\ -1 & -3 & 3 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{III+2I \\ IV+I}]{II+2I} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 3 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 5 & 0 & 11 \\ 0 & -3 & 3 & 3 & 2 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{II \leftrightarrow III}$
$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 5 & 0 & 11 \\ 0 & 3 & 0 & 3 & 0 & 9 \\ 0 & -3 & 3 & 3 & 2 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow[IV+3II]{III-3II} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 5 & 0 & 11 \\ 0 & 0 & -6 & -12 & 0 & -24 \\ 0 & 0 & 9 & 18 & 2 & 38 \end{bmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{6}III}$
$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 5 & 0 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 9 & 18 & 2 & 38 \end{bmatrix} \xrightarrow{IV-9III} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 5 & 0 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}IV} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 5 & 0 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$
$\xrightarrow{II-2III} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$
Basis von $Kern(A)$ ist z.B. $(-2, -1, -2, 1, 0, 0)^T$ und $(-1, -3, -4, 0, -1, 1)^T$.

Aufgabe 12. Die ZSF der Matrix A hat die Form $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & c_{13} & c_{14} & c_{15} \\ 0 & 1 & c_{23} & c_{24} & c_{25} \\ 0 & 0 & c_{33} & c_{34} & c_{35} \end{bmatrix}$ Da die gegebenen Vektoren im Kern von A liegen müssen, gilt

- $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = Ca^{(1)} = \begin{pmatrix} 3c_{13} - 1 \\ 3c_{23} - 7 \\ 3c_{33} \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = Ca^{(2)} = \begin{pmatrix} -c_{14} - 2 \\ 6 - c_{24} \\ -c_{34} \end{pmatrix}$

Es folgt $c_{33} = c_{34} = 0$ und $c_{13} = 1/3$, $c_{23} = 7/3$, $c_{14} = -2$, $c_{24} = 6$.

Die fünfte Spalte muss dann zwangsläufig die dritte Einheitsspalte sein, denn die Basis vom $Kern(A)$ besteht aus zwei Vektoren, d.h. $\dim(Kern(A)) = 2$, d.h. in der ZSF gibt es nur zwei Nichtpivot-Spalten. Demnach lautet die ZSF

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 7/3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Aufgabe 13. Die lineare Hülle von $a^{(1)}, a^{(2)}$ besteht aus allen Vektoren $(x_1, \ldots, x_n)^T$, die sich als LK aus den beiden Vektoren darstellen lassen. Das zugehörige LGS wird aufgestellt und bis zur Staffelform geführt. Daraus liest man dann das homogene LGS ab, welches erfüllt sein muss.

a) $$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & x_1 \\ 4 & -1 & x_2 \\ 1 & -2 & x_3 \end{array}\right] \xrightarrow{I \leftrightarrow III} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & x_3 \\ 4 & -1 & x_2 \\ 2 & 3 & x_1 \end{array}\right] \xrightarrow[III-2I]{II-4I} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & x_3 \\ 0 & 7 & x_2 - 4x_3 \\ 0 & 7 & x_1 - 2x_3 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{1}{7}II}$$
$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & x_3 \\ 0 & 1 & \frac{1}{7}(x_2 - 4x_3) \\ 0 & 7 & x_1 - 2x_3 \end{array}\right] \xrightarrow{III-7II} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & x_3 \\ 0 & 1 & \frac{1}{7}(x_2 - 4x_3) \\ 0 & 0 & x_1 - x_2 + 2x_3 \end{array}\right]$$

Das LGS hat eine Gleichung: $x_1 - x_2 + 2x_3 = 0$

b) $$\left[\begin{array}{cc|c} 4 & -2 & x_1 \\ 2 & 0 & x_2 \\ 2 & -1 & x_3 \\ 1 & 1 & x_4 \end{array}\right] \xrightarrow{IV \leftrightarrow I} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x_4 \\ 2 & 0 & x_2 \\ 2 & -1 & x_3 \\ 4 & -2 & x_1 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{III-2I \\ IV-4I}]{II-2I} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x_4 \\ 0 & -2 & x_2 - 2x_4 \\ 0 & -3 & x_3 - 2x_4 \\ 0 & -6 & x_1 - 4x_4 \end{array}\right] \xrightarrow{-\frac{1}{2}II}$$
$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x_4 \\ 0 & 1 & x_4 - \frac{x_2}{2} \\ 0 & -3 & x_3 - 2x_4 \\ 0 & -6 & x_1 - 4x_4 \end{array}\right] \xrightarrow[IV+6II]{III+3II} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x_4 \\ 0 & 1 & x_4 - \frac{x_2}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{3x_2}{2} + x_3 + x_4 \\ 0 & 0 & x_1 - 3x_2 + 2x_4 \end{array}\right]$$

Das LGS hat die zwei Gleichungen $x_1 - 3x_2 + 2x_4 = 0, -(3x_2/2) + x_3 + x_4 = 0$

Aufgabe 14. Ist $(x|y) = (x|y_0 + m_1(x - x_0))$ ein Punkt auf der ersten Geraden und $(\tilde{x}|\tilde{y}) = (\tilde{x}|y_0 + m_2(\tilde{x} - x_0))$ ein Punkt auf der zweiten Geraden, so wird der Winkel zwischen den Geraden durch das Skalarprodukt $\langle (x|y) - (x_0|y_0), (\tilde{x}|\tilde{y}) - (x_0|y_0) \rangle = 0$ beschrieben. Für diesen gilt

$$\begin{aligned} \langle (x|y) - (x_0|y_0), (\tilde{x}|\tilde{y}) - (x_0|y_0) \rangle &= \langle (x - x_0|m_1(x - x_0)), (\tilde{x} - x_0|m_2(\tilde{x} - x_0)) \rangle \\ &= (x - x_0)(\tilde{x} - x_0) + m_1 m_2 (x - x_0)(\tilde{x} - x_0) \\ &= (x - x_0)(\tilde{x} - x_0)(1 + m_1 m_2) \end{aligned}$$

Falls $m_1 m_2 = -1$, so ist das Skalarprodukt gleich Null und die Geraden stehen senkrecht aufeinander. Falls umgekehrt die Geraden senkrecht aufeinander stehen, so ist das Skalarprodukt Null, d.h. es gilt $(x - x_0)(\tilde{x} - x_0)(1 + m_1 m_2) = 0$. Man kann nun zwei beliebige Punkte auf den beiden Geraden wählen, d.h. insbesondere Punkte mit $x \neq x_0$, $\tilde{x} \neq x_0$. Dann muss aber $1 + m_1 m_2 = 0$ gelten, d.h. $m_1 m_2 = -1$.

Aufgabe 15.

a) Im Fall $n = 5$ ist der Maximalwert durch das Skalarprodukt

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \right\rangle = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 55$$

und der Minimalwert durch das Skalarprodukt

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 1 \cdot 5 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 2 + 5 \cdot 1 = 34$$

gegeben. Im Fall $n = 6$ ist der Maximalwert durch das Skalarprodukt

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \right\rangle = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 = 91$$

und der Minimalwert durch das Skalarprodukt

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 1 \cdot 6 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 3 + 5 \cdot 2 + 6 \cdot 1 = 56$$

gegeben.

b) Für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ ist der Maximalwert durch das Skalarprodukt

$$\begin{aligned} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ (n-1) \\ n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ (n-1) \\ n \end{pmatrix} \right\rangle &= 1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2 + n^2 \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \end{aligned}$$

und der Minimalwert durch das Skalarprodukt

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ (n-1) \\ n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} n \\ (n-1) \\ \vdots \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 1 \cdot n + 2 \cdot (n-1) + \cdots + (n-1) \cdot 2 + n \cdot 1$$
$$= \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

gegeben. Im Haupttext ⇨ vgl. S. 68 wurde bereits beispielhaft erläutert, weshalb der völlig gleichläufige (bzw. der völlig gegenläufige) Fall den Maximalwert (bzw. den Minimalwert) ergibt. Hier soll noch eine kurze Begründung gegeben werden, weshalb dies auch allgemein so ist. Um die Darstellung einfach zu halten, wird als linker Vektor im Skalarprodukt $(1, 2, 3, \ldots, n)^T$ verwendet. Wir betrachten nun einen beliebigen Vektor $(j_1, \ldots, j_n)^T$ dessen Komponenten nicht gleichläufig mit $(1, 2, 3, \ldots, n)^T$ sind. Das bedeutet, dass es wenigstens zwei Stellen $\ell < k$ gibt mit $j_\ell > j_k$. Das Skalarprodukt kann jetzt durch Vertauschen der Komponenten j_ℓ und j_k vergrößert werden:

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ \ell \\ \vdots \\ k \\ \vdots \\ n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} j_1 \\ \vdots \\ j_\ell \\ \vdots \\ j_k \\ \vdots \\ j_n \end{pmatrix} \right\rangle - \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ \ell \\ \vdots \\ k \\ \vdots \\ n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} j_1 \\ \vdots \\ j_k \\ \vdots \\ j_\ell \\ \vdots \\ j_n \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ \ell \\ \vdots \\ k \\ \vdots \\ n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ j_\ell - j_k \\ \vdots \\ j_k - j_\ell \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = (l-k)(j_\ell - j_k) < 0$$

Umgekehrt kann man durch Vertauschen von Komponenten, die nicht gegenläufig sind, das Skalarprodukt verkleinern. Deshalb liefert der mit $(1, 2, \ldots, n)^T$ völlig gleichläufige Vektor $(1, 2, \ldots, n)^T$ (bzw. gegenläufige Vektor $(n, n-1, \ldots, 1)^T$ das größte (bzw. das kleinste) Skalarprodukt. Das gilt genau so, wenn man den Vektor $(1, \ldots, n)^T$ durch einen (Daten-)Vektor $(x_1, \ldots, x_n)$ mit $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ ersetzt.

Die Formel für die gleichläufige Produktsumme $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ steht in jeder Formelsammlung, vgl. auch Satz 4.5 ⇨ vgl. S. 142. Eine Herleitung hierzu mittels Steckbriefansatz finden Sie in [Terveer/Terveer, 2011], Kapitel 8.2. Die Formel für die gegenläufige Produktsumme bekommt man hieraus wie folgt:

$$\begin{aligned} 1 \cdot n + 2 \cdot (n-1) + \cdots + n \cdot 1 &= 1(n+1-1) + 2(n+1-2) + \cdots + n(n+1-n) \\ &= (1 + 2 + \cdots + n)(n+1) - 1^2 - 2^2 - \cdots - n^2 \\ &= \frac{n(n+1)}{2} \cdot (n+1) - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ &= \frac{n(n+1)(3(n+1) - 2n - 1)}{6} \\ &= \frac{n(n+1)(n+2)}{6} \end{aligned}$$

Dabei wurde im zweiten Schritt die Summenformel $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ verwendet, vgl. ebenfalls Satz 4.5 ⇨ vgl. S. 142.

Aufgabe 16.

a) Es ist $\langle x, y\rangle = 4 \cdot 7 + 3 \cdot 24 = 100$ und $\|x\| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$, $\|y\| = \sqrt{7^2 + 24^2} = 25$. Damit folgt $\cos(\phi) = \langle x, y\rangle/(\|x\| \cdot \|y\|) = 24/(4 \cdot 25) = 100/125 = 4/5$. Z.B. mit Taschenrechner bekommt man $\cos^{-1}(4/5) \approx 0,644$ (im Bogenmaß) bzw. $\approx 36,87°$ (im Gradmaß).

b) $\langle x, y\rangle = -1 + 3 - 5 + 7 = 4$ und $\|x\| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + (-1)^2 + 1^2} = 2$ und $\|y\| = \sqrt{1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2} = 2\sqrt{21}$. Daraus $\cos(\phi) = 4/(2 \cdot 2\sqrt{21}) = 1/\sqrt{21} \approx 0,218$. Der Winkel ist dann $\phi = \cos^{-1}(1/\sqrt{21}) \approx 1,35$ im Bogenmaß (bzw. $\approx 77,39°$ im Gradmaß).

Aufgabe 17. Orthogonal sind die Vektoren, wenn ihr Skalarprodukt Null ist, d.h.

$$0 = \left\langle \begin{pmatrix} 6 \\ 3t \\ -t \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t \\ t \\ -2t \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 6t + 3t^2 + 2t^2 + 1 = 5t^2 + 6t + 1 = (t+1)(5t+1)$$

Lösung ist $t = -1$ und $t = -\frac{1}{5}$.

Aufgabe 18. Die Vektoren $b^{(j)} = \frac{1}{\|a^{(j)}\|} a^{(j)}$ für $j = 1, \dots, n$ haben folgende Eigenschaften:

- Sie sind paarweise orthogonal:
  $\langle b^{(i)}, b^{(j)}\rangle = \langle \frac{1}{\|a^{(i)}\|} a^{(i)}, \frac{1}{\|a^{(j)}\|} a^{(j)}\rangle = \frac{1}{\|a^{(i)}\| \cdot \|a^{(j)}\|} \langle a^{(i)}, a^{(j)}\rangle = 0$ für $i \neq j$.
- Sie haben euklidische Länge 1:
  $\|b^{(j)}\| = \|\frac{1}{\|a^{(j)}\|} a^{(j)}\| = \frac{1}{\|a^{(j)}\|} \cdot \|a^{(j)}\| = 1$

Die Vektoren sind also paarweise orthonormal. Satz 2.11 ⇨vgl. S. 71 stellt dann $x \in \mathbb{R}^n$ als LK von $b^{(1)}, \dots, b^{(m)}$ dar:

$$\begin{aligned} x &= \langle x, b^{(1)}\rangle \cdot b^{(1)} + \dots + \langle x, b^{(n)}\rangle \cdot b^{(n)} \\ &= \langle x, \frac{1}{\|a^{(1)}\|} a^{(1)}\rangle \cdot \frac{1}{\|a^{(1)}\|} a^{(1)} + \dots + \langle x, \frac{1}{\|a^{(n)}\|} a^{(n)}\rangle \cdot \frac{1}{\|a^{(n)}\|} a^{(n)} \\ &= \frac{1}{\|a^{(1)}\|^2} \langle x, a^{(1)}\rangle \cdot a^{(1)} + \dots + \frac{1}{\|a^{(n)}\|^2} \langle x, a^{(n)}\rangle \cdot a^{(n)} \\ &= \frac{\langle x, a^{(1)}\rangle}{\langle a^{(1)}, a^{(1)}\rangle} \cdot a^{(1)} + \dots + \frac{\langle x, a^{(n)}\rangle}{\langle a^{(n)}, a^{(n)}\rangle} \cdot a^{(n)} \end{aligned}$$

Aufgabe 19. Mit den jeweiligen Vektoren $a^{(1)}, \dots, a^{(m)}$, welche $\mathbb{L}$ aufspannen, lauten die m Normalgleichungen

$$\langle a^{(j)}, a^{(1)}\rangle \alpha_1 + \dots + \langle a^{(j)}, a^{(m)}\rangle \alpha_m = \langle a^{(j)}, x\rangle$$

für $j = 1, \dots, m$ und lassen sich mit der Gleichungsmatrix

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \langle a^{(1)}, a^{(1)}\rangle & \cdots & \langle a^{(1)}, a^{(m)}\rangle & \langle a^{(1)}, x\rangle \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \langle a^{(m)}, a^{(1)}\rangle & \cdots & \langle a^{(m)}, a^{(m)}\rangle & \langle a^{(m)}, x\rangle \end{array}\right]$$

aufschreiben. Dieses LGS mit wird (z.B.) mit dem GEV gelöst.

a) Hier liegt nur ein erzeugender Vektor $a^{(1)} = (1,5,2)^T$ vor; es gibt nur eine Normalgleichung: $\langle a^{(1)}, a^{(1)}\rangle\alpha_1 = \langle a^{(1)}, x\rangle$, also $30\alpha_1 = -18$, also $\alpha_1 = -\frac{3}{5}$. Der gesuchte Vektor ist $-\frac{3}{5}(1,5,2)^T = (-3/5, -3, -6/5)^T$.

b) Die Gleichungsmatrix lautet hier

$$\left[\begin{array}{cc|c} 13 & 5 & 21 \\ 5 & 19 & -9 \end{array}\right] \xrightarrow{I \leftrightarrow II} \left[\begin{array}{cc|c} 5 & 19 & -9 \\ 13 & 5 & 21 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{1}{5}I} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{19}{5} & -\frac{9}{5} \\ 13 & 5 & 21 \end{array}\right] \xrightarrow{II-13I} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{19}{5} & -\frac{9}{5} \\ 0 & -\frac{222}{5} & \frac{222}{5} \end{array}\right]$$
$$\xrightarrow{-\frac{5}{222}II} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{19}{5} & -\frac{9}{5} \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{I-\frac{19}{5}II} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

Der gesuchte Projektionsvektor ist $z = 2\cdot(-2,2,2,1)^T - (0,3,1,-3)^T = (-4,1,3,5)^T$.

c) Das Gleichungssystem lautet hier

$$\left[\begin{array}{cc|c} 5 & -7 & -27t+10 \\ -7 & 19 & -19t-14 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{1}{5}I} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -\frac{7}{5} & \frac{7t}{5}+2 \\ -7 & 19 & -19t-14 \end{array}\right] \xrightarrow{II+7I} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -\frac{7}{5} & \frac{7t}{5}+2 \\ 0 & \frac{46}{5} & -\frac{46t}{5} \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{5}{46}II}$$
$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -\frac{7}{5} & \frac{7t}{5}+2 \\ 0 & 1 & -t \end{array}\right] \xrightarrow{I+\frac{7}{5}II} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -t \end{array}\right]$$

Der gesuchte Projektionsvektor ist $z = 2(-2,-1,0)^T - t(3,1,-3)^T = (-4-3t, -2-t, 3t)^T$

Aufgabe 20. Die (einzige) Normalgleichung ist $\langle a,a\rangle\alpha = \langle a,x\rangle$, also $\alpha = \frac{\langle a,a\rangle}{\langle a,x\rangle} = \frac{\langle a,x\rangle}{\|a\|^2}$. Die Projektion ist also $z = \frac{\langle a,x\rangle}{\|a\|^2}a$.

Aufgabe 21.

a) Sind p_1 und p_2 die mutmaßlichen kg-Preise für Bananen bzw. Orangen, und nimmt man zusätzlich eine Pauschale p_0 (Sympathiebonus und Sprachproblempauschale) an, so sind beobachtete und erwartete Gesamtpreis-Vektoren

$$x(p) = p_0\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix} + p_1\begin{pmatrix}3\\2\\4\\1\\2\end{pmatrix} + p_2\begin{pmatrix}2\\1\\0\\1\\1\end{pmatrix} \qquad y = \begin{pmatrix}2,6\\1,8\\2,7\\1,7\\1,8\end{pmatrix}$$

zu vergleichen. Dabei werden die Bananen- bzw. Orangengewichte in Vektoren $b = (3,2,4,1,2)^T$ und $a = (2,1,0,1,1)^T$ gebündelt. In diesem Ansatz kann man ggf. auch die Pauschale weglassen, indem man p_0 von vorneherein gleich Null setzt. Man versucht nun, $x(p)$ und y einander so gut wie möglich entsprechen zu lassen. Mathematisch sucht man die Projektion $x(p)$ des beobachteten Preisvektors auf die von den Gewichtsvektoren b, a erzeugte Ebene (bzw. auf den von a, b und $\mathbf{1} = (1,1,1,1,1)^T$ erzeugten UVR des $\mathbb{R}^5$) .

b) Wir lösen die Aufgabe einmal ohne und einmal mit Pauschale:

Zur Aufgabe ohne Pauschale gehören die Normalgleichungen

$$\langle a,a\rangle p_1 + \langle a,b\rangle p_2 = \langle a,y\rangle \Leftrightarrow 34p_1 + 11p_2 = 27,5$$
$$\langle b,a\rangle p_1 + \langle b,b\rangle p_2 = \langle b,y\rangle \Leftrightarrow 11p_1 + 7p_2 = 10,5$$

Lösung ist $p_1 \approx 0,65812$, $p_2 \approx 0,46581$.

Im Ansatz mit Pauschale lauten die Normalgleichungen

$$\langle \mathbf{1},\mathbf{1}\rangle p_0 + \langle \mathbf{1},a\rangle p_1 + \langle \mathbf{1},b\rangle p_2 = \langle \mathbf{1},y\rangle \Leftrightarrow 5p_0 + 12p_1 + 5p_2 = 10,6$$
$$\langle a,\mathbf{1}\rangle p_0 + \langle a,a\rangle p_1 + \langle a,b\rangle p_2 = \langle a,y\rangle \Leftrightarrow 12p_0 + 34p_1 + 11p_2 = 27,5$$
$$\langle b,\mathbf{1}\rangle p_0 + \langle b,a\rangle p_1 + \langle b,b\rangle p_2 = \langle b,y\rangle \Leftrightarrow 5p_0 + 11p_1 + 7p_2 = 10,5$$

Lösung ist $p_0 \approx 0,929787$, $p_1 \approx 0,42766$ und $p_2 \approx 0,16383$

c) Im Modell ohne Pauschale müsste Hubert $1 \cdot p_1 + 1 \cdot p_2 = 0,65812 + 0,46581 \approx 1,12$ ägyptische Pfund veranschlagen. Im Modell mit Pauschale wären dies $p_0 + 1 \cdot p_1 + 1 \cdot p_2 = 0,929787 + 0,42766 + 0,16383 \approx 1,52$ ägyptische Pfund.

Aufgabe 22. Die Normalgleichungen lauten in Matrixform

$$\left[\begin{array}{cc|c} \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle & \langle \mathbf{x}, \mathbf{1} \rangle & \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \\ \langle \mathbf{1}, \mathbf{x} \rangle & \langle \mathbf{1}, \mathbf{1} \rangle & \langle \mathbf{1}, \mathbf{y} \rangle \end{array}\right] \xrightarrow{II/\langle 1,1 \rangle} \left[\begin{array}{cc|c} \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle & \langle \mathbf{x}, \mathbf{1} \rangle & \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \\ \langle \mathbf{1}, \mathbf{x} \rangle / n & 1 & \langle \mathbf{1}, \mathbf{y} \rangle / n \end{array}\right] \xrightarrow{I - \langle \mathbf{x}, \mathbf{1} \rangle II}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle - \langle \mathbf{1}, \mathbf{x} \rangle^2 / n & 0 & \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle - \langle \mathbf{1}, \mathbf{y} \rangle \langle \mathbf{x}, \mathbf{1} \rangle / n \\ \langle \mathbf{1}, \mathbf{x} \rangle / n & 1 & \langle \mathbf{1}, \mathbf{y} \rangle / n \end{array}\right]$$

Die einzelnen Einträge werden nun vereinfacht:

- $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = x_1^2 + \cdots + x_n^2$
- $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$
- $\langle \mathbf{1}, \mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{1} \rangle = x_1 + \cdots + x_n = n\bar{x}$
- $\langle \mathbf{1}, \mathbf{y} \rangle = y_1 + \cdots + y_n = n\bar{y}$

Die Normalgleichungen werden dann zu

- $(x_1^2 + \cdots + x_n^2 - n\bar{x}^2)a = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n - n\bar{x}\bar{y}$
- $\bar{x}a + b = \bar{y}$

Also:

- $a = \frac{x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n - n\bar{x}\bar{y}}{x_1^2 + \cdots x_n^2 - n\bar{x}^2}$
- $b = \bar{y} - a\bar{x}$

Aufgabe 23.

a) Gesucht sind $a, b, c \in \mathbb{R}$ derart, dass

$$\begin{pmatrix} a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c \\ a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c \\ a \cdot 18^2 + b \cdot 18 + c \\ a \cdot 34^2 + b \cdot 34 + c \\ a \cdot 38^2 + b \cdot 38 + c \\ a \cdot 28^2 + b \cdot 28 + c \\ a \cdot 21^2 + b \cdot 21 + c \\ a \cdot 25^2 + b \cdot 25 + c \\ a \cdot 39^2 + b \cdot 39 + c \\ a \cdot 33^2 + b \cdot 33 + c \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 324 \\ 1156 \\ 1444 \\ 784 \\ 441 \\ 625 \\ 1521 \\ 1089 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 18 \\ 34 \\ 38 \\ 28 \\ 21 \\ 25 \\ 39 \\ 33 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = a x^{(1)} + b x^{(2)} + c\mathbf{1} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 88 \\ 95 \\ 70 \\ 24 \\ 30 \\ 15 \\ 25 \\ 25 \\ 39 \\ 34 \\ 33 \end{pmatrix}$$

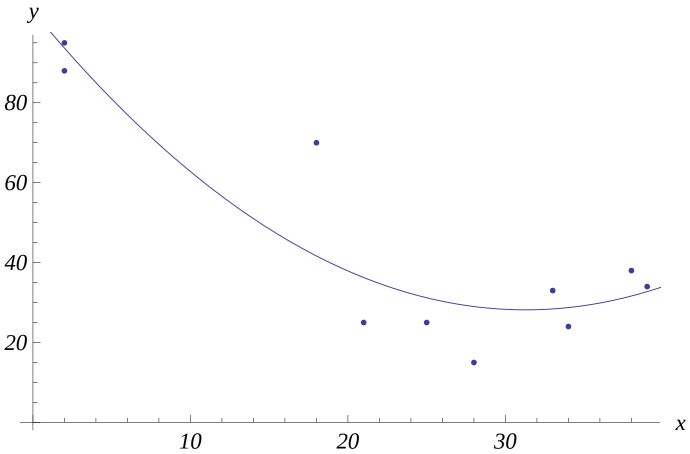
einen möglichst geringen (euklidischen) Abstand haben. Es ist also die Projektion des rechts stehenden Preisvektors $\mathbf{y}$ auf den von den drei Vektoren $x^{(1)}, x^{(2)}, \mathbf{1}$ erzeugten UVR gesucht. Die Normalgleichungen werden mit Hilfe der wechselseitigen Skalarprodukte der erzeugenden Vektoren untereinander bzw. mit dem Preisvektor aufgestellt. Die zugehörige Gleichungsmatrix wird in ZSF überführt (auch möglich mit Standard-Schultaschenrechnern):

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \langle x^{(1)}, x^{(1)} \rangle & \langle x^{(1)}, x^{(2)} \rangle & \langle x^{(1)}, \mathbf{1} \rangle & \langle x^{(1)}, \mathbf{y} \rangle \\ \langle x^{(2)}, x^{(1)} \rangle & \langle x^{(2)}, x^{(2)} \rangle & \langle x^{(2)}, \mathbf{1} \rangle & \langle x^{(2)}, \mathbf{y} \rangle \\ \langle \mathbf{1}, x^{(1)} \rangle & \langle \mathbf{1}, x^{(2)} \rangle & \langle \mathbf{1}, \mathbf{1} \rangle & \langle \mathbf{1}, \mathbf{y} \rangle \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 8225604 & 242118 & 7392 & 232089 \\ 242118 & 7392 & 240 & 7871 \\ 7392 & 240 & 10 & 447 \end{array}\right]$$

$$\to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0,0764101 \\ 0 & 1 & 0 & -4,78033 \\ 0 & 0 & 1 & 102,946 \end{array}\right]$$

Als Lösung stellt sich die quadratische Funktion $f(x) = 0{,}0764101x^2 - 4{,}78022x + 102{,}946$ dar.

b) Funktion und Daten in einem Schaubild:



Man erkennt den Scheitelpunkt der Parabel etwas oberhalb von $x = 30$ ($x \approx 32{,}76$). Oberhalb davon steigt die Funktion zur Erklärung des Preises wieder an, d.h. nach einer anfänglichen Phase des Wertverlusts nimmt der Wagentyp als Oldtimer wieder an Wert zu.

Aufgabe 24. Wenn sich x als LK $x = \alpha_1 a^{(1)} + \cdots + \alpha_m a^{(m)}$ von $a^{(1)}, \ldots, a^{(m)}$ darstellen lässt, ist x schon die Projektion von x auf $Span(a^{(1)}, \ldots, a^{(m)})$, denn dann ist der euklidische Abstand zwischen x und einer (speziellen) LK von $a^{(1)}, \ldots, a^{(m)}$ schon gleich Null, was nicht verbessert werden kann. Dann aber müssen sich die Koeffizienten auch aus den zugehörigen Normalgleichungen ergeben.

Kapitel 3

Aufgabe 1.

a) $$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 \\ -3 & 5 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 7 + 1 \cdot (-1) + 4 \cdot 2 + 3 \cdot 4 \\ (-3) \cdot 7 + 5 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 33 \\ -16 \end{pmatrix}$$

b) $$\begin{bmatrix} -t & s & -t \\ s & -t & s \end{bmatrix} \begin{pmatrix} s \\ t \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-t) \cdot s + s \cdot t + (-t) \cdot s \\ s \cdot s + (-t) \cdot t + s \cdot s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -st \\ 2s^2 - t^2 \end{pmatrix}$$

c) $$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 2 & 3 & \ldots & n \end{bmatrix} \begin{pmatrix} n \\ n-1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot n + 1 \cdot (n-1) + \cdots + 1 \cdot 1 \\ 1 \cdot n + 2 \cdot (n-1) + \cdots + n \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n(n+1)/2 \\ n(n+1)(n+2)/6 \end{pmatrix}$$

vgl. Kapitel 2, Lösung zu Aufgabe 15 ⇨ vgl. S. 20

Aufgabe 2. Es wird jeweils der Vektor $Ae^{(j)}$ für $j = 1, 2, 3$ bestimmt und das Ergebnis zu einer Matrix zusammengesetzt.

a) $A\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, $A\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, $A\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$. Probe: $\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_3\\x_2\\x_1\end{pmatrix}$.

b) $A\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $A\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\t\\0\end{pmatrix}$, $A\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$. Probe: $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&t&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\tx_2\\x_3\end{pmatrix}$.

c) $A\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\t\end{pmatrix}$, $A\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, $A\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$. Probe: $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\t&0&1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3+tx_1\end{pmatrix}$.

Aufgabe 3. Es gibt zwei Möglichkeiten zu prüfen, ob es eine solche Matrix gibt:

[1] Wenn es eine solche Matrix gibt, muss sie als Spalten die Bilder der Einheitsvektoren haben. Die zugehörige Matrix wird aufgestellt und es wird geprüft, ob sie die angegebene Zuordnung darstellt (diese Vorgehensweise entspricht derjenigen der vorigen Aufgabe). Diese Vorgehensweise ist am effizientesten, wenn man schon vermutet, dass die Matrix existiert.

[2] Es werden die Eigenschaften L1. und L2. geprüft. Sind diese erfüllt, so muss es eine Matrix geben und diese bildet sich dann aus den Bildern der Einheitsvektoren. Diese Vorgehensweise ist am effizientesten, wenn man schon eine (begründete) Vermutung hat, welche der Eigenschaften L1. und L2. verletzt ist.

a) $f(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix})=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$,$f(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix})=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$.

Also $A=\begin{bmatrix}1&1\\1&-1\end{bmatrix}$ und es gilt $\begin{bmatrix}1&1\\1&-1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1+x_2\\x_1-x_2\end{pmatrix}$. Die angegebene Matrix A erfüllt also die Forderung.

b) Die Bedingung L2. ist verletzt, z.B. gilt $f((1,1)^T)=(2,0)^T$, und $f((2,2)^T)=(4,1)^T$. Gleichzeitig ist $(2,2)^T=2(1,1)^T$ und $2f((1,1)^T)=2(2,0)^T=(4,0)^T\neq(4,1)^T$. Es gibt also keine solche Matrix A.

Alternative Rechnung:
$f((1,0)^T)=(1,-1)^T$ und $f((0,1)^T))=(1,0)^T$. Die gesuchte Matrix müsste dann $A=\begin{bmatrix}1&1\\-1&0\end{bmatrix}$ sein. Für diese gilt aber $\begin{bmatrix}1&1\\-1&0\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1+x_2\\-x_1\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}x_1+x_2\\x_2-1\end{pmatrix}$.
Es gibt also keine solche Matrix.

c) Die Bedingung L1. ist verletzt. Beispielsweise gilt

– $f((0,1,1)^T)+f((0,2,1)^T)=(0,1)^T+(0,4)^T=(0,5)^T$

– $f((0,3,2)^T)=(0,9/2)^T$.

Würde L1. gelten, müssten beide Ergebnisse übereinstimmen. Es gibt also keine solche Matrix.

Die alternative Rechnung ist hier gar nicht durchführbar, weil man z.B. gar nicht $f((1,0,0)^T)$ berechnen kann (Division durch Null). Schon dies deutet an, dass es zu f keine Matrix gibt. Die Funktion hat in Wahrheit gar nicht den Definitionsbereich $\mathbb{R}^n$, wie von der Aufgabenstellung suggeriert. Die Bedingung L2. $f(\alpha(x_1,x_2,x_3)^T)=\alpha f((x_1,x_2,x_3)^T)$ ist hier auf dem Definitionsbereich von f und für $\alpha\neq 0$ erfüllt.

Aufgabe 4.

a) $\begin{bmatrix} 14 & -32 \\ -32 & 77 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 17 & -22 & 27 \\ -22 & 29 & -36 \\ 27 & -36 & 45 \end{bmatrix}$, n. def., $\begin{bmatrix} -7 & -1 & -10 \\ 8 & -1 & 11 \\ -9 & 3 & -12 \end{bmatrix}$,

$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 9 & -21 \end{bmatrix}$, n. def., $\begin{bmatrix} 1 & -4 & 9 \\ -4 & 10 & -18 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -4 & 10 \\ 9 & -18 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 7 & -10 \\ 25 & -52 \end{bmatrix}$

b) $(-7, 8, -9)^T, -33, 39, 194, x^2 + 2y^2 + 3z^2$

Aufgabe 5.

a) $S \cdot A = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 4 & 8 \\ 2 & 6 & 3 & 3 \\ 4 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, 1. Zeile wird verdoppelt, 2. und 3. Zeile verändern sich nicht.

$Q \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 10 & 10 & 5 & 3 \\ 4 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, 1. und 3. Zeile verändern sich nicht, 2faches der 3. zur 2. Zeile addieren.

$P \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 6 & 3 & 3 \end{bmatrix}$, 1. Zeile verändert sich nicht, 2. und 3. Zeile werden vertauscht.

b) $S \cdot (Q \cdot (P \cdot A)) = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 4 & 8 \\ 8 & 14 & 7 & 6 \\ 2 & 6 & 3 & 3 \end{bmatrix}$, Erst Vertauschung der zweiten und dritten Zeile, dann Addition des zweifachen der (neuen) dritten Zeile zur zweiten Zeile, zum Schluss Verdoppelung der 1. Zeile.

c) Durch Matrixmultiplikation mit derartigen Elementarmatrizen kann man also elementare Zeilenumformungen darstellen. Die Umformungen an der Ausgangsmatrix können von rechts nach links aus den Elementarmatrizen abgelesen werden.

Aufgabe 6.

a) Stellt man die Zusammenhänge mit den Matrizen $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ und $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ dar, so ergibt sich die gesuchte Matrix zu $C = A \cdot B$ mit $C = \begin{bmatrix} 14 & 14 \\ 3 & 10 \end{bmatrix}$.
Das bedeutet, dass man zur Herstellung von P_1 14 Bauteile T_1 und 3 von T_2 benötigt etc.

b) Mit den Rohstoffpreisen $q_1 = 2$ und $q_2 = 3$ rechnet man $(q_1, q_2) \cdot C = (37, 58)$, also Einkaufskosten von 37 für P_1 und 58 für P_2.

c) $C \cdot (10, 5)^T = (210, 80)^T$. Es werden also 210 bzw. 80 Stück der Bauteile benötigt.

Aufgabe 7. Die Matrix wird jeweils rechts um die Einheitsmatrix ergänzt und in ZSF überführt. Falls in der ZSF links die Einheitsmatrix steht, liest man rechts die inverse Matrix ab.

a) $$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 7 & 8 & 9 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{I \leftrightarrow III} \left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{-I} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -3 & 0 & 0 & -1 \\ 4 & 5 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[III+(-7)\,I]{II+(-4)\,I} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -3 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 13 & 18 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 22 & 30 & 1 & 0 & 7 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{1}{13}II} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -3 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{18}{13} & 0 & \frac{1}{13} & \frac{4}{13} \\ 0 & 22 & 30 & 1 & 0 & 7 \end{array}\right] \xrightarrow{III-22II}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -3 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{18}{13} & 0 & \frac{1}{13} & \frac{4}{13} \\ 0 & 0 & -\frac{6}{13} & 1 & -\frac{22}{13} & \frac{3}{13} \end{array}\right] \xrightarrow{-\frac{13}{6}III} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -3 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{18}{13} & 0 & \frac{1}{13} & \frac{4}{13} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{13}{6} & \frac{11}{3} & -\frac{1}{2} \end{array}\right] \xrightarrow[II-\frac{18}{13}III]{I+3III}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & -\frac{13}{2} & 11 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{13}{6} & \frac{11}{3} & -\frac{1}{2} \end{array}\right] \xrightarrow{I+2II} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{13}{6} & \frac{11}{3} & -\frac{1}{2} \end{array}\right]$$

b) $$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 7 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[III-3I]{II-2I} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{-II}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{III-II} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

Die Einheitsmatrix kann links nicht erzeugt werden, deshalb ist die Ausgangsmatrix nicht invertierbar.

c) $$\left[\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{I \leftrightarrow II} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[III-5I]{II+2I}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 5 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -11 & 0 & -5 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{1}{5}II} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & -3 & -11 & 0 & -5 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{III+3II}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 0 & -8 & \frac{3}{5} & -\frac{19}{5} & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{-\frac{1}{8}III} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{40} & \frac{19}{40} & -\frac{1}{8} \end{array}\right] \xrightarrow[II-III]{I-2III}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & \frac{3}{20} & \frac{1}{20} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{11}{40} & -\frac{3}{40} & \frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{40} & \frac{19}{40} & -\frac{1}{8} \end{array}\right] \xrightarrow{I-II} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{11}{40} & -\frac{3}{40} & \frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{40} & \frac{19}{40} & -\frac{1}{8} \end{array}\right]$$

d) $$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[III-I]{II-I} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{II \leftrightarrow IV}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{III+II} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{IV+III}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -2 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{1}{3}IV} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right] \xrightarrow[III-2IV]{II-IV}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right] \xrightarrow[II-III]{I-III} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right] \xrightarrow{I-II}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right]$$

Aufgabe 8.

a) $10A = \begin{bmatrix} 10 & 20 & 0 \\ 20 & 60 & 30 \\ 0 & 30 & 50 \end{bmatrix}$ stellt die Materialverflechtungsmatrix dar, wenn die Rohstoffe mit Bezug auf je 10 Industriepaletten Luftschlangen der drei Typen angegeben werden soll. $A + B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 9 & 3 \\ 0 & 3 & 10 \end{bmatrix}$ hat keine ökonomische Interpretation im Aufgabenkontext, ebenso nicht $A^2 = \begin{bmatrix} 5 & 14 & 6 \\ 14 & 49 & 33 \\ 6 & 33 & 34 \end{bmatrix}$. Das Produkt von A und B stellt die Materialverflechtungsmatrix für den Fall der farbintensiveren Luftschlangen dar (Produktmengen jeweils wieder eine Industriepalette. Es ist $AB = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 0 \\ 4 & 18 & 15 \\ 0 & 9 & 25 \end{bmatrix}$.

Weiter ist $A^{-1} = \begin{bmatrix} 21 & -10 & 6 \\ -10 & 5 & -3 \\ 6 & -3 & 2 \end{bmatrix}$. Weil A die Zuordnung der Produkte zu den benötigten Rohstoffen beschreibt und invertierbar ist, lassen sich die Rohstoffe auch eindeutig den Produkten zuordnen. Dies leistet A^{-1}. Zu beachten ist aber, dass nicht jede Rohstoffkombination $y \in \mathbb{R}^3$ zu einer ökonomisch sinnvollen Produktkombination $A^{-1}y$ führt (z.B. nicht $y = (1, 0, 0)^T$).

b) Es ist

$$(AB)C = (AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AI_3A^{-1} = AA^{-1} = I_3$$

also ist $C = B^{-1}A^{-1}$ die inverse Matrix zu AB .

Aufgabe 9. $AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a+b & 2a+3b+\frac{1}{4} & 4a+2b+\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Wenn $A = B^{-1}$ sein soll, so muss AB die Einheitsmatrix sein. Vergleicht man die mittlere Zeile von AB mit derjenigen der Einheitsmatrix, so ergeben sich drei Gleichungen in a, b, die sich – zum Glück – zu $a = -\frac{3}{4}$, $b = \frac{3}{4}$ lösen lassen. Man könnte natürlich auch die Matrix B invertieren und dann a und b ablesen.

Aufgabe 10.

a) $\det \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 1 \end{bmatrix} = 2 \cdot 1 - 3 \cdot 7 = -19$

b) $\det \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 2 & 7 & 2 \\ 9 & 11 & 9 \end{bmatrix} = 3 \cdot 7 \cdot 9 + 2 \cdot 2 \cdot 9 + 2 \cdot 11 \cdot 3 - 9 \cdot 7 \cdot 3 - 2 \cdot 2 \cdot 9 - 11 \cdot 2 \cdot 3 = 0$

c) $\det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 7 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix} = 1 \cdot 3 \cdot 1 + 2 \cdot 7 \cdot 1 + 4 \cdot 4 \cdot 2 - 1 \cdot 3 \cdot 2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 - 4 \cdot 7 \cdot 1 = 7$

d) $\det \begin{bmatrix} t & -t & 1 \\ -t & t & 1 \\ 1 & -t & t \end{bmatrix} = t^3 + t^2 - t - t - t^3 + t^2 = 2t^2 -$ “t

e) $\det \begin{bmatrix} 8 & 8 & 10 & 4 \\ 7 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & 4 \end{bmatrix} = 1 \cdot \det \begin{bmatrix} 8 & 10 & 4 \\ 2 & 0 & 0 \\ 8 & 9 & 4 \end{bmatrix} + 3 \cdot \det \begin{bmatrix} 8 & 8 & 4 \\ 7 & 2 & 0 \\ 7 & 8 & 4 \end{bmatrix} = 1\dot{(}-8) + 3 \cdot (288 - 280) = 16$

f) Im ersten Schritt wird die erste Zeile zu den anderen addiert, dadurch ändert sich die Determinante nicht. Im nächsten Schritt wird nach der ersten Spalte entwickelt, wobei eine 3×3-Determinante übrig bleibt. Diese wird dann nach der dritten Zeile entwickelt (ist weniger aufwendig als die Sarrus-Regel). Insgesamt lauten die Umformungen:

$$\det \begin{bmatrix} -a & -a & a & a \\ a & b & -b & a \\ a & -b & b & a \\ a & a & a & -a \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} -a & -a & a & a \\ 0 & b-a & a-b & 2a \\ 0 & -a-b & a+b & 2a \\ 0 & 0 & 2a & 0 \end{bmatrix} = (-a)\det \begin{bmatrix} b-a & a-b & 2a \\ -a-b & a+b & 2a \\ 0 & 2a & 0 \end{bmatrix}$$
$$= (-a)(-2a)\det \begin{bmatrix} b-a & 2a \\ -a-b & 2a \end{bmatrix} = (-a)(-2a)(2a)(b-a-(-a-b))$$
$$= (-a)(-2a)(2a)(2b) = 8a^3b$$

Aufgabe 11. Die Matrix wird durch Zeilenumformungen so lange umgeformt, bis man durch Entwicklung nach der ersten Spalte die Determinante ablesen kann. Dabei verändert sich die Determinante nur durch Multiplikations- und Vertauschungsschritte. Dies wird jeweils dokumentiert (Notation wie im Buch ⇨ vgl. S. 105)

Zunächst wird aus der j-ten Zeile jeweils der gemeinsame Faktor a_j/x_j abgespalten, $j = 1, \ldots, 4$:

$$\begin{bmatrix} \frac{a_1(a_1-1)}{x_1^2} & \frac{a_1a_2}{x_1x_2} & \frac{a_1a_3}{x_1x_3} & \frac{a_1a_4}{x_1x_4} \\ \frac{a_2a_1}{x_2x_1} & \frac{a_2(a_2-1)}{x_2^2} & \frac{a_2a_3}{x_2x_3} & \frac{a_2a_4}{x_2x_4} \\ \frac{a_3a_1}{x_3x_1} & \frac{a_3a_2}{x_3x_2} & \frac{a_3(a_3-1)}{x_3^2} & \frac{a_3a_4}{x_3x_4} \\ \frac{a_4a_1}{x_4x_1} & \frac{a_4a_2}{x_4x_2} & \frac{a_4a_3}{x_4x_3} & \frac{a_4(a_4-1)}{x_4^2} \end{bmatrix} \begin{array}{c} \xrightarrow{\frac{x_1x_2x_3x_4}{a_1a_2a_3a_4}} \\[2em] \xleftarrow[\frac{a_1a_2a_3a_4}{x_1x_2x_3x_4}]{} \end{array} \begin{bmatrix} \frac{(a_1-1)}{x_1} & \frac{a_2}{x_2} & \frac{a_3}{x_3} & \frac{a_4}{x_4} \\ \frac{a_1}{x_1} & \frac{(a_2-1)}{x_2} & \frac{a_3}{x_3} & \frac{a_4}{x_4} \\ \frac{a_1}{x_1} & \frac{a_2}{x_2} & \frac{(a_3-1)}{x_3} & \frac{a_4}{x_4} \\ \frac{a_1}{x_1} & \frac{a_2}{x_2} & \frac{a_3}{x_3} & \frac{(a_4-1)}{x_4} \end{bmatrix}$$

Da die Determinante sich durch Transposition der Matrix nicht ändert, dürfen analog auch die gemeinsamen Faktoren $x_1, \ldots, x_4$ aus der ersten bis vierten Spalte abgespalten werden:

$$\begin{bmatrix} \frac{(a_1-1)}{x_1} & \frac{a_2}{x_2} & \frac{a_3}{x_3} & \frac{a_4}{x_4} \\ \frac{a_1}{x_1} & \frac{(a_2-1)}{x_2} & \frac{a_3}{x_3} & \frac{a_4}{x_4} \\ \frac{a_1}{x_1} & \frac{a_2}{x_2} & \frac{(a_3-1)}{x_3} & \frac{a_4}{x_4} \\ \frac{a_1}{x_1} & \frac{a_2}{x_2} & \frac{a_3}{x_3} & \frac{(a_4-1)}{x_4} \end{bmatrix} \begin{array}{c} \xrightarrow{x_1x_2x_3x_4} \\[2em] \xleftarrow[\frac{1}{x_1x_2x_3x_4}]{} \end{array} \begin{bmatrix} a_1-1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_1 & a_2-1 & a_3 & a_4 \\ a_1 & a_2 & a_3-1 & a_4 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4-1 \end{bmatrix}$$

Ebenso dürfen jetzt Additionsschritte auf Spalten ausgeführt werden. Es werden die zweite, dritte und vierte Spalte nacheinander auf die erste Spalte addiert, dabei ändert sich die Determinante nicht:

$$\begin{bmatrix} a_1-1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_1 & a_2-1 & a_3 & a_4 \\ a_1 & a_2 & a_3-1 & a_4 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4-1 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \rightarrow \\ \leftarrow \end{array} \begin{bmatrix} a_1+a_2+a_3+a_4-1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_1+a_2+a_3+a_4-1 & a_2-1 & a_3 & a_4 \\ a_1+a_2+a_3+a_4-1 & a_2 & a_3-1 & a_4 \\ a_1+a_2+a_3+a_4-1 & a_2 & a_3 & a_4-1 \end{bmatrix}$$

Schließliche subtrahiert man die erste Zeile von der zweiten, dritten und vierten, ohne dass sich die Determinante ändert:

$$\begin{bmatrix} a_1+a_2+a_3+a_4-1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_1+a_2+a_3+a_4-1 & a_2-1 & a_3 & a_4 \\ a_1+a_2+a_3+a_4-1 & a_2 & a_3-1 & a_4 \\ a_1+a_2+a_3+a_4-1 & a_2 & a_3 & a_4-1 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \rightarrow \\ \leftarrow \end{array} \begin{bmatrix} a_1+a_2+a_3+a_4-1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Die zuletzt gewonnene Matrix hat obere Dreiecksform, ihre Determinante ist

$$(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 - 1)(-1)^3 = 1 - (a_1 + a_2 + a_3 + a_4)$$

Die Ausgangsmatrix hat dann als Determinante diesen Ausdruck, multipliziert mit den Umkehrfaktoren (die an den Zeilen- und Spaltenumformungen jeweils unten notiert wurden, die gesuchte Determinante ist also

$$(\frac{1 - a_1 - a_2 - a_3 - a_4}{x_1 x_2 x_3 x_4}) \cdot (\frac{a_1 a_2 a_3 a_4}{x_1 x_2 x_3 x_3})$$

Eine ähnliche Rechnung wird auch in Abschnitt 5.5 durchgeführt, vgl. Beispiel 5.47 ⇨ vgl. S. 213.

Aufgabe 12. Es gilt laut Aufgabenstellung: Zeile = Sitzordnung für einen Tag. Somit beträgt die Zeilensumme für jede Zeile 1+2+3+4+5+6+7 = 28 (Die Summanden treten alle auf, nur deren Reihenfolge steht nicht fest). Addiert man nun auf die erste **Spalte** alle anderen Spalten auf, so erhält man die Matrix

$$\begin{bmatrix} 28 & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} & a_{1,5} & a_{1,6} & a_{1,7} \\ 28 & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} & a_{2,5} & a_{2,6} & a_{2,7} \\ 28 & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} & a_{3,5} & a_{3,6} & a_{3,7} \\ 28 & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} & a_{4,5} & a_{4,6} & a_{4,7} \\ 28 & a_{5,2} & a_{5,3} & a_{5,4} & a_{5,5} & a_{5,6} & a_{5,7} \\ 28 & a_{6,2} & a_{6,3} & a_{6,4} & a_{6,5} & a_{6,6} & a_{6,7} \\ 28 & a_{7,2} & a_{7,3} & a_{7,4} & a_{7,5} & a_{7,6} & a_{7,7} \end{bmatrix}$$

Die Determinante verändert sich dabei nicht. Jetzt zieht man die erste **Zeile** von allen anderen Zeilen ab, und erhält eine Matrix der Form:

$$\begin{bmatrix} 28 & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} & a_{1,5} & a_{1,6} & a_{1,7} \\ 0 & * & * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * & * & * \end{bmatrix}$$

die $*$-Einträge stehen für beliebige, natürlich nicht notwendigerweise gleiche, Einträge, welche aber (Differenzen ganzer Zahlen) wiederum ganze Zahlen sind. Die Determinante der Matrix ändert sich wiederum nicht. Die Determinante dieser Matrix ist nun aber wegen der Entwicklungsformel ein ganzzahlig Vielfaches von 28 (denn die Determinante der Rest-$*$-Matrix ist eine Summe von Produkten ganzer Zahlen, also wiederum eine ganze Zahl – übrigens ist auch 0 eine mögliche Lösung). Daher kann ein Sitzplan in Form einer Matrix mit $\det(A) = 7$ nicht erreicht werden.

Aufgabe 13.

a) $$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \det\left(\det\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \Big/ \det\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \det\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \Big/ \det\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\right)^T = \begin{pmatrix} -5/2 \\ 5/2 \end{pmatrix}$$

b) $$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 1\Big/\det\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 7 & 9 & 1 \end{bmatrix}\left(\det\begin{bmatrix} 5 & 3 & 3 \\ 5 & 4 & 6 \\ 5 & 9 & 1 \end{bmatrix}, \det\begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \\ 7 & 5 & 1 \end{bmatrix}, \det\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 5 \\ 7 & 9 & 5 \end{bmatrix}\right)^T = \begin{pmatrix} -5/2 \\ 5/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

c) $$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 1\Big/\det\begin{bmatrix} t & -t & 1 \\ -t & t & 1 \\ 1 & -t & t \end{bmatrix}\left(\det\begin{bmatrix} t & -t & 1 \\ 0 & t & 1 \\ t & -t & t \end{bmatrix}, \det\begin{bmatrix} t & t & 1 \\ -t & 0 & 1 \\ 1 & t & t \end{bmatrix} \det\begin{bmatrix} t & -t & t \\ -t & t & 0 \\ 1 & -t & t \end{bmatrix}\right)^T$$

$$= \begin{pmatrix} t/2 \\ (t-1)/2 \\ t/2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 14. Es wird jeweils das charakteristische Polynom und dann dessen Nullstellen berechnet. Diese sind dann die Eigenwerte der Matrix.

a) $\det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 3-\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda - 1$. Nullstellen sind $\lambda_{1,2} = 2 \pm \sqrt{5}$

b) $\det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda) \det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)(\lambda^2 - 3\lambda + 1)$

Nullstellen sind $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_{2,3} = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5}$.

c) $\det \begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -\lambda \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} -\lambda+3 & 1 & 1 & 1 \\ -\lambda+3 & -\lambda & 1 & 1 \\ -\lambda+3 & 1 & -\lambda & 1 \\ -\lambda+3 & 1 & 1 & -\lambda \end{bmatrix}$

$= \det \begin{bmatrix} -\lambda+3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -\lambda-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda-1 \end{bmatrix} = (3-\lambda)(-1-\lambda)^3.$

Nullstellen sind $\lambda_1 = 3$ und $\lambda_2 = -1$

Aufgabe 15.

a) Es muss jeweils gelten $Ax = \lambda x$. Weil A und x bekannt sind, kann man daraus λ gewinnen:

– $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, also $\lambda = 4$

– $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 40 \\ 15 \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix}$, also $\lambda = 5$

b) Es ist jeweils ein Basisvektor zu $Kern(A - \lambda I)$ zu bestimmen und so zu skalieren (mit einem Skalar zu multiplizieren), dass die vorgegebene Komponente passt, Dazu wird die Matrix $A - \lambda I$ in ZSF überführt:

– $A - (-2)_2 I = \begin{bmatrix} -2+2 & 0 \\ 2 & 4+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Basisvektor ist $\alpha \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$. Damit die erste Komponente passt, muss $\alpha = 2$ genommen werden, das ergibt den Eigenvektor $x = (6, -2)^T$.

– $A - (-2)I_3 = \begin{bmatrix} 3+2 & 3 & 3 \\ 1 & 1+2 & -1 \\ -3 & -3 & -3+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \\ -3 & -3 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{I \leftrightarrow II} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 5 & 3 & 3 \\ -3 & -3 & -1 \end{bmatrix}$

$\xrightarrow[III+3I]{II-5I} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -12 & 8 \\ 0 & 6 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{12}II} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 6 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{III-6II} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{I-3II}$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ Eigenvektor ist $\alpha(1, -\frac{2}{3}, -1)^T$ mit $\alpha \neq 0$. Der gesuchte Eigenvektor ergibt sich mit $\alpha = 9$ zu $(9, -6, -9)^T$

c) Der gesuchte Eigenvektor hat die Form $x = (1, 2, t)^T$. Also sind $t \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ gesucht mit $A(1, 2, t)^T = (\lambda, 2\lambda, t\lambda)^T$, d.h.

$$\begin{pmatrix} \lambda \\ 2\lambda \\ t\lambda \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ -6 & -6 & -6 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9+3t \\ 4-t \\ -18-6t \end{pmatrix}$$

Vergleicht man die ersten beiden Komponenten, so muss gelten: $\lambda = 9 + 3t, 2\lambda = 4 - t$. Eindeutige Lösung ist $t = -2$, $\lambda = 3$. Auch die dritte Gleichung $t\lambda = -18 - 6t$ passt zu dieser Festlegung. Es ist also $\lambda = 3$, $x = (1, 2, -2)^T$.

Ein ebenfalls möglicher, aber längerer Lösungsweg besteht darin, zunächst alle Eigenwerte der Matrix zu bestimmen. Das sind hier -5, 0 und 3. Zu jedem dieser Eigenwerte wird nun der allgemeine Eigenvektor bestimmt. Das sind (z.B.) die Vektoren $\alpha(-3, 2, 6)^T$, $\alpha(2, -3, 1)^T$ und $\alpha(-1, -2, 2)^T$. Nur in einem der Fälle, nämlich für $\lambda = 3$, kann man diesen Eigenvektor durch Festlegung von α an das in der Aufgabenstellung vorgegebene Muster anpassen.

d) Die einfachste Lösung ist hier $A = I_3$, denn es gilt $I_3 x = x = 1 \cdot x$ für alle $x \in \mathbb{R}^3$, also insbesondere für den Vektor in der Aufgabenstellung. Andere Matrizen zu finden, ist etwas mühseliger. Eine Möglichkeit besteht darin, mit Hilfe von x eine Matrix mit Rang 1 zu konstruieren, indem man x so mit sich selber multipliziert, dass dabei eine Matrix entsteht: Die Matrix

$$B = xx^t = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} (1, 2, -2) = \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 & 1 \cdot 2 & 1 \cdot (-2) \\ 2 \cdot 1 & 2 \cdot 2 & 2 \cdot (-2) \\ (-2) \cdot 1 & (-2) \cdot 2 & (-2) \cdot (-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -4 \\ -2 & -4 & 4 \end{bmatrix}$$

hat die Eigenschaft

$$Bx = (xx^T)x = x(x^T x) = \|x\|^2 x = 9x$$

Multipliziert man B mit $\frac{1}{9}$, dann erhält man die Matrix

$$A = \frac{1}{9} B = \begin{bmatrix} 1/9 & 2/9 & -2/9 \\ 2/9 & 4/9 & -4/9 \\ -2/9 & -4/9 & 4/9 \end{bmatrix}$$

welche den vorgegebenen Eigenwert 1 hat:

$$Ax = \frac{1}{9} Bx = \frac{1}{9} 9x = x$$

Eine Matrix mit Rang 2, welche die geforderte Eigenschaft hat, könnte man erhalten, indem man einen weiteren Vektor $y \in \mathbb{R}^3$, $y \neq \bar{0}$, findet, der orthogonal zu x ist, z.B. $y = (2, 2, 3)^T$. Dann ist $C = A + \alpha yy^T$ mit beliebigem $\alpha \neq 0$ eine Rang-2-Matrix mit der geforderten Eigenschaft, denn

$$Cx = (A + \alpha yy^T)x = Ax + \alpha(yy^T)x = Ax + \alpha(y^T x)y = Ax$$

denn $y^T x = 0$, weil y und x orthogonal sind. Mit einem dritten Vektor $z \in \mathbb{R}^3$, $z \neq \bar{0}$, der orthogonal zu x und y ist (für den oben angegebenen Vektor y wäre das z.B. $z = (-10, 7, 2)^T$), ergibt sich dann jede Matrix $D = A + \alpha yy^T + \beta zz^T$ als Rang-3-Matrix mit der geforderten Eigenschaft.

Aufgabe 16. $\det(A - \lambda I) = \lambda^2 - (t + 1)\lambda + t^2 + t$

Mögliche Nullstellen in λ sind $\lambda_{1,2} = \frac{t+1}{2} \pm \sqrt{\frac{(t+1)^2}{4} - t^2 - t} = \frac{t+1}{2} \pm \sqrt{\frac{-3t^2-2t+1}{4}}$, wobei der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen nichtnegativ sein muss.

Daher hat die Matrix einen Eigenwert für $t = t_1 = -1$ und $t = t_2 = \frac{1}{3}$, zwei Eigenwerte für $t \in]-1, \frac{1}{3}[$ und für andere Werte von t keinen Eigenwert

Aufgabe 17. $\det(A-\lambda I) = \lambda^2 - (a+c)\lambda + ac - b^2$

Nullstellen sind $\lambda_{1,2} = \frac{a+c}{2} \pm \sqrt{\frac{(a+c)^2}{4} - ac + b^2} = \frac{a+c}{2} \pm \sqrt{\frac{(a-c)^2}{4} + b^2}$

Der Ausdruck unter der Wurzel ist nie kleiner als Null, also hat die Matrix wenigstens einen reellen Eigenwert.

Aufgabe 18. Die Matrix $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^{10}$ hat die Eigenwerte $\lambda_1 = 3$ bzw. $\lambda_2 = -1$ mit normierten Eigenvektoren $x^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $x^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Setze diese zu einer Matrix $M = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ zusammen. Dann gilt $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^{10} = M\begin{bmatrix} 3^{10} & 0 \\ 0 & (-1)^{10} \end{bmatrix}M^T =$ $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 59049 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29525 & 29524 \\ 29524 & 29525 \end{bmatrix}$

Aufgabe 19.

a) $A := \frac{1}{100}\begin{bmatrix} 80 & 20 & 15 \\ 10 & 65 & 5 \\ 10 & 15 & 80 \end{bmatrix}$

b) $A\frac{1}{100}\begin{pmatrix} 45 \\ 30 \\ 25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45,75\% \\ 25,25\% \\ 29,00\% \end{pmatrix}$

c) $A^2 = \frac{1}{10000}\begin{bmatrix} 6750 & 3125 & 2500 \\ 1500 & 4500 & 875 \\ 1750 & 2375 & 6625 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{27}{40} & \frac{5}{16} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{20} & \frac{9}{20} & \frac{7}{80} \\ \frac{7}{40} & \frac{19}{80} & \frac{53}{80} \end{bmatrix}$

$A^2\frac{1}{100}\begin{pmatrix} 45 \\ 30 \\ 25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 46,00\% \\ 22,44 \\ 31,56\% \end{pmatrix}$

d) Die Marktaufteilung ändert sich nicht, wenn $Ax = x \Leftrightarrow Ax - I_3x = \bar{0} \Leftrightarrow (A - I_3)x = \bar{0}$ Man bestimme also einen Vektor $x \in Kern(A - I_3)$ mit $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ (Marktanteile!)

$A - I_3 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{3}{20} \\ \frac{1}{10} & -\frac{7}{20} & \frac{1}{20} \\ \frac{1}{10} & \frac{3}{20} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}$, Zeilenstufenform: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{5}{4} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

D.h. $x = \lambda(5,2,4)^T \Rightarrow x = (\frac{5}{11}, \frac{2}{11}, \frac{4}{11})^T$

Aufgabe 20.

a) Aus den Output-Input-Gleichungen folgt für die Leontief-Inverse

$$(I-A)^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \Leftrightarrow (I-A) = \begin{bmatrix} \frac{7}{10} & -\frac{1}{10} & -\frac{1}{10} \\ -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow A = I - \begin{bmatrix} \frac{7}{10} & -\frac{1}{10} & -\frac{1}{10} \\ -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{10} & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$$

b) Produktiv ist das Leontief-Modell für x, wenn $y = (I-A)x$ nur nichtnegative Einträge hat, von denen wenigstens einer positiv ist. Weil die Leontief-Inverse aber bereits bekannt ist, kann man für jeden beliebigen Output-Vektor y einen Input-Vektor x mittels $x = (I-A)^{-1}y$ berechnen. Dieser muss lediglich noch die Produktionsrestriktionen erfüllen, d.h. darf die Produktionskapazitäten der drei Anbieter nicht übersteigen. Beispielsweise sind solche Produktionsvektoren

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 100 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 200 \\ 200 \\ 200 \end{pmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 200 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 200 \\ 800 \\ 600 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 200 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 200 \\ 600 \\ 800 \end{pmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 50 \\ 50 \\ 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 200 \\ 450 \\ 450 \end{pmatrix}$$

Kapitel 4

Aufgabe 1.

a) Benachbarte Folgeglieder haben jeweils die Differenz $\frac{5}{4} = 2\frac{1}{2} - \frac{5}{4} = 3\frac{3}{4} - 2\frac{1}{2} = 5 - 3\frac{3}{4} = \frac{25}{4} - 5$.

Es handelt sich also um eine arithmetische Folge mit dem Startglied $\frac{5}{4}$ und dem Zuwachs $\frac{5}{4}$. Je nach Startindex kann man als explizites Bildungsgesetz z.B. $a_n = \frac{5}{4}n$, $n = 1, 2, \ldots$ oder (Indexverschiebung) $a_n = \frac{5}{4}n + \frac{5}{4}$, $n = 0, 1, 2\ldots$, ansetzen. Wir wählen die erste Darstellung.

Die Folge ist (streng) monoton wachsend ($a_{n+1} > a_n$ für $n \in \mathbb{N}$) und nach unten beschränkt ($a_n \geq \frac{5}{4}$ für $n \in \mathbb{N}$).

b) Benachbarte Folgeglieder haben das Verhältnis $\frac{2}{3} = \frac{3}{2}/\frac{9}{4} = 1/\frac{3}{2} = \frac{2}{3}/1 = \frac{4}{9}/\frac{2}{3}$.

Es handelt sich also um eine geometrische Folge mit dem Startglied $\frac{9}{4}$ und dem Diskontierungsfaktor $\frac{2}{3}$. Mit dem Startglied $a_1 = \frac{9}{4}$ lautet der allgemeine Folgenterm $b_n = \frac{9}{4}(\frac{2}{3})^{n-1} = \frac{27}{8}(\frac{2}{3})^n$.

Weil der Diskontierungsfaktor $0 < \frac{2}{3} < 1$ ist, handelt es sich um eine (streng) monoton fallende Folge ($b_{n+1} = \frac{2}{3}b_n < b_n$ für $n \in \mathbb{N}$), die nach oben und unten beschränkt ist ($0 < b_n < \frac{9}{4}$).

c) Benachbarte Folgeglieder haben das Verhältnis $(-\frac{16}{25})/\frac{4}{5} = \frac{64}{125}/(-\frac{16}{25}) = (-\frac{256}{625})/\frac{64}{125} = -\frac{4}{5}$

Es handelt sich daher um eine geometrische Folge mit dem Startglied $\frac{4}{5}$ und dem Diskontierungsfaktor $-\frac{4}{5}$. Ihr Folgenterm (mit Startglied c_1) lautet $c_n = \frac{4}{5} \cdot (-\frac{4}{5})^{n-1} = (-1)^{n-1}(\frac{4}{5})^n$.

Die Folge ist, wie man schon an den ersten drei Gliedern erkennen kann, nicht monoton (sondern hat alternierendes Verhalten) und sie ist, weil der Diskontfaktor $-1 < -\frac{4}{5} < 1$, nach unten und oben beschränkt, z.B. gilt $-1 < c_n < 1$. Die größte untere und die kleinste obere Schranke sind durch die beiden ersten Folgeglieder gegeben, d.h. es gilt $-\frac{16}{25} \leq c_n \leq \frac{4}{5}$.

Aufgabe 2. Es ist

- $160 = a_2 = a_1 \cdot q \Leftrightarrow a_1 = 160/q$
- $102,4 = a_4 = a_1 \cdot q^3$

Substituiert man a_1 in der zweiten Gleichung, so folgt

$$102,4 = \frac{160}{q} \cdot q^3 \Leftrightarrow q^2 = \frac{102,4}{160} = 0,64$$

Daraus ergibt sich $q^2 = 0,64$, d.h. $q = \pm 0,8$, was zu $a_1 = \pm 200$ führt. Weiter gilt $a_5 = a_1 \cdot q^4 = \pm 200 \cdot (\pm 0,8)^4 = \pm 81,92$.

Es gibt hier also zwei Lösungen: $a_1 = 200, a_5 = 81,92, q = 0,8$ sowie die jeweils negativen Lösungen.

Aufgabe 3. Es gilt $a_n = a_0 + dn$ und damit

- $25 = a_3 = a_0 + 3d \Leftrightarrow a_0 = 25 - 3d$
- $81 = a_{10} = a_0 + 10d \Leftrightarrow a_0 = 81 - 10d$

Durch Gleichsetzen: $25 - 3d = 81 - 10d$, d.h. $7d = 56 \Leftrightarrow d = 8$. Daraus folgt $a_0 = 25 - 3d = 1$ und damit $a_n = 8n + 1$, also insbesonder $a_5 = 41$. Die gesuchte Summe ist $s_4 = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 1 + 9 + 17 + 25 + 33 = 85$.

Ist der Startindex $n = 1$, so entfällt $a_0 = 1$ und die Summe ist $s_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 84$.

Aufgabe 4. Der Restwert nach n Jahren beträgt

- bei linearer Abschreibung ist $l_n = k - nb$, wobei k der Anfangswert und b der jährliche Abschreibungsbetrag ist,
- bei degressiver Abschreibung ist $d_n = k(\frac{4}{5})^n$

Aus dem Gespräch kann man folgern:

$$\begin{aligned} l_2 = d_2 - 2100 \Leftrightarrow & k - 2b = k\left(\frac{4}{5}\right)^2 - 2100 \Leftrightarrow k - 2b = \frac{16}{25}k - 2100 \\ \Leftrightarrow & \frac{9}{25}k - 2b = -2100 \Leftrightarrow b = \frac{9}{50}k + 1050 \\ l_3 = d_4 \Leftrightarrow & k - 3b = k\left(\frac{4}{5}\right)^4 \Leftrightarrow k - 3b = \frac{256}{625}k \Leftrightarrow b = \frac{369}{1875}k \end{aligned}$$

Gleichsetzen ergibt

$$\tfrac{9}{50}k + 1050 = \tfrac{369}{1875}k \Leftrightarrow \left(\tfrac{369}{1875} - \tfrac{9}{50}\right)k = 1050 \Leftrightarrow \tfrac{21}{1250}k = 1050 \Leftrightarrow k = 62500$$

Eingesetzt ergibt sich $b = \frac{9}{50} \cdot 62500 + 1050 = 18 \cdot 625 + 1050 = 12300$. Der Anfangswert betrug 62500€. Jährlich wurden 12300€ linear abgeschrieben.

Aufgabe 5. $y_{n+1} - y_n = 5i_n = 5s_n = 5\frac{1}{10}y_n = \frac{1}{2}y_n$. Daraus ergibt sich $y_{n+1} = (1 + \frac{1}{2})y_n = \frac{3}{2}y_n$. Speziell also $y_n = \frac{3}{2}y_{n-1} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 y_{n-2} = \cdots = \left(\frac{3}{2}\right)^n y_0 = \left(\frac{3}{2}\right)^n$

Aufgabe 6. Durch rückwärts Einsetzen ergibt sich

$$\begin{aligned}
p_n &= 1 + \frac{1}{2}p_{n-1} = 1 + \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{2}p_{n-2}) = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 p_{n-2}\\
&= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(1 + \frac{1}{2}p_{n-3}\right) = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 p_{n-3}\\
&\vdots\\
&= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^n p_0\\
&= \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} + \left(\frac{1}{2}\right)^n = 2 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n
\end{aligned}$$

Die Folge ist konvergent (geometrische Folge zu $p = \frac{1}{2}$ hat den Grenzwert 0) mit Grenzwert 2.

Aufgabe 7.

a) Es handelt sich um eine gebrochen-rationale Folge: Nur für $t = 0$ ist der Nennergrad größer als der Zählergrad, die Folge hat dann Grenzwert Null (Nullfolge), allerdings muss $t = 0$ laut Aufgabenstellung gar nicht geprüft werden. Für $t = 1$ ist der Zählergrad größer als der Nennergrad, dann ist die Folge divergent. In allen andere Fällen stimmen Zähler- und Nennergrad überein, dann ist die Folge konvergent und ihr Grenzwert ist der Quotient der Leitkoeffizienten t und $t-1$, also $\frac{t}{t-1}$.

b) $a_n = \frac{1}{t^2+1}\left(\frac{t^2+t-1}{t^2+1}\right)^n$ ist also eine geometrische Folge der Form $a_n = a_0 q^n$ mit Diskontfaktor $q = \frac{t^2+t-1}{t^2+1}$. Der Wert von q bestimmt das Konvergenzverhalten. Man prüft, für welche $t > 0$ der Wert 1 bzw. -1 angenommen wird.

- Der Fall $q = 1$ (konstante und damit konvergente Folge a_n) tritt ein für $\frac{t^2+t-1}{t^2+1} = 1 \Leftrightarrow t^2 + t - 1 = t^2 + 1 \Leftrightarrow t = 2$. Grenzwert ist dann $a_0 = \frac{1}{2^2+1} = \frac{1}{5}$.
- Der Fall $q = -1$ (alternierende und damit divergente Folge a_n) tritt ein für $\frac{t^2+t-1}{t^2+1} = -1 \Leftrightarrow t^2 + t - 1 = -t^2 - 1 \Leftrightarrow t^2 + t = 0 \Leftrightarrow t = 0$
- Beispielsweise für $t = 1$ ergibt sich $q = \frac{1}{2} < 1$. Man kann jetzt direkt schließen, dass $q < 1$ für alle $0 < t < 2$, denn wäre z.B. $q > 1$ für ein $t \in]0;2[$, so müsste es nach dem Zwischenwertsatz (vgl. [Terveer/Terveer, 2011], Seite 144) eine weitere Stelle in $]0;2[$ geben, für die $q = 1$ gilt. Das ist aber nicht möglich, weil nur für $t = 2$ solch eine Stelle gegeben ist. Mit der gleichen Argumentation kann es kein $t \in]0;2[$ geben mit $q < -1$. Also gilt $-1 < q < 1$ für alle $t \in]0;2[$. Für $0 < t < 2$ ist die Folge also konvergent.
- Beispielsweise für $t = 3$ gilt $q = \frac{11}{10} > 1$, dann gilt mit ähnlicher Argumentation wie oben schon $q > 1$ für alle $t > 2$. Für $t > 2$ ist die Folge also divergent.

Man kann den Konvergenz- und Divergenzbereich natürlich auch durch das Auflösen der Ungleichungen $-1 < \frac{t^2+t-1}{t^2+1} < 1 \Leftrightarrow -t^2 - 1 < t^2 + t - 1 < t^2 + 1$ gewinnen. Dabei bekommt man unter der Voraussetzung $t > 0$ wieder das Intervall $0 < t < 2$ und muss dann noch die Fälle $q = \pm 1$ wie oben diskutieren. Die zuerst genannte Argumentation mit dem Zwischenwertsatz für stetige Funktionen ist angelehnt an diejenige des Vorzeichenverhaltens einer stetigen Funktion zwischen ihren Nullstellen – man muss innerhalb der dadurch festgelegten Intervalle immer nur einen Referenzwert auswerten, um das allgemeine Verhalten in diesem Intervall zu beschreiben.

Aufgabe 8.

a) Zum Vergleich der Folgeglieder:

$$\begin{aligned}
&\sqrt{n+1000}-\sqrt{n} > \sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n} > \sqrt{n+\frac{n}{1000}}-\sqrt{n}\\
\Leftrightarrow&\sqrt{n+1000} > \sqrt{n+\sqrt{n}} > \sqrt{n+\frac{n}{1000}}\\
\Leftrightarrow&n+1000 > n+\sqrt{n} > n+\frac{n}{1000}\\
\Leftrightarrow&1000 > \sqrt{n} > \frac{n}{1000}\\
\Leftrightarrow&n < 1000000
\end{aligned}$$

b) Die noch fehlende Konvergenzuntersuchung:

$$\begin{aligned}
\sqrt{n+1000}-\sqrt{n} &= \frac{\sqrt{n+1000}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+1000}+\sqrt{n}}(\sqrt{n+1000}+\sqrt{n})\\
&= \frac{n+1000-n}{\sqrt{n+1000}+\sqrt{n}} = \frac{1000}{\sqrt{n+1000}+\sqrt{n}} \to 0 \text{ für } n\to\infty
\end{aligned}$$

c) Schließlich ist $c_n = \sqrt{n+\frac{n}{1000}}-\sqrt{n} = \sqrt{n}(\sqrt{1+\frac{1}{1000}}-1)$ unbeschränkt und daher divergent.

Aufgabe 9. Es ist stets $a_n \geq 1$, denn $a_1 = 1$ und für $n \geq 1$ ist $a_{n+1} = 1+\frac{1}{a_n} \geq 1$, da offenbar alle Folgeglieder nichtnegativ sind. Besitzt die Folge einen Grenzwert a, so kann dieser also nicht gleich Null sein. Dann liefern die Grenzwertsätze:

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{a_n}) = 1+\frac{1}{\lim_{n\to\infty} a_n} = 1+\frac{1}{a}$$

Es ergibt sich also

$$a = 1+\frac{1}{a} \Leftrightarrow a^2 \overset{a>0}{=} a+1 \Leftrightarrow a^2-a-1=0$$

Lösungen dieser quadratischen Gleichung sind $a = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5}$, und $a = \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{5}$. Letzterer Wert ist aber negativ und kommt aufgrund des oben Gesagten nicht in Frage.

Aufgabe 10.

a) Die Differenz $d_n = t_n - t_{n-1}$ bildet eine geometrische Folge mit Startwert $d_1 = t_1 - t_0 = 10$ und $d_n = \frac{4}{5}d_{n-1}$, d.h. $d_n = 10\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}$. Es gilt also die implizite Formel für t_n

$$t_n = d_n + t_{n-1} = 10\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1} + t_{n-1}$$

Setzt man diese Gleichung nun immer wieder ein (ähnlich wie beim Spinnwebmodell), so erhält man

$$\begin{aligned} t_n &= 10\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1} + t_{n-1} \\ &= 10\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1} + 10\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^{n-2} + t_{n-2} \\ &= 10\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1} + 10\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^{n-2} + \cdots + 10\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^{n-2} + t_0 \\ &= 2000 + 10\left(\left(\frac{4}{5}\right)^{0} + \left(\frac{4}{5}\right)^{1} + \cdots + \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}\right) \\ &= 2000 + 10\left(1-(\frac{4}{5})^n\right) \Big/ \left(1-\frac{4}{5}\right) \\ &= 2000 + 50(1-(4/5)^n) \end{aligned}$$

Im konkreten Fall liegt die Verschuldung im Jahr t_n um $30000 = 6\cdot 5000$ über der des Jahres 2000, d.h. es ist $n = 6$ einzusetzen. Das ergibt $t_6 = 2000 + 50(1 - 4094/1526) \approx 2036,89$. Dieser Zeitpunkt liegt im Jahr 2036.

b) Die Folge der Zeitpunkte t_n ist eine konvergente Folge mit Grenzwert $\lim_{n\to\infty} t_n = 2010 + 50\cdot(1-0) = 2050$. Weil bis zu diesem Zeitpunkt also beliebig viele Erhöhungen der Pro-Kopf-Verschuldung um 5000 WEuro stattfinden, kann man von einer Explosion der Schulden spätestens in 2050 sprechen. Bis 2050 spätestens muss also der Schuldenzuwachs gebremst worden sein.

Aufgabe 11. Folgeglieder sind $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = \frac{1}{2}$, $a_3 = \frac{3}{4} = 1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$, $a_4 = \frac{5}{8} = 1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}$ Man liest folgendes Muster ab, das dann iteriert wird:

$$\begin{aligned} a_n &= 1 - \frac{1}{2}a_{n-1} = 1 - \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{2}a_{n-2}) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}a_{n-2} \\ &= 1 - \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^3 a_{n-3} = 1 - \frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \cdots + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\ &= \frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n) \to \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Allgemeines Schema für $b_0 = a$, $b_1 = b$ und $b_n = \frac{b_{n-1}+b_{n-2}}{2}$ ist

$$\begin{aligned} b_0 &= a + (b-a)0 = a + (b-a)a_0 \\ b_1 &= a + (b-a)1 = a + (b-a)a_1 \\ b_2 &= \frac{b_0+b_1}{2} = \frac{a + (b-a)a_0 + a + (b-a)a_1}{2} = a + (b-a)\frac{1}{2} \\ &= a + (b-a)a_2 \\ b_3 &= \frac{b_1+b_2}{2} = \frac{a + (b-a)a_1 + a + (b-a)a_2}{2} = a + (b-a)\frac{a_1+a_2}{2} \\ &= a + (b-a)a_3 \end{aligned}$$

Es ergibt sich als n-tes Folgeglied stets

$$b_n = a + (b-a)a_n = a + \frac{2}{3}(b-a)(1-(-\frac{1}{2})^n)$$

Grenzwert ist $a + \frac{2}{3}(b-a)$

Aufgabe 12. Sämtliche Reihen müssen in die Form der unendlichen geometrischen Reihe überführt werden: $\sum_{i=0}^{\infty} p^i = \frac{1}{1-p}$ für $|p| < 1$

a) $\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + ... = (\frac{1}{x})^1 + (\frac{1}{x})^2 + (\frac{1}{x})^3 + ... = \sum_{i=1}^{\infty}(\frac{1}{x})^i$
$= -1 + 1 + \sum_{i=1}^{\infty}(\frac{1}{x})^i = -1 + \sum_{i=0}^{\infty}(\frac{1}{x})^i = -1 + \frac{1}{1-\frac{1}{x}} = \frac{1}{x-1}$
für $|p| := \left|\frac{1}{x}\right| < 1 \iff |x| > 1$

b) $x + \sqrt{x} + 1 + \frac{1}{\sqrt{x}} + ... = x^1 + x^{1/2} + x^0 + x^{-1/2} + ...$
$= x(x^0 + x^{-1/2} + x^{-2/2} + x^{-3/2} + ...)$
$= x[(x^{-1/2})^0 + (x^{-1/2})^1 + (x^{-1/2})^2 + (x^{-1/2})^3 + ...]$
$= x\sum_{i=0}^{\infty}(x^{-1/2})^i = x\frac{1}{1-x^{-1/2}} = x\frac{1}{1-\frac{1}{\sqrt{x}}} = \frac{\sqrt{x}x}{\sqrt{x}-1}$
für $|p| := \left|\frac{1}{\sqrt{x}}\right| < 1 \iff x > 1$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} x^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty}(x^2)^n = -1 + \sum_{n=0}^{\infty}(x^2)^n = -1 + \frac{1}{1-x^2} = \frac{x^2}{1-x^2}$
für $|p| := \left|x^2\right| < 1 \iff |x| < 1$

d) $1 + \frac{1}{1+x} + \frac{1}{(1+x)^2} + ... = (\frac{1}{1+x})^0 + (\frac{1}{1+x})^1 + (\frac{1}{1+x})^2 + ... = \sum_{i=0}^{\infty}(\frac{1}{1+x})^i$
$= \frac{1}{1-\frac{1}{1+x}} = \frac{1}{x} + 1$
für $|p| := \left|\frac{1}{1+x}\right| < 1 \iff (\ x > 0 \ \vee \ x < -2\ )$

Aufgabe 13. Die Dreiecke, welche die Quadrate verbinden, sind ähnlich und stimmen deshalb in allen Verhältnissen überein, insbesonderem im Verhältnis der Hypotenuse zur längeren Kathete. Beim rechts stehenden Baum ist dies Verhältnis $\frac{18}{20} = \frac{9}{10}$. Die Längen l_n aufeinander folgender Quadrate haben also die Eigenschaft $l_1 = 20$, $l_2 = 18$, und allgemein $l_n = \frac{9}{10}l_{n-1}$, d.h. aufgelöst $l_n = 20 \cdot (\frac{9}{10})^{n-1}$

a) Die Höhe des Pythagorasbaumes beträgt $\sum_{n=1}^{13} l_n = \sum_{n=1}^{13} 20 \cdot (\frac{9}{10})^{n-1} = 20 \cdot \sum_{n=0}^{12}(\frac{9}{10})^n = 20 \cdot \frac{1-(9/10)^{13}}{1-9/10} = 200 \cdot (1-(9/10)^{13}) \approx 200 \cdot 0.746 \approx 149,16$

b) Die maximale Höhe bekommt man durch Summation aller l_n als $20 \cdot \sum_{n=1}^{\infty}(\frac{9}{10})^{n-1} = 20 \cdot \sum_{n=0}^{\infty}(\frac{9}{10})^n = 20 \cdot \frac{1}{1-9/10} = 200$

Aufgabe 14. Die zugehörigen Potenzreihen werden jeweils gliedweise differenziert, die dabei sich ergebene Potenzreihe wird so weit wie möglich vereinfacht und ggf. mit den in Tabelle 4.2 ⇨ vgl. S. 146 befindlichen Musterreihen verglichen:

a) $f(x) = \cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} \pm \cdots.$

$f'(x) = 0 - \frac{2x}{2} + \frac{4x^3}{24} - \frac{6x^5}{720} \pm \cdots = -(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} \mp \cdots) = -\sin(x)$

b) $f(x) = \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \pm \cdots$

$f'(x) = 1 - \frac{2x}{2} + \frac{3x^2}{3} - \frac{4x^3}{4} \pm \cdots = 1 - x + x^2 - x^3 \pm \cdots = \frac{1}{1-(-x)} = \frac{1}{1+x}$

c) $f(x) = \arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} \pm \cdots$

$f'(x) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 \pm \cdots = \frac{1}{1-(-x^2)} = \frac{1}{1+x^2}$

Aufgabe 15. Herleitung mittels **erzeugender Funktionen**

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 + 1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots \\ &= a_0 + a_1x + \frac{1}{2}a_0x^2 + \frac{1}{2}a_1x^2 + \frac{1}{2}a_1x^3 + \frac{1}{2}a_2x^3 + \cdots \\ &= a_0 + a_1x + \frac{1}{2}x^2(a_0 + a_1x + \cdots) + \frac{1}{2}x(a_1x + a_2x^2 + \cdots) \\ &= x + \frac{1}{2}x^2f(x) + \frac{1}{2}xf(x) \end{aligned}$$

Auflösung nach $f(x)$ ergibt mittels Partialbruchzerlegung und Einsetzen der geometrischen Reihen $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ und $\frac{1}{1+\frac{x}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty}(-\frac{1}{2})^n x^n$

$f(x) = \frac{x}{(1-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x)} = \frac{x}{(1+\frac{x}{2})(1-x)} = \frac{2}{3}\frac{1}{1-x} - \frac{2}{3}\frac{1}{1+\frac{x}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3} - \frac{2}{3}(-\frac{1}{2})^n\right)x^n$

Koeffizientenvergleich ergibt den Folgenterm$a_n = \frac{2}{3} - \frac{2}{3}(-\frac{1}{2})^n$.

Aufgabe 16.

a) Es wird zunächst anhand des Schaubildes mit den dargestellten Angebots- und Nachfragefunktionen A, D gerechnet:

- Preis in Periode 1: Beim Preis $p_0 = 5$ ist in der nächsten Periode das Angebot $x = 5$ vorhanden, denn $A(5) = 5$. Dieses Angebot entspricht der Nachfrage und der Preis ergibt sich aus dieser Nachfrage: $p_1 = D(5) = 0$.
- Preis in Periode 2: Entsprechend gilt $A(0) = 0$ und $p_2 = D(0) = 4$.
- Preis in Periode 3: $A(4) = 4$ und $p_3 = D(4)$. Spätestens hier ist das Ablesen aus dem Diagramm nicht mehr möglich. Die Nachfragefunktion muss ermittelt werden. Es ist $D(x) = d_0 + d_1x$ mit $D(0) = 4 = d_0$ und $D(5) = 0 = 4 + 5d_1$, also $d_1 = -\frac{4}{5}$.Die Nachfragefunktion lautet also $D(x) = 4 - \frac{4}{5}x$. Dann gilt $p_3 = D(4) = 4 - \frac{4}{5}\cdot 4 = \frac{4}{5}$
- Preis in Periode 4: Die Angebotsfunktion lautet hier $A(x) = x$. Zu $p_3 = \frac{4}{5}$ gehört also das Angebot $\frac{4}{5}$ in Periode 4. Dazu lautet der von der Nachfrage festgelegte Preis $p_4 = D(\frac{4}{5}) = 4 - \frac{4}{5}\cdot\frac{4}{5} = \frac{84}{25}$

b) Die allgemeine Rechnung aus der vorangegangenen Teilaufgabe ist $p_n = 4 - \frac{4}{5}p_{n-1}$ (Preis der aktuellen Periode und Angebotsmenge der Folgeperiode stimmen bei der Angebotsfunktion $A(x) = x$ wertmäßig überein). Die Rekursion wird wiederholt eingesetzt:

$$\begin{aligned} p_n &= 4 - \frac{4}{5}p_{n-1} = 4 - \frac{4}{5}(4 - \frac{4}{5}p_{n-2}) = 4 - 4\cdot\frac{4}{5}4 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 p_{n-2} \\ &\dots \\ &= 4\left(1 - \frac{4}{5} + \left(-\frac{4}{5}\right)^2 \mp \cdots + \left(-\frac{4}{5}\right)^{n-1}\right) + \left(-\frac{4}{5}\right)^n \cdot 5 \\ &= 4\cdot\frac{1-(-\frac{4}{5})^n}{1+\frac{4}{5}} + \left(-\frac{4}{5}\right)^n \cdot 5 \\ &= \frac{20}{9}\cdot\left(1 - \left(-\frac{4}{5}\right)^n\right) + \left(-\frac{4}{5}\right)^n \cdot 5 = \frac{20}{9} + \frac{25}{9}\cdot\left(-\frac{4}{5}\right)^n \end{aligned}$$

Natürlich kann die explizite Form auch direkt unter Rückgriff auf die allgemeine Darstellung in Abschnitt 4.4 gewonnen werden: Hier ist $A(x) = x = \gamma + \delta x$ mit $\gamma = 0$, $\delta = 1$ und $D(x) = 4 - \frac{4}{5}x = \alpha + \beta x$ mit $\alpha = 4$ und $\beta = -\frac{4}{5}$. Die explizite Preisentwicklung ist dann $p_n = \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{\delta - \beta} + (p_0 - \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{\delta - \beta})(\frac{\beta}{\delta})^n = \frac{20}{9} + \frac{25}{9} \cdot \left(-\frac{4}{5}\right)^n$.

c) Nach den Grenzwertsätzen (die Preisfolge wird mit Hilfe einer geometrischen Folge zum Diskontfaktor $-\frac{4}{5}$ gebildet) ist (p_n) konvergent mit Grenzwert $\frac{20}{9}$

Aufgabe 17. Ansatz: Weil die Einzahlung zu Beginn des Jahres erfolgt, wird auch sie, nicht nur das Kapital zu Beginn des Jahres, verzinst, also $K_n = qK_{n-1} + qr$. Die Grundformel für nachschüssige Rechnung wird auf qr anstelle r angewandt und ergibt: $K_n = K_0 q^n + qr\frac{q^n - 1}{q - 1}$

Aufgabe 18. Es handelt sich hier um die Grundformel der Kapitalentwicklung $K_n = K_0 q^n + r\frac{q^n - 1}{q - 1}$ mit $K_0 = 0$. Soll $K_n = 40000$ sein, so folgt hieraus $r = 40000\frac{q - 1}{q^n - 1}$.

a) Bei jährlicher Verzinsung ist $n = 12$, $q = 1{+}2,4/100 = 1,024$ und $r = 40000\frac{0{,}024}{1{,}024^{12} - 1} \approx 2915,91$.

b) bei vierteljährlicher Verzinsung ist $n = 12 \cdot 4 = 48$, $q = 1 + 2,4/400 = 1,006$ und $r = 40000\frac{0{,}006}{1{,}006^{48} - 1} \approx 721,55$.

c) bei monatlicher Verzinsung ist $n = 12 \cdot 12 = 144$, $q = 1 + 2,4/1200 = 1,002$ und $r = 40000\frac{0{,}002}{1{,}002^{144} - 1} \approx 239,97$.

Aufgabe 19.

a) Bei stetiger Verzinsung ergibt sich nach einem Jahr das Kapital $10360 = K_1 = K_0 \cdot e^{p/100} = 10000 \cdot e^{p/100}$, also $10360 = 10000\dot{e}^{p/100}$. Aufgelöst nach p ergibt sich $p = 100(\ln(10360/10000)) \approx 3,54$.

b) Wird mit dem Zinssatz der letzten Teilaufgabe und unterjähriger vierteljährlicher Verzinsung gerechnet und ergibt sich nach einem Jahr (vier Quartalen) das Kapital 10360, so gilt $10360 = (1 + 3,54/400)^4 \cdot K_0$, also $K_0 = 10360/(1 + 3,54/400)^4 \approx 10001,55$.

Aufgabe 20.

a) Kapital nach 240 Monaten aufgebraucht, d.h. $K_{240} = 0$, d.h. $K_0 q^{240} = 1250(q^{240} - 1)/(q - 1)$, d.h. $K_0 = 1250 \cdot \frac{q^{240} - 1}{q - 1}/q^{240} = 1250 \cdot 346,87/2,01 \approx 215532,21$.

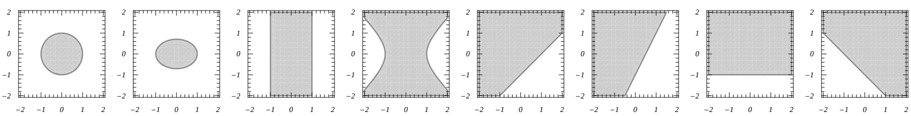
b) bei ewiger Rente muss das Kapital $K_0 = r/(q - 1) \approx 428571,42$ betragen.

Aufgabe 21. Zum genannten internen Zinsfuß ist $NPV = 0$. Für die Investition ergibt sich dann $I = \frac{r}{p/100}\frac{q^n - 1}{q^n} + \frac{\ell}{q^n} = (r(q^n - 1)/(q - 1) + \ell)/q^n \approx 250643,14$

Kapitel 5

Aufgabe 1.

a) $\mathbb{D}_i$ schraffiert von links nach rechts: $\mathbb{D}_1$ mit $t = 1, 2, 0, -1$, $\mathbb{D}_2$ mit $t = 1, 2, 0, -1$:



b) Kreis: $\mathbb{D}_1$ mit $t = 1$; Ellipse: $\mathbb{D}_1$ mit $t = 1$ und $t = 2$; Polytop: $\mathbb{D}_1$ mit $t = 0$ und $\mathbb{D}_2$.

c) konvex sind $\mathbb{D}_1$ mit $t = 1, 2, 0$ und $\mathbb{D}_2$.

Im Webauftritt finden Sie zwei mit GeoGebra erzeugte Applets, welche die Mengen skizzieren. Für $\mathbb{D}_1$ können Sie dort auch die Konvexität mit geeigneten Verbindungslinien prüfen.

Aufgabe 2.

a) f setzt sich additiv aus Monomen vom Grad 1 (der letzte Summand) und 2 (die ersten beiden Summanden) zusammen. f ist also definitionsgemäß ein Polynom zweiten Grades und daher auch eine quadratische Funktion. Für $c = 0$ entfällt der lineare Term und alle Summanden sind Monome vom Grad 2. Dann handelt es sich bei f um eine quadratische Form. Sind andererseits $a = b = 0$, so liegt nur ein linearer Term vor; dann ist f eine lineare Funktion.

b) Man schreibe $f(x, y) = y(x^2 - 1)/(x + 1) = y(x + 1)(x - 1)/(x - 1)$. Für $x \neq 1$ darf man kürzen und erhält $f(x, y) = xy + y$. Die Funktion lässt sich auf diese Art stetig ergänzen, das Ergebnis ist ein Polynom von Grad 2, also eine quadratische Form. Weil die Summanden nicht beide denselben Grad haben, handelt es sich nicht um eine quadratische Form.

c) Für $t = 0$ gilt $f(x, y) = x^{y^0} = x^1$ (bzw. $f(x, y) = (x^y)^0 = 1$. Beides sind Polynome und lineare Funktionen die zweite Funktion ist gleichzeitig konstante Funktion. Für $t \neq 0$ handelt es sich in beiden Fällen nicht um ein Polynom.

Aufgabe 3.

a) Sei (x_n, y_n) eine Folge mit $\lim_{n\to\infty}(x_n, y_n) = (3, 2)$, d.h. $\lim_{n\to\infty} x_n = 3$ und $\lim_{n\to\infty} y_n = 2$. Dann gilt $\lim_n \to \infty f(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n^2 + y_n - 1 = 3^2 + 2 - 1 = 10$. Dieser Grenzwert ergibt sich unabhängig von der Wahl der konvergenten Folge, d.h. es ist $\lim_{(x,y)\to(3,2)} f(x, y) = 10 = f(3, 2)$. f ist also auch stetig in $(3, 2)$.

b) Man nutzt aus: $h : [0; \infty[\to \mathbb{R}$, $h(t) = \sqrt{t}$ ist eine stetige Funktion, d.h. für jedes $t_0 > 0$ und jede Folge $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $[0; \infty[$ mit $\lim\limits_{t_n = t_0}$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{t_n} = \sqrt{\lim_{n\to\infty} t_n} = \sqrt{t_0}$.

Es sei jetzt (x_n, y_n) eine Folge mit $\lim_{n\to\infty}(x_n, y_n) = (1, 3)$ (d.h. konvergenten Komponentenfolgen wie in der vorangegangenen Teilaufgabe) derart, dass $1 + 2x_n - y_n \geq 0$. Dann ist $\lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} \sqrt{1 + 2x_n - y_n} = \sqrt{\lim_{n\to\infty}(1 + 2x_n - y_n)} = \sqrt{0} = 0$. Der Grenzwert ist weiter unabhängig von der Wahl dieser Punktfolge, also gilt auch $\lim_{(x,y)\to(1,3)} f(x, y) = 0 = f(1, 3)$. f ist also auch stetig in $(1, 3)$.

c) Der Ausdruck x/y ist Quotient der stetigen Koordinatenfunktionen $(x, y) \mapsto x$ und $(x, y) \mapsto y$. Wenn $t \neq 0$, so ist gemäß Regel [2] des Merksatzes auf Seite 165 in $(t, 2t)$ stetig. Der Funktionsgrenzwert stimmt dann mit dem Funktionswert überein: $\lim_{(x,y)\to(t,2t)} x/y = t/2t = \frac{1}{2}$.

Für $t = 0$ ist schon der Funktionswert $f(0, 0)$ nicht erklärt, die Funktion kann dort auch nicht stetig sein. Außerdem kann die Folge $(x_n/y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je nach Wahl der Nullfolgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durchaus variierende Grenzwerte haben oder sogar gar nicht konvergieren:

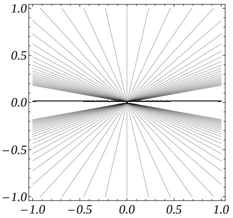
– z.B. $x_n = 1/n, y_n = 1/n$. Dann ist $x_n/y_n = 1$ konvergent mit Grenzwert 1.

– z.B. $x_n = 1/n, y_n = -1/n$. $x_n/y_n = -1$ ist konvergent mit Grenzwert -1.

– z.B. $x_n = 1/n, y_n = 1/n^2$. Dann ist $x_n/y_n = n$ divergent.

Daher existiert der Grenzwert $\lim_{(x,y)\to(0,0)} x/y$ nicht.

Dass in der Definitionslücke $(0,0)$ ein Ausnahmeverhalten vorliegt, kann man auch am Konturdiagramm der Funktion erkennen:



Aufgabe 4.

a) Wenn (x,y) auf der Niveaulinie $N_g(c)$ liegt, so gilt $2xy = c$, d.h. $xy = c/2$, d.h. (x,y) liegt auf der Niveaulinie $N_f(c/2)$. Umgekehrt liegt jeder Punkt $(x,y) \in \mathbb{N}_f(c/2)$ auch schon in $N_g(c)$. Es gilt also $N_g(c) = N_f(c/2)$.

b) Ist (x,y) ein Punkt auf $N_h(c)$, so gilt $x(y+1) = c$. Für den Punkt $(x,y') = (x,y+1) = (x,y)+(0,1)$ gilt also $xy' = c$, d.h. $(x,y') \in N_f(c)$ Der Punkt (x,y') geht aus (x,y) durch eine Vertikalverschiebung nach oben hervor. Umgekehrt geht (x,y) aus (x,y') durch eine Vertikalverschiebung nach unten hervor. Jede Niveaulinie von h entsteht also aus einer Niveaulinie von f durch Vertikalverschiebung um 1 Einheit.

c) Wie in der vorangegangenen Aufgabe gilt: $(x,y) \in \mathbb{N}_u(c) \Leftrightarrow (x,y)+(-1,1) \in N_f(c)$. Jede c-Niveaulinie von u entsteht also durch Verschiebung um 1 Einheit nach rechts und 1 Einheit nach unten aus der c-Niveaulinie von f.

Aufgabe 5. Man berechnet $\lim_{p\to 0} \ln(\alpha x^p + (1-\alpha)y^p)^{1/p})$.

Aufgrund des Logarithmengesetzes $\ln(a^x) = \ln(a) \cdot x$ lässt sich der Ausdruck dann nämlich als Produkt eines Logarithmus und von $1/p$ schreiben, also als Quotient, in dessen Nenner p auftritt. Das ergibt also

$$\ln((\alpha x^p + (1-\alpha)y^p)^{1/p}) = \frac{\ln(\alpha x^p + (1-\alpha)y^p)}{p}$$

Zähler und Nenner haben für $p \to 0$ jeweils den Grenzwert 0 und sind differenzierbar. Man darf daher die L'Hospital'sche Regel ([Terveer/Terveer, 2011], Seite 154) anwenden, nach der man Zähler und Nenner durch ihre Ableitungen nach p ersetzen darf:

$$\lim_{p\to 0} \frac{\ln(\alpha x^p + (1-\alpha)y^p)}{p} = \lim_{p\to 0} \frac{\frac{\alpha \ln(x)x^p + (1-\alpha)\ln(y)y^p}{\alpha x^p + (1-\alpha)y^p}}{1}$$

Den Grenzwert für $p \to 0$ darf man jetzt aber durch Einsetzen von $p = 0$ bilden (der Ausdruck ist stetig in p). Das ergibt schließlich $\alpha \ln(x) + (1-\alpha)\ln(y) = \ln(x^\alpha y^{1-\alpha})$. Insgesamt folgt also

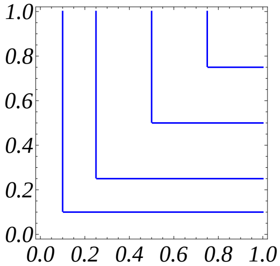
$$\lim_{p\to 0} \ln((\alpha x^p + (1-\alpha)y^p)^{1/p}) = \frac{\ln(\alpha x^p + (1-\alpha)y^p)}{p} = ln(x^\alpha y^{1-\alpha}).$$

Nun darf man beide Seiten exponenzieren (wodurch der Logarithmus jeweils entfällt), und die Grenzwertaussage überträgt sich:

$\lim_{p\to 0}((\alpha x^p + (1-\alpha)y^p)^{1/p}) = (x^\alpha y^{1-\alpha})$.

Aufgabe 6.

a) Im Spezialfall ist $f(x, y) = \min(x, y)$. Für $(x, y) > 0$ gilt $\min(x, y) = c$ genau dann, wenn entweder $x = c$ und $y \geq c$ oder $y = c$ und $x \geq c$. Die c-Niveaulinie setzt sich also aus den Geradenstücken $\{(c, t) : t \geq c\}$ und $\{(t, c) : t \geq c\}$ zusammen. Das ergibt gemäß Aufgabenstellung die folgenden Iso-Quanten:



b) Sind x, y die Faktoreinsatzmengen, und nimmt man an, dass je Einheit des Produktes a Einheiten des ersten und b Einheiten des zweiten Faktors benötigt werden, so entspricht x/a und y/b der herstellbaren Menge des Produktes, wobei aber immer nur die kleinere dieser beiden Produktmengen realisiert werden kann. Ein Überschuss im anderen Produktionsfaktor ist nicht ausnutzbar.

c) Für $\lambda > 0$ ist $f(\lambda x, \lambda y) = c\min\left(\frac{\lambda x}{a}, \frac{\lambda y}{b}\right)^r = c(\lambda \min\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}\right))^r = c\lambda^r \min\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}\right))^r = \lambda^r f(x, y)$. f ist also positiv homogen vom Grad r.

Aufgabe 7.

a) $f(\lambda x, \lambda y)(\lambda x)^2 + \lambda x \lambda y = \lambda^2(x^2 + xy) = \lambda^2 f(x, y)$, also ist f homogen vom Grad 2.

b) Man erkennt schon an den unterschiedlichen Graden der Monome im Funktionsterm, dass f inhomogen ist. Eine Möglichkeit, die Inhomogenität exakt nachzuweisen besteht darin, anhand von Beispielrechnungen zwei verschiedene Werte für den Homogenitätsgrad herzuleiten; dieser Widerspruch ist dann nicht auflösbar.

- $f(1, 1, 1) = 3$ und $f(2, 2, 2) = 10 = 2^r \dot{f}(1, 1, 1) = 3 \cdot 2^r$. Danach ist $2^r = 10/3$.
- $f(4, 4, 4) = 34 = 2^r \cdot f(2, 2, 2) = 2^r \cdot 10$. Danach ist $2^r = 34/10$.

c) $f(\lambda x, \lambda y) = (\lambda x)(\lambda y)/((\lambda x)^2 + (\lambda y)^2) = \lambda^2 xy/(\lambda^2(x^2 + y^2)) = xy/(x^2 + y^2) = f(x, y) = \lambda^0 f(x, y)$. f ist also homogen vom Grad 0. Nachfragefunktionen könnten solch ein Verhalten haben.

d) Hier ist der Ausdruck unter der Wurzel inhomogen, was sich auf die Funktion überträgt. Wäre f homogen vom Grad r, dann wäre $g(x, y) = xy + x$ homogen vom Grad $2r$. Aber $g(1, 1) = 2, g(2, 2) = 6, g(4, 4) = 20$ bedeutet $2^(2r) = 6/2 = 20/6$, was nicht lösbar ist.

e) Für $\lambda \in \mathbb{R}$ ist $f(\lambda x, \lambda y) = \max((\lambda x)^2, (\lambda x)(\lambda y)) = \max(\lambda^2 x^2, \lambda^2 xy) = \lambda^2 \max(x, y) = \lambda^2 f(x, y)$. f ist also homogen vom Grad 2. Der positive Faktor λ^2 darf aus dem Maximum-Ausdruck herausgezogen werden.

f) Für $\lambda \in \mathbb{R}$ ist $f(\lambda x, \lambda y) = 1/((\lambda x)^2 + (\lambda y)^2) = 1/(\lambda^2)(x^2+y^2) = \lambda^{-2}1/(x^2+y^2) = \lambda^{-2}f(x,y)$. f ist also homogen vom Grad -2.

Aufgabe 8.

a) $\frac{\partial(yx)}{\partial x} = y\frac{\partial x}{\partial x} = y$ und $\left.\frac{\partial(yx)}{\partial x}\right|_{y\,=\,x} = y|_{y\,=\,x} = x$

b) $\frac{\partial(y/x)}{\partial x} = y\frac{\partial(1/x)}{\partial x} = -y/x^2$ und $\left.\frac{\partial(y/x)}{\partial x}\right|_{y\,=\,x^2} = -y/x^2|_{y\,=\,x^2} = -x^2/x^2 = -1$

c) Aufpassen! Erst ableiten, dann einsetzen. $\left.\frac{\partial(z-z_0)}{\partial z}\right|_{z\,=\,z_0} = 1|_{z\,=\,z_0} = 1$. Wer hier fälschlich 0 herausbekommt, hat erst $z = z_0$ eingesetzt und dann abgeleitet.

d) Man schreibt $x^y = \exp(y\ln(x))$. Die Ableitung berechnet sich dann jeweils mit der Kettenregel, wobei die Exponentialfunktion sich selbst als Ableitung hat:

d1) $\frac{\partial x^y}{\partial x} = \frac{\partial(\exp(y\ln(x)))}{\partial x} = \exp(y\ln(x)) \cdot y/x = x^y \cdot y/x = x^{y-1}y$

d2) $\frac{\partial x^y}{\partial y} = \frac{\partial(\exp(y\ln(x)))}{\partial y} = \exp(y\ln(x)) \cdot \ln(x) = x^y \cdot \ln(x)$

Aufgabe 9.

a) Es wird die Kettenregel [1] angewendet auf $h(t) = \sqrt{t}$ mit $h'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}$. Die innere Funktion $(x,y) \mapsto 1 + 2x^2 - 3y^2$ hat Differential (Gradient) $(4x, -6y)^T$. Dann gilt: $Dg(x,y) = h'(1+2x^2-3y^2) \cdot \begin{pmatrix} 4x \\ -6y \end{pmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{1+2x^2-3y^2}} \cdot \begin{pmatrix} 4x \\ -6y \end{pmatrix}$

b) Dies ist eine reine Fleißaufgabe, bei der Summenregel und für die Summanden Ketten- und Faktorregel anzuwenden sind. Die partiellen Ableitungen lauten

b1) $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = e^{x-y^2} \cdot 1 + \cos(x+y) \cdot 1 - 1 \cdot \sqrt{1+y^2}$

b2) $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = -2ye^{x-y^2} + \cos(x+y) - xy/\sqrt{1+y^2}$

Setzt man diese zu einem Vektor zusammen, so bekommt man den gesuchten Gradienten.

c) Schreibe $f(x,y,z) = x\ln(y) - x\ln(z)$, dann lassen sich die partiellen Ableitungen leichter berechnen:

c1) $\frac{\partial}{\partial x} f(x,y,z) = \ln(y) - \ln(z) = \ln(y/z)$

c2) $\frac{\partial}{\partial y} f(x,y,z) = x/y - 0 = x/y$

c3) $\frac{\partial}{\partial z} f(x,y,z) = -x \cdot 1/z$

d) Alle drei partiellen Ableitungen werden mit der Produkt- und Kettenregel bestimmt:

d1) $\frac{\partial}{\partial x} f(x,y,z) = \frac{(xy+xz+yz)(yz)}{xyz} + \ln(xyz)(y+z) = \frac{xy+xz+yz}{x} + (y+z)\ln(xyz)$

d2) $\frac{\partial}{\partial y} f(x,y,z) = \frac{xy+xz+yz}{y} + (x+z)\ln(xyz)$

d3) $\frac{\partial}{\partial z} f(x,y,z) = \frac{xy+xz+yz}{z} + (x+y)\ln(xyz)$

Die Berechnungsweise ist in allen drei Fällen gleich, weil die Argumente von f beliebig miteinander vertauscht werden können.

e) Zur Ableitung wird das Exponential mit Hilfe der Logarithmusfunktion umgestellt: $f(x, y, z) = \exp(\ln(x)\frac{y}{z})$. Dann lassen sich die partiellen Ableitungen mit Ketten- und Faktorregel bzw. den Ableitungen von Logarithmus und Kehrwertfunktion bestimmen:

e1) $\frac{\partial}{\partial x} f(x, y, z) = \exp(\ln(x)y/z)\frac{y}{xz} = x^{y/z} \cdot y/(xz)$

e2) $\frac{\partial}{\partial y} f(x, y, z) = x^{y/z} \cdot \ln(x)/z$

e3) $\frac{\partial}{\partial y} f(x, y, z) = x^{y/z} \cdot (-\ln(x)y/z^2)$

Aufgabe 10. Die Funktion lautet $G(p, q) = -14p^2 - 3q^2 + 3pq + 2396p + 1197q - 120030$. Ihre partiellen Ableitungen sind

- $\frac{\partial}{\partial p} G(p, q) = -28p + 3q + 2396$
- $\frac{\partial}{\partial q} G(p, q) = -6q + 3p + 1197$

Aufgabe 11.

a) Die Funktion $f(x, y) = xy$ hat den Gradienten $\nabla f(x, y) = (y, x)^T$. Die partielle Ableitung nach x ist also unabhängig von x, die partielle Ableitung nach y ist unabhängig von y. Die Funktion ist aber nicht konstant. Also ist die Aussage falsch.

b) Richtig muss die Aussage heißen:

„Wenn alle partiellen Ableitungen konstante Funktionen sind, dann ist f linear“.

Mit dem Gegenbeispiel kommt man vielleicht recht schnell auf diese Formulierung, dass diese aber wirklich richtig ist (und es fehlt auch noch eine „Kleinigkeit“ wie sich gleich herausstellt), ist recht mühsam zu begründen und sei hier für Funktionen von zwei Variablen x, y ausgeführt – das Argument kann auf Funktionen mit mehr Variablen übertragen werden.

Wenn der Gradient von f konstant ist, hat er also die Form $\nabla f(x, y) = (a, b)^T$ mit festen $a, b \in \mathbb{R}$. Dann ist die Funktion $g(x, y) = f(x, y) - ax - by$ differenzierbar mit Differential (Gradient) $(0, 0)^T$. Die partiellen Ableitungen von g sind also konstante Funktionen.

Daher ist die Funktion $x \mapsto g(x, y)$ und die Funktion $y \mapsto g(x, y)$ bei jeweils festgehaltener anderer Variable konstant. Verändert man also nur der Wert einer der Variablen im Argument, so bleibt der Funktionswert von g gleich. Sind aber nun (x_1, y_1) und (x_2, y_2) zwei beliebige Punkte im Definitionsbereich $\mathbb{D}$, so kann man beide in zwei Schritten ineinander überführen; es gilt

$$g(x_1, y_1) = g(x_1, y_2) = g(x_2, y_2)$$

Also ist auch g eine konstante Funktion. Es gibt daher ein $c \in \mathbb{R}$ mit $g(x, y) = c$ für alle $(x, y) \in \mathbb{D}$, d.h. aber $f(x, y) = g(x, y) + ax + by = c + ax + by$. Das bedeutet, dass f eine lineare Funktion ist.

Achtung: Diese Argumentation ist nicht für jeden Definitionsbereich $\mathbb{D}$ richtig, stimmt aber zumindest für die im ökonomischen Kontext meist verwendeten Quader. In anderen Definitionsbereichen muss man voraussetzen können, dass man zwei Punkte (x_1, y_1) und (x_2, y_2) durch eine Folge von Schritten, bei denen sich immer nur eine Variable verändert, so ineinander überführen kann, dass die Verbindungslinie ganz in $\mathbb{D}$ liegt – solche Definitionsbereiche nennt man zusammenhängend.

Ganz exakt würde daher die richtige Aussage lauten: „Eine differenzierbare Funktion mit zusammenhängendem Definitionsbereich, deren partielle Ableitungen konstante Funktionen sind, ist linear“.

Wenn der Definitionsbereich nicht zusammenhängend ist, lässt sich (leicht) eine Funktion konstruieren, für die die Aussage falsch ist, beispielsweise $\mathbb{D} =]0;1[^2 \cup]2;3[^2$ und $f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{für } (x,y) \in]0;1[^2 \\ 1 & \text{für } (x,y) \in]2;3[^2 \end{cases}$. Die Funktion hat auf den beiden Teilbereichen jeweils das konstante Differential $(0,0)^T$, ist aber nicht linear.

Aufgabe 12. Die Funktion hat das Differential bzw. den Gradienten $Df(x,y) = (2x, 3y^2/2)^T$. In $(4,-2)^T$ gilt $f(4,-2) = 12$ und $Df(4,-2) = (8,6)^T$.

Die Linearisierung hat daher die Form $g(x,y) = f(4,-2) + \langle Df(4,2), (x-4, y-(-2))^T \rangle$, also hier $g(x,y) = 12 + 8(x-4) + 6(y+2) = 8x + 6y - 8$

Aufgabe 13.

a) Die (äußere) Funktion $h(t) = t^p$ ist differenzierbar mit $h'(t) = pt^{p-1}$. Die (innere) Funktion $f(x,y) = x^2 + y^2$ ist differenzierbar mit $Df(x,y) = (2x, 2y)^T$. Nach der Kettenregel ist auch $g(x,y)$ differenzierbar mit $Dg(x,y) = h'(f(x,y))Df(x,y) = p(x^2+y^2)^{p-1}(2x, 2y)^T$

b) Um zu prüfen, ob g in $(0,0)^T$ (total) differenzierbar ist, untersucht man zunächst, ob g in $(0,0)^T$ partiell differenzierbar ist. Wegen $g(0,0) = 0$ gilt

$$\frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \frac{(h^2)^p}{h} = \pm |h|^{2p-1}$$

d.h. es ergibt sich $|h|^{2p-1}$ für $h > 0$ und $-|h|^{2p-1}$ für $h < 0$. Damit steht fest:

b1) Für $p > 1/2$ ist der Grenzwert $\lim_{h \to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = 0$, denn der Exponent ist dann $2p - 1 > 0$ und der Grenzwert ergibt sich aus der Stetigkeit der Potenzfunktion $t \mapsto t^{2p-1}$ auf $[0;\infty[$.

b2) Für $p = 1/2$ ist $2p - 1 = 0$; der Differenzenquotient nimmmt dann für $h > 0$ den Wert 1 und für $h < 0$ den Wert -1 an. Es kann dann kein Grenzwert für $h \to 0$ existieren.

b3) Wenn $p < 1/2$, so ist $2p - 1 < 0$, dann ist der Differenzenquotient um $h = 0$ unbeschränkt und es kann kein Grenzwert existieren.

Wegen $f(0,h) = f(h,0)$ bekommt man die gleichen Aussagen für den anderen Differenzenquotienten $\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h}$.

Daher ist g in $(0,0)^T$ für $p \leq 1/2$ nicht partiell differenzierbar (und somit auch nicht total differenzierbar).

Für $p > 1/2$ hat g den Gradient $\nabla g(0,0) = (0,0)^T$. Hiermit prüft man jetzt die Anforderung an eine in $(0,0)^T$ total differenzierbare Funktion. Es muss gemäß Definition der Grenzwert

$$\lim_{(d_1,d_2)\to(0,0)} \frac{g(0+d_1, 0+d_2) - f(0,0) - \langle \nabla g(0,0), (d_1,d_2)^T \rangle}{\|(d_1,d_2)\|} = 0$$

sein. Das ist aber hier der Fall, der Quotient vereinfacht sich zu

$$\frac{g(0+d_1, 0+d_2) - f(0,0) - \langle \nabla g(0,0), (d_1,d_2)^T \rangle}{\|(d_1,d_2)\|} = \frac{(d_1^2+d_2^2)^p}{(d_1^2+d_2^2)^{1/2}} = (d_1^2+d_2^2)^{p-1/2}$$

und der letzte Ausdruck strebt gegen Null mit $(d_1,d_2) \to (0,0)$.

c) Alle Aussagen übertragen sich mit $Dg(x_1,\ldots,x_n) = 2p(x_1^2+\cdots+x_n^2)^{p-1}(x_1,\ldots,x_n)^T$. g ist für $p > 1/2$ auf $\mathbb{R}^n$ und für $p \leq 1/2$ (nur) auf $\mathbb{R}^n \setminus \{\bar{0}\}$ total differenzierbar.

Aufgabe 14. Nach der Kettenregel [2] gilt $0 = D_1f(h(t),t)h'(t) + D_2f(h(t),t)$, d.h. $h'(t) = -D_2f(h(t),t)/D_1f(h(t),t) = -1$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Daher gilt $h(t) = a - t$ mit $a = h(0) = 0$, also $h(t) = -t$.

Aufgabe 15. Der Gradient $(d_1,d_2)^T = \nabla f(60,60)$ zeigt in die Richtung des steilsten Anstiegs. Daher erhält man (näherungsweise) den größten Produktionsanstieg, wenn man zusätzlich αd_1 für den ersten Produktionsfaktor und αd_2 für den zweiten Produktionsfaktor einsetzt. Hierfür dürfen 50 Geldeinheiten ausgegeben werden, d.h. es muss gelten $50 = 20(\alpha d_1) + 40(\alpha d_2) = \alpha(20d_1 + 40d_2)$. Hieraus errechnet sich $\alpha = 50/(20d_1 + 40d_2)$. Um die Aufgabe zu lösen, muss also zunächst der Gradient ausgerechnet werden:

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{(2x+3y)(x+2y)-(x^2+3xy+y^2)}{(x+2y)^2} \\ \frac{(3x+2y)(x+2y)-2(x^2+3xy+y^2)}{(x+2y)^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x^2+4xy+5y^2}{(x+2y)^2} \\ \frac{x^2+2xy+2y^2}{(x+2y)^2} \end{pmatrix}$$

Bei den aktuellen Faktoreinsatzmengen $x = y = 60$ ergibt sich $\nabla f(60,60) = (10/9, 5/9)^T$. Mit den Eingangsüberlegungen folgt $\alpha = 50/(20 \cdot 10/9 + 40 \cdot 5/9) = 9/8$. Der erste Faktor wird mit $\frac{9}{8} \cdot \frac{10}{9} = \frac{10}{8}$ Mengeneinheiten, der zweite mit $\frac{9}{8} \cdot \frac{5}{9} = \frac{5}{8}$ Mengeneinheiten eingesetzt. Von den zusätzlichen 50 Geldeinheiten werden also $20 \cdot \frac{10}{8} = 25$ für den ersten Produktionsfaktor und 25 Geldeinheiten für den zweiten Produktionsfaktor eingesetzt. Die Produktion steigt von $f(60,60) = 100$ Mengeneinheiten auf $f(60 + \frac{10}{8}, 60 + \frac{5}{8}) \approx 101{,}736$ Mengeneinheiten.

Beachten Sie, dass dies nur eine Näherungslösung ist, weil man die Eigenschaft des Gradienten als Richtung des steilsten Anstiegs verwendet und anstelle der ursprünglichen Funktion von einer Linearisierung mit Hilfe des Gradienten ausgeht. Deshalb ist die gefundene Lösung auch nicht die faktisch optimale Aufteilung der zusätzlichen Ressourcen. Wenn die 50 Geldeinheiten beispielsweise nur für den Einsatz von $5/2$ Mengeneinheiten verwendet werden, so steigt der Produktionsertrag auf $f(60+5/2, 60) \approx 102{,}774$ Mengeneinheiten - diese optimale Lösung lässt sich mit den Optimierungsmethoden des nächsten Kapitels bestimmen.

Aufgabe 16. Der Gradient von f ist

$$\nabla f(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} (-\alpha)x_1^{-\alpha-1}e^{-\beta x_2} \\ x_1^{-\alpha}(-\beta)e^{-\beta x_2} \end{pmatrix} = f(x_1,x_2)\begin{pmatrix} -\alpha/x_1 \\ -\beta \end{pmatrix}$$

Daher bekommt man folgende partielle Elastizitäten:

a) $\varepsilon_{f,1}(x_1,x_2) := \frac{D_1f(x_1,x_2)}{f(x_1,x_2)} \cdot x_1 = \frac{x_1 \cdot f(x_1,x_2)(-\alpha/x_1)}{f(x_1,x_2)} = -\alpha$

b) $\varepsilon_{f,2}(x_1,x_2) := \frac{D_2f(x_1,x_2)}{f(x_1,x_2)} \cdot x_2 = \frac{-\beta f(x_1,x_2)x_2}{f(x_1,x_2)} = -\beta x_2$

Aufgabe 17. Die Funktion vereinfacht sich zu $f(x,y) = 4\sqrt{x^4 + x^3y^2}$. Sie hat den Gradienten

$$\nabla f(x,y) = \frac{4}{2\sqrt{x^4 + x^3y^2}}\begin{pmatrix} 4x^3 + 3x^2y^2 \\ 2x^3y \end{pmatrix} = \frac{8}{f(x,y)}\begin{pmatrix} 4x^3 + 3x^2y^2 \\ 2x^3y \end{pmatrix}$$

Daher lautet der Elastizitätsgradient

$$\epsilon_f(x,y) = \frac{8}{f(x,y)^2}\begin{pmatrix}4x^4+3x^3y^2\\2x^3y^2\end{pmatrix} = \frac{1/2}{x^4+x^3y^2}\begin{pmatrix}4x^4+3x^3y^2\\2x^3y^2\end{pmatrix} = \frac{1/2}{x+y^2}\begin{pmatrix}4x+3y^2\\2y^2\end{pmatrix}$$

a) $\epsilon_f(100,10) = \frac{1/2}{200}\begin{pmatrix}700\\200\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7/4\\1/2\end{pmatrix}$

b) Relative Erhöhung von x: $\frac{\Delta x}{x_0} = 0.01$: Relative Erhöhung von z: $\frac{\Delta z}{z} \approx \epsilon_{f,x}(x_0,y_0)\cdot\frac{\Delta x}{x_0} = 0.0175$. Prozentuale Erhöhung von z etwa 1,75%.

c) Prozentuale Erhöhung von y: $100\cdot\frac{\Delta y}{y_0} = 3\%$. Prozentuale Erhöhung von z etwa 1,5%.

d) Prozentuale Erhöhung von z etwa

$$\left\langle \epsilon_f(x_0,y_0), (\tfrac{\Delta x}{x_0}, \tfrac{\Delta y}{y_0}) \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix}7/4\\1/2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1/100\\1/100\end{pmatrix} \right\rangle = 0,0225 \ = 2,25\ \%$$

Aufgabe 18.

a) Zuerst den Gradienten von f bestimmen:

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix}\partial f/\partial x\\\partial f/\partial y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}150+y/10\\300+x/10\end{pmatrix}$$

Im vorliegenden Punkt gilt $\nabla f(500,1000) = (250,350)^T$.

Die Substitutionsgrenzrate zwischen x und y ist dann $\partial x/\partial y = -\frac{\partial f/\partial y}{\partial f/\partial x} = -350/250 = -7/5$. Verringert sich der Einsatz von Rohstoff 2 um eine Tonne, d.h. gilt $\Delta y = -1$, so gilt für die Veränderung Δx von Rohstoff 1

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} \approx \frac{\partial x}{\partial y} \quad \Rightarrow \quad \Delta x \approx \frac{\partial x}{\partial y}\cdot\Delta y = (-\frac{7}{5})(-1) = \frac{7}{5}$$

Mit dieser Änderung bleibt die Produktion näherungsweise beim aktuellen Stand $f(500,1000) = 425000$.

b) Da Ableitungen für nicht-lineare Funktionen die Steigung dieser nur lokal bestimmen, gilt $\frac{\Delta x}{\Delta y} \approx \frac{\partial x}{\partial y}$ nur für „kleine" Änderungen Δy des zweiten Produktionsfaktors. Verringert man y um 50% (=500 t) und erhöht x um $\frac{7}{5}\cdot 500 = 700$ t, so ergibt sich mit $f(1200,500) = 390000$ ein signifikant anderes Produktionsniveau.

Aufgabe 19. Erster Rechenweg: $z = \partial y/\partial x = -(2x+y)/x = -(2+y/x)$. Umgestellt gilt $y/x = -z+2$. Als Funktion von z Elastizität $z/(z-2)$. Konkret für $x=2, y=3$ ist $z = GRS(y|x) = 7/2$, also $SEL(y|x) = 7/3$.

Zweiter Rechenweg: $f(2,3) = 10$. $x^2+xy = 10 \Leftrightarrow y = y(x) = (10-x^2)/x = 10/x - x$. Damit $y'(x) = -10/x^2 - 1$, $y''(x) = 20/x^3$. Eingesetzt $y(2) = 3$, $y'(2) = -7/2$, $y''(2) = 5/2$.

Es folgt $SEL(y|x) = \frac{y'(x)(y'(x)x-y)}{x\cdot y\cdot y''(x)} = \frac{(-7/2)((-7/2)\cdot 2-3)}{2\cdot 3\cdot 5/2} = 7/3$

Aufgabe 20. Die Definitheit wird (möglichst) mit den drei verschiedenen Kriterien geprüft. Es genügt allerdings immer, nur eines der drei Kriterien nachzurechnen:

a) A ist positiv definit, wie alle drei Kriterien übereinstimmend bestätigen:

a1) Determinantenkriterium: Hauptunterdeterminanten von A sind $42 > 0$ und $42 \cdot 17 > 0$.

a2) Eigenwertkriterium: Das charakteristische Polynom von A ist $(\lambda - 42)(\lambda - 17)$ und hat die positiven Eigenwerte 42 und 17.

a3) Definition der Definitheit: Für alle $d = (d_1, d_2)^T \in \mathbb{R}^2$ mit $d \neq \bar{0}$ ist $\langle d, Ad \rangle = 42d_1^2 + 17d_2^2 > 0$.

b) B ist indefinit:

b1) Determinantenkriterium: Hauptunterdeterminanten sind $-1 < 0$ und $(-1)(-3) - 2 \cdot 2 = -1 < 0$. Wegen dieses letzten Hauptminors kann B nicht definit sein.

b2) Eigenwertkriterium: Das charakteristische Polynom hat die Form $(-1-\lambda)(-3-\lambda) - 4 = \lambda^2 + 4\lambda - 1$. Die Nullstellen (und damit Eigenwerte von B) sind $-\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 1}$ und haben wechselndes Vorzeichen.

b3) Definition der Definitheit: Für alle $d = (d_1, d_2)^T \in \mathbb{R}^2$ ist $\langle d, Bd \rangle = -d_1^2 + 4d_1d_2 - 3d_2^2 = -(d_1^2 - 4d_1d_2) - 3d_2^2 = -(d_1 - 2d_2)^2 + d_2^2$. Für $d = (1, 0)^T$ ist dieser Wert kleiner als Null, für $d = (0, 1)^T$ ist dieser Wert größer als Null.

c) C ist negativ definit:

c1) Determinantenkriterium: Hauptminoren sind $-2 < 0$ und $(-2)(-5) - 3^2 = 1 > 0$.

c2) Eigenwertkriterium: Das charakteristische Polynom lautet $(-2-\lambda)(-5-\lambda) - 9 = \lambda^2 + 7\lambda + 1$. Nullstellen (und damit Eigenwerte von C) sind $-\frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4} - 1}$. Beide sind kleiner als Null.

c3) Definition der Definitheit: Für alle $d = (d_1, d_2)^T \in \mathbb{R}^2$ mit $d \neq \bar{0}$ ist $\langle d, Cd \rangle = -2d_1^2 + 6d_1d_2 - 5d_2^2 = -2(d_1^2 - 3d_1d_2) - 5d_2^2 = -2(d_1 - \frac{3}{2}d_2)^2 + (\frac{9}{2} - 5)d_2^2 < 0$

d) D ist negativ definit:

d1) Determinantenkriterium: Hauptminoren sind $-4 < 0$ (deshalb kann D höchstens noch negativ definit oder negativ semidefinit sein), $(-4)(-6) - 4^2 = 8 > 0$ (es bleibt bei den obigen Alternativen) und $(-4)(-6)(-1) + 2 \cdot (4 \cdot 2 \cdot (-1)) - (-1)^2(-6) - 4^2(-1) - 2^2(-4) = -2 < 0$

d2) Eigenwertkriterium: Das charakteristische Polynom ist $\det(D - \lambda I_3) = (-4-\lambda)(-6-\lambda)(-1-\lambda) + 2 \cdot (4 \cdot 2 \cdot (-1)) - (-1)^2(-6-\lambda)) - 4^2(-1-\lambda) - 2^2(-4-\lambda) = -2 - 13\lambda - 11\lambda^2 - \lambda^3$. Seine Nullstellen (die Eigenwerte von D lassen sich nur noch numerisch berechnen. Mit einem Schultaschenrechner z.B. ergeben sich die Eigenwerte $\lambda_1 \approx -9{,}67812$, $\lambda_2 \approx -1{,}14073$, $\lambda_3 \approx -0{,}181158$, alle < 0.

d3) Definition der Definitheit: Bei mehr als zwei Zeilen/Spalten führt das Verfahren im Allgemeinen nur noch in Ausnahmefällen mit überschaubarem Aufwand zum Ziel, weil die quadratische Ergänzung hier nicht mehr so effizient durchgeführt werden kann.

e) E ist indefinit:

e1) Determinantenkriterium: Hauptminoren sind $3 > 0$ (d.h. die Matrix könnte höchstens noch positiv definit oder positiv semidefinit sein), $3^2 - 2^2 = 5 > 0$

(es bleibt bei der Eingrenzung) und $\det(E) = 3^2 \cdot 5 + 2 \cdot (2(-4)(-2)) - 3(-2)^2 - 2^2 \cdot 5 - (-4)^2 \cdot 3 = 77 - 80 = -3 < 0$ (damit wird positiv definit und positiv semidefinit ausgeschlossen).

e2) Eigenwertkriterium: Das charakteristische Polynom ist $\det(E - \lambda I_3) = -3 - 15\lambda + 11\lambda^2 - \lambda^3$ und hat die (numerisch berechenbaren) Eigenwerte $\lambda_1 \approx -0,176728 < 0, \lambda_2 \approx 1,81284 > 0, \lambda_3 \approx 9,36389 > 0$ mit wechselnden Vorzeichen.

e3) Definition der Definitheit: Ist auch hier zu aufwändig.

Aufgabe 21. Es werden wieder alle drei Kriterien herangezogen (zur Lösung der Aufgabe reicht aber einer der drei Rechenwege):

- Prüfung mit dem Determinantenkriterium: Hauptminoren sind a und $4a - 4a^2 = 4a(1-a)$. Die Matrix ist positiv definit genau dann, wenn alle Hauptminoren größer als Null sind, d.h. für $a > 0$ und $(1-a) > 0$, d.h. für $0 < a < 1$.
- Prüfung mit dem Eigenwertkriterium: Das charakteristische Polynom ist $\det(A - \lambda I_2) = (a-\lambda)(4-\lambda) - 4a^2 = \lambda^2 - (4+a)\lambda + 4a - 4a^2$. Nullstellen sind $\frac{4+a}{2} \pm \sqrt{\frac{(4+a)^2}{4} - 4a + 4a^2} = \frac{4+a}{2} \pm \sqrt{\frac{16+8a+a^2-16a+16a^2}{4}} = \frac{4+a}{2} \pm \sqrt{\frac{16-8a+17a^2}{4}} = \frac{4+a}{2} \pm \sqrt{\frac{(4-a)^2+16a^2}{4}}$ Diese beiden Nullstellen haben genau dann positives Vorzeichen, wenn $4 + a > \sqrt{(4-a)^2 + 16a}$, d.h. es folgt zumindest $a > -4$ und weiter dann $(4+a)^2 > (4-a)^2 + 16a^2 \Leftrightarrow 16a > 16a^2 \Leftrightarrow a(1-a) > 0$. Das führt zu $0 < a < 1$.
- Prüfung mit Definition: Es ist $\langle (d_1, d_2)^T, A(d_1, d_2)^T \rangle = ad_1^2 + 4a^2 d_1 d_2 + 4d_2^2 = a(d_1^2 + 4ad_1d_2) + 4d_2^2 = a(d_1 + 2d_2)^2 - 4ad_2^2 + 4d_2^2 = a(d_1 + 2d_2)^2 + 4(1-a)d_2^2$. Dieser Term ist genau dann für alle $(d_1, d_2)^T$ größer als Null, wenn $a > 0$ (sonst kann die Summe wegen des ersten Summanden negativ werden, z.B. für $d = (1,0)$) und $a < 1$ (sonst kann die Summe wegen des zweiten Summanden negativ werden, z.B. für $d = (-2,1)^T$). Also ist A für $0 < a < 1$ positiv definit.

Aufgabe 22.

a) $\nabla f(x,y) = \left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right)^T$

$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x,y) = -\frac{1}{x^2}$ $\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x,y) = 0$ $\frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x,y) = -\frac{1}{y^2}$

Hauptminoren sind $-1/x^2 < 0$ und $1/(x^2y^2) > 0$. H_f ist also pauschal negativ definit. f ist daher konkav.

b) $\nabla f(x,y,z) = \left(10x, -9y^2, 12z^3\right)^T$

$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x,y,z) = 10,\ \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(x,y,z) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x,y) = 0$
$\frac{\partial^2}{\partial z \partial x} f(x,y,z) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} f(x,y) = 0,\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x,y,z) = -18y$
$\frac{\partial^2}{\partial z \partial y} f(x,y,z) = \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} f(x,y) = 0,\ \frac{\partial^2}{\partial z^2} f(x,y,z) = 36z^2$

Der zweite Hauptminor ist $10 \cdot (-18y) < 0$. $H_f(x,y,z)$ ist daher indefinit und f ist weder konkav noch konvex.

c) $\nabla f(x,y,z) = \left(\frac{4x^3}{yz}, -\frac{x^4}{y^2z}, -\frac{x^4}{yz^2}\right)^T$

$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x,y,z) = \frac{12x^2}{yz},\ \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(x,y,z) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x,y,z) = -\frac{4x^3}{y^2z}$
$\frac{\partial^2}{\partial z \partial x} f(x,y,z) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} f(x,y,z) = -\frac{4x^3}{yz^2}$

$\frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x,y,z) = \frac{2x^4}{y^3 z}$, $\frac{\partial^2}{\partial z \partial y} f(x,y,z) = \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} f(x,y,z) = \frac{x^4}{y^2 z^2}$
$\frac{\partial^2}{\partial z^2} f(x,y,z) = \frac{2x^4}{yz^3}$

Der erste Hauptminor ist $12x^2/yz > 0$. Der zweite Hauptminor ist $12x^2/(yz) \cdot 2x^4/(y^3z) - (4x^3/(y^2z))^2 = 8x^6/(y^4z^2) > 0$. Der dritte Hauptminor wird dadurch ermittelt, dass gemeinsame Faktoren aus Zeilen bzw. Spalten ausgeklammert werden:

$$\det \begin{bmatrix} \frac{12x^2}{yz} & \frac{-4x^3}{y^2z} & \frac{-4x^3}{yz^2} \\ \frac{-4x^3}{y^2z} & \frac{2x^4}{y^3z} & \frac{x^4}{y^2z^2} \\ \frac{-4x^3}{yz^2} & \frac{x^4}{y^2z^2} & \frac{2x^4}{yz^3} \end{bmatrix} = \frac{4x^2x^3x^3}{yzy^2zyz^2} \det \begin{bmatrix} 3 & -\frac{x}{y} & -\frac{x}{z} \\ -4 & \frac{2x}{y} & \frac{x}{z} \\ -4 & \frac{x}{y} & \frac{2x}{z} \end{bmatrix} = \frac{4x^{10}}{y^5z^5} \det \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -4 & 2 & 1 \\ -4 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{4x^{10}}{y^5z^5} > 0.$$

Alle Hauptminoren sind größer als Null für alle $x, y, z > 0$, daher ist $H_f(x,y,z)$ positiv definit. f ist also konvex.

d) $\nabla f(x,y,z) = (yze^{xyz}, xze^{xyz}, yze^{xyz})^T$

$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x,y,z) = y^2z^2e^{xyz}$
$\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(x,y,z) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x,y,z) = (1+xyz)ze^{xyz}$
$\frac{\partial^2}{\partial z \partial x} f(x,y,z) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} f(x,y,z) = (1+xyz)ye^{xyz}$
$\frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x,y,z) = x^2z^2ye^{xyz}$
$\frac{\partial^2}{\partial z \partial y} f(x,y,z) = \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} f(x,y,z) = (1+xyz)xe^{xyz}$
$\frac{\partial^2}{\partial z^2} f(x,y,z) = x^2y^2e^{xyz}$

Der Zweite Hauptminor ist $(y^2z^2)(x^2z^2) - (1+xyz)^2 = x^2y^2z^4 - x^2y^2z^2 - 2xyz - 1 = x^2y^2(x^4 - z^2) - 2xyz - 1$. Für $0 < z < 1$ ist dieser Ausdruck aber negativ, also ist $H_f(x,y,z)$ indefinit. Dann kann f nicht auf $\mathbb{D}$ konvex oder konkav sein (man müsste den Definitionsbereich weiter unterteilen.

Aufgabe 23.

a) $$\int_1^r \int_0^{2\pi} 1 dx\, dy = \int_1^r \left(\int_0^{2\pi} 1 dy \right) dx = \int_1^r 2\pi dx = 2\pi(r-1)$$

b) $$\int_1^2 \int_1^2 (x^2+y^2) dx\, dy = \int_1^2 \left(\int_1^2 (x^2+y^2) dy \right) dx = \int_1^2 \left(x^2y + \frac{1}{3}y^3 \Big|_{y=1}^{y=2} \right) dx$$
$$= \int_1^2 (x^2 + \frac{7}{3}) dx = \frac{1}{3}x^3 + \frac{7}{3}x \Big|_{x=1}^{x=2} = \frac{14}{3}$$

c) $$\int_1^2 \int_0^1 (x+y)^2 dx\, dy = \int_1^2 \left(\int_0^1 (x+y)^2 dy \right) dx = \int_1^2 \left(\frac{1}{3}(x+y)^3 dy \Big|_{y=0}^{y=1} \right) dx$$
$$= \int_1^2 \left(\frac{1}{3}(x+1)^3 - \frac{1}{3}x^3 \right) dx = (\frac{1}{12}((x+1)^4 - x^4) \Big|_{x=1}^{x=2} = \frac{50}{12} = \frac{25}{6}$$

d) $$\int_0^\pi \int_0^\pi (1-\cos(x+y)) dx\, dy = \int_0^\pi \left(\int_0^\pi (1-\cos(x+y)) dy \right) dx = \int_0^\pi (y - \sin(x+y))|_{y=0}^{y=\pi} dx$$

$$= \int_0^{\pi} (\pi - \sin(x+\pi) + \sin(x))\, dx = (\pi x + \cos(x+\pi) - \cos(x)|_{x=0}^{x=\pi} = \pi^2 + \cos(2\pi) - \cos(\pi) - \cos(\pi) + \cos(0) = \pi^2 + 4$$

e) $$\int_0^{\pi}\int_0^{\pi} \cos(x+y)^2 dx\, dy = \int_0^{\pi}\left(\int_0^{\pi}\cos(x+y)^2 dy\right) dx$$
$$= \int_0^{\pi}\left(\frac{1}{2}(\sin(x+y)\cos(x+y) + x + y)\Big|_{y=0}^{y=\pi}\right) dx$$
$$= \int_0^{\pi}\left(\frac{1}{2}(\sin(x+\pi)\cos(x+\pi) + \pi - \sin(x)\cos(x))\right) dx$$
$$= \frac{1}{2}(-\frac{1}{2}\cos^2(x+\pi) + \pi x + \frac{1}{2}\cos^2(x))\Big|_{x=0}^{x=\pi}$$
$$= \tfrac{1}{2}(-\tfrac{1}{2}\cos^2(2\pi) + \pi^2 + \tfrac{1}{2}\cos^2(\pi) - (-\tfrac{1}{2}\cos^2(\pi) + \tfrac{1}{2}\cos^2(0))) = \pi^2/2$$

Aufgabe 24.

$$\int_{\mathbb{D}} \sqrt{x-y}\,dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^x \sqrt{x-y}\,dy\right) dx = \int_0^1 \left[-\frac{2}{3}(x-y)^{\frac{3}{2}}\right]_{y=0}^{y=x} dx$$
$$= \int_0^1 \left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right) dx = \left[\frac{4}{15}x^{\frac{5}{2}}\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{4}{15}$$

Aufgabe 25.

a) Die partiellen Ableitungen lauten

$$\nabla f(x,y,z) = \left(-\frac{y^2}{z(x+y)^2}, \frac{y^2+2xy}{z(x+y)^2}, -\frac{y^2}{z^2\,(x+y)}\right)^T$$

b) Aufgrund von a) erhält man durch wiederholtes Ableiten $\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{y^2}{z(x+y)}\right) = \frac{2y^2}{z(x+y)^3}$, $\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{y^2}{z(x+y)}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y^2+2xy}{z(x+y)^2}\right) = \frac{2x^2}{z(x+y)^3}$ und $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left(\frac{y^2}{z(x+y)}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y^2}{z(x+y)}\right) = \frac{-2xy}{z(x+y)^3}$. Die zweite gemischt-partielle Ableitung ergibt sich analog. Insgesamt ist

$$H_f(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{2y^2}{z(x+y)^3} & \frac{-2xy}{z(x+y)^3} \\ \frac{-2xy}{z(x+y)^3} & \frac{2x^2}{z(x+y)^3} \end{bmatrix} = \frac{2}{z(x+y)^3}\begin{bmatrix} y^2 & -xy \\ -xy & x^2 \end{bmatrix}$$

c) Für $\lambda > 0$ (Untersuchung auf positive Homogenität reicht in diesem Zusammenhang) gilt $f(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \frac{(\lambda y)^2}{\lambda z(\lambda x + \lambda y)} = \frac{\lambda^2 y^2}{\lambda^2 z(x+y)} = \frac{y^2}{z(x+y)}$. f ist also Null-homogen. Die partiellen Elastizitäten lauten hier $\varepsilon_{f,1}(x,y) = -\frac{x}{x+y}$, $\varepsilon_{f,2}(x,y) = \frac{y+2x}{x+y}$, $\varepsilon_{f,3}(x,y,z) = -1$. In der Summe ergibt sich

$$-\frac{x}{x+y} + \frac{y+2x}{x+y} - 1 = \frac{-x+y+2x}{x+y} - 1 = 0$$

d) Definitheit von $H_g(x,y)$ ist gleichwertig mit Definitheit von $M(x,y) = \begin{bmatrix} y^2 & -xy \\ -xy & x^2 \end{bmatrix}$.

Für einen beliebigen Vektor $(a,b)^T \in \mathbb{R}^2$ gilt nun

$$(a,b)\begin{bmatrix} y^2 & -xy \\ -xy & x^2 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = a^2y^2 - 2abxy + b^2x^2 = (ay-bx)^2 \geq 0$$

Also ist $H_f(x,y)$ für alle $x, y > 0$ positiv semidefinit. Die Funktion g ist daher in ihrem Definitionsbereich konvex.

Kapitel 6

Aufgabe 1.

a) f hat Gradienten $\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} -4x+2y \\ 2x-3y \end{pmatrix}$ und Hesse-Matrix $H_f(x,y) = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$.

Der einzige kritische Punkt liegt in $(x,y) = (0,0)^T$ vor. Die Hesse-Matrix ist pauschal negativ definit (Hauptminoren $-4 < 0$ und $8 > 0$), daher ist f (streng) konkav. Im kritischen Punkt liegt dann ein globales Maximum vor.

b) g hat Gradienten $\nabla g(x,y) = \begin{pmatrix} 4x+3y \\ 3x-2y \end{pmatrix}$ und Hesse-Matrix $H_g(x,y) = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$.

Die Hesse-Matrix hat Determinante $-14 < 0$, ist daher pauschal indefinit. Deshalb kann g in keinem Punkt ein lokales Extremum haben.

c) Hier ist $\nabla k(x,y,z) = \begin{pmatrix} -9x+4y \\ -4y+4x+z \\ y+100 \end{pmatrix}$ und $H_k(x,y,z) = \begin{bmatrix} -9 & 4 & 0 \\ 4 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Die Hesse-Matrix hat Hauptminoren $-9 < 0$, $20 > 0$, $9 > 0$, ist also stets indefinit. Die Funktion ist also weder konkav noch konvex und kann auch keine (lokalen) Extrema haben.

Aufgabe 2. $\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 4(x-1) \\ -3y^2-2y \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow x = 1 \wedge y = 0 \vee x = 1 \wedge y = -\frac{2}{3}$

$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -6y-2 \end{pmatrix}$. Daher $H_f(1,0) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$indefinit$\Rightarrow$ kein Extremum, sondern Sattelpunkt. $H_f(1,-\frac{2}{3}) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$positiv definit $\Rightarrow$ lokales Minimum

Aufgabe 3.

a) $H_f(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ ist positiv semidefinit nach Definition. $f(x,y) \geq 0 \forall x, y \in \mathbb{R} \Rightarrow$ f hat in $(0,0)$ globales Minimum

b) $H_f(x,y) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$ ist negativ semidefinit nach Definition. $f(x,y) \leq 0 \forall x, y \in \mathbb{R} \Rightarrow f$hat in $(t,0)$ globales, aber nicht isoliertes Maximum

c) $H_f(0,0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ist positiv semidefinit nach Definition. Es existieren in jeder Umgebung von $(0,0)$ größere und kleinere Werte als $f(0,0)$.

Aufgabe 4.

a) $G(x,y) = cx^\alpha y^\beta - ax - by$

b) $\nabla G(x,y) = \begin{pmatrix} c\alpha x^{\alpha-1}y^\beta - a = 0 \\ c\beta x^\alpha y^{\beta-1} - b = 0 \end{pmatrix}$

Notwendige Bedingung für ein DB-Maximum: $\nabla G(x,y) = \bar{0}$, also

$$\begin{array}{rcl} c\alpha x^{\alpha-1}y^\beta &=& a, \qquad c\beta x^\alpha y^{\beta-1} = b \\ cx^\alpha y^\beta &=& \frac{a}{\alpha}x, \qquad cx^\alpha y^\beta = \frac{b}{\beta}y \\ \frac{a}{\alpha}x &=& \frac{b}{\beta}y \Leftrightarrow y = \frac{a\beta}{\alpha b}x \Leftrightarrow x = \frac{\alpha b}{a\beta}y \end{array}$$

Einsetzen von y bzw. x in $cx^\alpha y^\beta = \frac{a}{\alpha}x$ bzw. $cx^\alpha y^\beta = \frac{b}{\beta}y$ ergibt

$$\begin{array}{ll} cx^\alpha\left(\frac{a\beta}{\alpha b}x\right)^\beta = \frac{a}{\alpha}x, & c\left(\frac{\alpha b}{a\beta}y\right)^\alpha y^\beta = \frac{b}{\beta}y \\ x^{\alpha+\beta-1} = \frac{a}{\alpha c}\left(\frac{\alpha b}{a\beta}\right)^\beta, & y^{\alpha+\beta-1} = \frac{b}{\beta c}\left(\frac{a\beta}{\alpha b}\right)^\alpha \\ x = \sqrt[\alpha+\beta-1]{\frac{a}{\alpha c}\left(\frac{\alpha b}{a\beta}\right)^\beta}, & y = \sqrt[\alpha+\beta-1]{\frac{b}{\beta c}\left(\frac{a\beta}{\alpha b}\right)^\alpha} \end{array}$$

c) Bestimmung und Vereinfachung der Hesse-Matrix:

$$\begin{aligned} H_G(x,y) &= c\begin{bmatrix} \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}y^\beta & \alpha\beta x^{\alpha-1}y^{\beta-1} \\ \alpha\beta x^{\alpha-1}y^{\beta-1} & \beta(\beta-1)x^\alpha y^{\beta-2} \end{bmatrix} \\ &= cx^\alpha y^\beta\begin{bmatrix} \alpha(\alpha-1)/x^2 & \alpha\beta/(xy) \\ \alpha\beta/(xy) & \beta(\beta-1)/y^2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Hauptminoren sind $cx^\alpha y^\beta\alpha(\alpha-1)/x^2 < 0$ und

$$\begin{array}{rl} & (cx^\alpha y^\beta)^2(\alpha(\alpha-1)/x^2 \cdot \beta(\beta-1)/y^2 - (\alpha\beta/(xy))^2) \\ = & \frac{\alpha\beta(cx^\alpha y^\beta)^2}{x^2y^2}((\alpha-1)(\beta-1) - \alpha\beta) \\ = & \frac{(cx^\alpha y^\beta)^2}{x^2y^2}(1-\alpha-\beta) > 0 \end{array}$$

Also ist $H_G(x,y)$ stets negativ definit und G ist streng konkav. Im kritischen Punkt liegt daher ein globales DB-Maximum vor.

Aufgabe 5. Der nächste berechnete Punkt ergibt sich gemäß Newton-Verfahren ⇨ vgl. S. 233 als

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} - H_f(x_0,y_0)^{-1}\nabla f(x_0,y_0)$$

a) Hier ist $\nabla f(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} 8(x_0+1)^3 \\ 2y_0 \end{pmatrix}$ und $H_f(x_0,y_0) = \begin{bmatrix} 24(x_0+1)^2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$. Die dazu inverse Matrix ist $H_f(x_0,y_0)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{24(x_0+1)^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$. Also lautet der nächste Punkt

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{1}{24(x_0+1)^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{pmatrix} 8(x_0+1)^3 \\ 2y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 - \frac{1}{3}(x_0+1) \\ y_0 - \frac{1}{2}2y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}x_0 - \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$$

b) Hier ist $\nabla f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} 4x_0^3 + 2y_0 \\ 2x_0 + 2y_0 \end{pmatrix}$ und $H_f(x_0, y_0) = \begin{bmatrix} 12x_0^2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$. Die dazu inverse Matrix ist nach Beispiel 3.28 ⇨ vgl. S. 110 $H_f(x_0, y_0)^{-1} = \frac{1}{24x_0^2-4} \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 12x_0^2 \end{bmatrix}$. Also lautet der nächste Punkt

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} - \frac{1}{24x_0^2 - 4} \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 12x_0^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 4x_0^3 + 2y_0 \\ 2x_0 + 2y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 - \frac{2(4x_0^3+2y_0)-2(2x_0+2y_0)}{24x_0^2-4} \\ y_0 - \frac{(-2)(4x_0^3+2y_0)+12x_0^2(2x_0+2y_0)}{24x_0^2-4} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{x_0(24x_0^2-4)-2(4x_0^3+2y_0)+2(2x_0+2y_0)}{24x_0^2-4} \\ \frac{y_0(24x_0^2-4)+2(4x_0^3+2y_0)-12x_0^2(2x_0+2y_0)}{24x_0^2-4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{16x_0^3}{24x_0^2-4} \\ \frac{-16x_0^3}{24x_0^2-4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4x_0^2}{6x_0^2-1} \\ -\frac{4x_0^2}{6x_0^2-1} \end{pmatrix}$$

Aufgabe 6. Es werden jeweils mit den partiellen Ableitungen der Zielfunktion f und der Nebenbedingungsfunktion g die Kuhn-Tucker-Bedingungen $\nabla f(x,y) + \lambda \nabla g(x,y) = \bar{0}$ (d.h. $D_1 f(x,y) + \lambda D_1 g(x,y) = 0$, $D_2 f(x,y) + \lambda D_2 g(x,y) = 0$) zusammen mit der Nebenbedingung $g(x,y) = 0$ aufgestellt und gelöst. Dieselben Gleichungen ergeben sich, wenn man die Lagrange-Funktion $L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda g(x,y)$ partiell nach x, y, λ ableitet und diese drei partiellen Ableitungen gleich Null setzt.

a) $f(x,y) = x^2 + y^2$, $g(x,y) = xy - 4$. Damit lauten die Kuhn-Tucker-Bedingungen:

$$2x + \lambda y = 0, 2y + \lambda x = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + \lambda xy = 0 = 2y^2 + \lambda xy$$

Dabei wurde die erste Gleichung mit x und die zweite Gleichung mit y multipliziert. Die Lösungsmenge verändert sich hierdurch nicht, weil die Nebenbedingung $xy = 4$ bedeutet, dass weder x noch y gleich Null sein können. Subtrahiert man nun die beiden gewonnenen Gleichungen voneinander

$$2x^2 = y^2$$

also $x^2 = y^2$, d.h. $x = y$ oder $x = -y$. Die letzte Gleichung kann aber nicht gelten, weil sie im Widerspruch zur Nebenbedingung $xy = 4$ steht (das Produkt aus x und y ist 4 und kann nicht negativ sein).

Es gilt also $x = y$ und damit $x^2 = 4$, d.h. $x = \pm 2$ und damit $y = x = \pm 2$. Es gibt daher zwei kritische Punkte $(2,2)^T$ und $(-2,-2)^T$.

b) Hier lauten die KT-Bedingungen

$$2x + \lambda = 0, 2y - 2\lambda = 0 \Leftrightarrow 2x + \lambda = 0, y - \lambda = 0$$

Addition der Gleichungen ergibt

$$2x + y = 0 \Leftrightarrow y = -2x$$

Substituiert man jetzt y in der Nebenbedingung, so folgt

$$x - 2(-2x) = 5t \Leftrightarrow 5x = 5t \Leftrightarrow x = t$$

Damit dann $y = -2t$. Der (einzige) kritische Punkt ist $(t, -2t)^T$

c) Hier lauten die KT-Bedingungen

$$1 + 2\lambda x = 0, -2 + 2\lambda y = 0 \Leftrightarrow y + 2\lambda xy = 0 = -2x + 2\lambda xy$$

Subtrahiert man die Gleichungen voneinander, so folgt $y = -2x$. Das wird nun in die Nebenbedingung substituiert

$$x^2 + (-2x)^2 = 5t^2 \Leftrightarrow 5x^2 = 5t^2 \Leftrightarrow x = \pm t$$

Es gibt daher zwei kritische Punkte: $(t, -2t)^T$ und $(-t, 2t)^T$.

Aufgabe 7. Die Lagrangefunktion lautet: $L(x, y, \lambda) = 10\sqrt{x} + 20\ln(y+1) + 50 + \lambda(10x + 20y - 30)$. Sie muss nach x, y und λ differenziert werden.

Setzt man diese Ableitungen jeweils gleich Null, so ist folgendes Lagrange-Gleichungssystem zu lösen:

- KT-Bedingungen sind $\frac{5}{\sqrt{x}} + 10\lambda = 0$, $\frac{20}{y+1} + 20\lambda = 0$,
- Die Nebenbedingung ist $10x + 20y = 30$.

Multipliziert man die erste Gleichung der KT-Bedingungen mit 2, so ergibt sich

$$\frac{10}{\sqrt{x}} + 20\lambda = 0, \frac{20}{y+1} + 20\lambda = 0$$

Subtraktion der beiden Gleichungen führt zu

$$\frac{10}{\sqrt{x}} - \frac{20}{y+1} = 0$$

Wenn nun die Brüche auf verschiedene Seiten der Gleichung gebracht werden und dann die Gleichung quadriert wird, so folgt

$$\frac{100}{x} = \frac{400}{(y+1)^2} \Leftrightarrow (y+1)^2 = 4x \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}(y+1)^2$$

Das wird jetzt in die Nebenbedingung eingesetzt:

$$10 \cdot \frac{1}{4}(y+1)^2 + 20y = 30 \Leftrightarrow \frac{5}{2}y^2 + 25y - \frac{55}{2} = 0 \Leftrightarrow y^2 + 10y - 11 = 0$$

Diese Gleichung hat die Lösungen $y = 1, y = -11$. Die einzige Lösung $y \geq 0$ ist $y = 1$. Dazu gehört $x = \frac{1}{4}(1+1)^2 = 1$. Der Lagrange-Multiplikator ergibt sich aus

$$\frac{5}{\sqrt{1}} + 10\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = -\frac{1}{2}$$

Weil zwischendurch eine Gleichung quadriert wurde und sich die Lösungsmenge vergrößern kann, muss nun noch geprüft werden, ob dieser kritische Punkt auch die Ausgangsgleichungen erfüllt. Die erste der KT-Bedingungen haben wir durch die Berechnung des Lagrange-Multiplikators geprüft. Die zweite lautet

$$\frac{20}{1+1} + 20 \cdot (-\frac{1}{2}) = 0$$

und ist offensichtlich wahr. Die Nebenbedingung ist ebenfalls erfüllt

$$10 \cdot 1 + 20 \cdot 1 = 30$$

Der kritische Punkt ist also $(x, y)^T = (1, 1)^T$ mit einer Absatzwirkung von etwa 73,86.

Aufgabe 8. Die Lagrange-Funktion lautet

$$L(x, y, z, \lambda) = x - 2y + z + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 6)$$

Das Lagrange-Gleichungssystem ergibt sich durch Null setzen der partiellen Ableitungen von L nach x, y, z, λ

$$\begin{aligned} 1 + 2\lambda x &= 0 \\ -2 + 2\lambda y &= 0 \\ 1 + 2\lambda z &= 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 6 &= 0 \end{aligned}$$

Multipliziere die erste und dritte Gleichung mit -2:

$$\begin{aligned} -2 - 4\lambda x &= 0 \\ -2 + 2\lambda y &= 0 \\ -2 - 4\lambda z &= 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 6 &= 0 \end{aligned}$$

Subtrahiere die erste von der zweiten und der dritten Gleichung, das ergibt

$$-4\lambda x = 2\lambda y, -4\lambda x = -4\lambda z \Rightarrow y = -2x, z = x$$

Dies kann jetzt in die Nebenbedingung substituiert werden:

$$x^2 + (-2x)^2 + x^2 = 6 \Leftrightarrow 6x^2 = 6 \Leftrightarrow x = \pm 1$$

Rücksubstitution ergibt

$$\begin{aligned} x = 1 &\Rightarrow y = -2, z = 1 \\ x = -1 &\Rightarrow y = 2, z = -1 \end{aligned}$$

Es gibt also zwei kritische Punkte: $(x, y, z)^T = (1, -2, 1)^T$ und $(x, y, z)^T = (-1, 2, -1)^T$.

Aufgabe 9. Die logarithmierte Zielfunktion ist

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \ln(x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}) = \alpha_1 \ln(x_1) + \cdots + \alpha_n \ln(x_n)$$

Weil der Logarithmus eine streng monoton wachsende Funktion ist, stellt jedes Maximum von f (unter der Nebenbedingung) auch ein Maximum der Ausgangsfunktion (unter der Nebenbedingung) dar und umgekehrt. Deshalb kann man auch die logarithmierte Zielfunktion unter der Nebenbedingung optimieren. Lediglich der Zielfunktionswert von f muss schließlich noch exponenziert werden um den Zielwert des Ausgangsproblems zu bekommen.

f hat den Gradienten

$$\nabla f(x_1, \ldots, x_n) = \left(\frac{\alpha_1}{x_1}, \ldots, \frac{\alpha_n}{x_n}\right)^T$$

Die Kuhn-Tucker-Bedingungen lauten also

$$\begin{aligned} \alpha_1/x_1 + \lambda &= 0 \\ \alpha_2/x_2 + \lambda &= 0 \\ &\vdots \\ \alpha_n/x_n + \lambda &= 0 \end{aligned}$$

Durch Gleichsetzen bekommt man

$$\alpha_j/x_j = \alpha_1/x_1 \Leftrightarrow x_j = \frac{\alpha_j}{\alpha_1}x_1 \quad \text{für } j = 1, \ldots, n$$

was man in die Nebenbedingung einsetzen kann:

$$1 = \frac{\alpha_1}{\alpha_1}x_1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1}x_1 + \cdots + \frac{\alpha_n}{\alpha_1}x_1 = \frac{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n}{\alpha_1}x_1$$

Daraus ergeben sich die Koordinaten $x_1, \ldots, x_n$ des kritischen Punktes:

$$x_1 = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n}$$

und durch Rücksubstitution in die KT-Bedingungen

$$x_j = \frac{\alpha_j}{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n} \quad \text{für } j = 1, \ldots, n$$

Inhaltlicher Hinweis: Dieses Optimierungsproblem tritt in der Statistik auf (Maximum-Likelihood-Schätzung bei Multinomialverteilungen)

Aufgabe 10. Zu lösen: Minimiere $f(x, y, z) = 2x^2 + y^2 + 1,5z^2$ unter den folgenden zwei Nebenbedingungen:

- $g_1(x, y, z) = x + y + z - 1 = 0$, d.h. die Anteile im Portfolio summieren sich zu 1,
- $g_2(x, y, z) = 9x + 7y + 8z - 8,5 = 0$, d.h. eine Rendite von 8,5 ist vorgegeben.

Die KT-Bedingungen lauten:

$$\begin{aligned} 4x + \lambda + 9\mu &= 0 \\ 2y + \lambda + 7\mu &= 0 \\ 3z + \lambda + 8\mu &= 0 \end{aligned}$$

(Die zweite dieser Gleichungen wird zum Schluss zur Berechnung von λ durch Rücksubstitution verwendet). Hinzu kommen die Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ 9x + 7y + 8z &= 8,5 \end{aligned}$$

Es handelt sich hier um ein lineares Gleichungssystem in fünf Unbekannten, welches mit dem GEV gelöst werden könnte. Da λ und μ aber nur in den KT-Gleichungen auftauchen, ist hier eine ad-hoc-Lösung durch Subtraktions- und Einsetzungsverfahren leichter. Zur Information wird aber im Anschluss auch noch die Lösung mit dem GEV angegeben:

Zunächst werden die Lagrange-Multiplikatoren aus den KT-Bedingungen eliminiert. Dies geschieht im ersten Schritt (z.B.) durch Subtraktion der zweiten von der ersten und der dritten von der ersten Gleichung

$$\begin{aligned} 4x - 2y + 2\mu &= 0 \\ 4x - 3z + \mu &= 0 \end{aligned}$$

(Die zweite dieser Gleichungen wird zum Schluss zur Berechnung von μ mit Rücksubstitution verwendet). Substituiert man nun μ aus der zweiten gewonnenen Gleichung in die erste , so erhält man

$$4x - 2y + 2(-4x + 3z) = 0 \Leftrightarrow -4x + 2y + 6z = 0 \Leftrightarrow 2x + y - 3z = 0$$

Zusammen mit den Nebenbedingungen verbleibt das LGS

$$\begin{aligned} 2x + y - 3z &= 0 \\ x + y + z &= 1 \Leftrightarrow z = 1 - x - y \\ 9x + 7y + 8z &= 8,5 \end{aligned}$$

Substituiert man z, so folgt

$$\begin{aligned} 2x + y - 3(1 - x - y) &= 0 \\ 9x + 7y + 8(1 - x - y) &= 8,5 \end{aligned}$$

also das LGS

$$\begin{aligned} 5x + 4y &= 3 \\ x - y &= \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = y + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Einsetzen von x aus der zweiten Gleichung in die erste ergibt

$$5(y + \frac{1}{2}) + 4y = 3 \Leftrightarrow 9y = \frac{1}{2} \Leftrightarrow y = \frac{1}{18}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{18} + \frac{1}{2} = \frac{5}{9} \\ y &= 1 - \frac{5}{9} - \frac{1}{18} = \frac{7}{18} \end{aligned}$$

Die Lagrange-Multiplikatoren ergeben sich dann aus den oben verwendeten KT-Bedingungen

$$\begin{aligned} 4x - 3z + \mu = 0 \Leftrightarrow \mu &= -4x + 3z = (-4) \cdot \frac{5}{9} + 3 \cdot \frac{7}{18} = -\frac{19}{18} \\ 2y + \lambda + 7\mu = 0 \Leftrightarrow \lambda &= -2y - 7\mu = (-2) \cdot \frac{1}{18} - 7 \cdot (-\frac{19}{18}) = \frac{131}{18} \end{aligned}$$

Kritischer Punkt ist also ist $x = \frac{5}{9}, y = \frac{1}{18}, z = \frac{7}{18}, \lambda = \frac{131}{18}, \mu = -\frac{19}{18}$.

Wie angekündigt hier auch noch die Lösung mit dem GEV: Die KT-Bedingungen zusammen mit den Nebenbedingungen schreiben sich als Gleichungsmatrix, die in ZSF überführt wird, dabei wird dem GEV wie im Buch beschrieben gefolgt.

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 4 & 0 & 0 & 1 & 9 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 8 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 9 & 7 & 8 & 0 & 0 & \frac{17}{2} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{I \to \left(\frac{1}{4}\right) I} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{9}{4} & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 8 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 9 & 7 & 8 & 0 & 0 & \frac{17}{2} \end{array}\right] \xrightarrow[V+(-9)\,I]{IV+(-1)\,I} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{9}{4} & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 8 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{4} & -\frac{9}{4} & 1 \\ 0 & 7 & 8 & -\frac{9}{4} & -\frac{81}{4} & \frac{17}{2} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{II \to \left(\frac{1}{2}\right) II} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{9}{4} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{7}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 8 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{4} & -\frac{9}{4} & 1 \\ 0 & 7 & 8 & -\frac{9}{4} & -\frac{81}{4} & \frac{17}{2} \end{array}\right] \xrightarrow[V+(-7)\,II]{IV+(-1)\,II} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{9}{4} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{7}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{4} & -\frac{23}{4} & 1 \\ 0 & 0 & 8 & -\frac{23}{4} & -\frac{179}{4} & \frac{17}{2} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{III \to \left(\frac{1}{3}\right) III} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{9}{4} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{7}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{8}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{4} & -\frac{23}{4} & 1 \\ 0 & 0 & 8 & -\frac{23}{4} & -\frac{179}{4} & \frac{17}{2} \end{array}\right] \xrightarrow[V+(-8)\,III]{IV+(-1)\,III} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{9}{4} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{7}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{8}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{13}{12} & -\frac{101}{12} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{101}{12} & -\frac{793}{12} & \frac{17}{2} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{IV \to \left(-\frac{12}{13}\right) IV} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{9}{4} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{7}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{8}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{101}{13} & -\frac{12}{13} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{101}{12} & -\frac{793}{12} & \frac{17}{2} \end{array}\right] \xrightarrow{V+\left(\frac{101}{12}\right) IV} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{9}{4} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{7}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{8}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{101}{13} & -\frac{12}{13} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{9}{13} & \frac{19}{26} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{V \to \left(-\frac{13}{9}\right) V} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{9}{4} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{7}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{8}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{101}{13} & -\frac{12}{13} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{19}{18} \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{I+\left(-\frac{9}{4}\right) V \\ II+\left(-\frac{7}{2}\right) V \\ III+\left(-\frac{8}{3}\right) V \\ IV+\left(-\frac{101}{13}\right) V}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{19}{8} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{133}{36} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{76}{27} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{131}{18} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{19}{18} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\substack{I+\left(-\frac{1}{4}\right) IV \\ II+\left(-\frac{1}{2}\right) IV \\ III+\left(-\frac{1}{3}\right) IV}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{5}{9} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{18} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{7}{18} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{131}{18} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{19}{18} \end{array}\right]$$

Aufgabe 11.

a) Notwendige Bedingung für ein lokales Extremum ist $\nabla f(x,y) = (0,0)^T$, also $8x - 3y = 0 = -3x$. Hieraus folgt $x = y = 0$. Die Hesse-Matrix von f ist $H_f(x,y) = \begin{bmatrix} 8 & -3 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$ und ist wegen $\det(H_f(0,0)) = -9 < 0$ indefinit. Im kritischen Punkt liegt also kein lokales Extremum vor, vielmehr handelt es sich hierbei um einen Sattelpunkt.

b) Die KT-Bedingungen für dieses Optimierungsproblem unter Ungleichungs-NB lauten

$$\begin{aligned} 8x - 3y + \mu 2x &= 0 \\ -3x + \mu 2y &= 0 \\ \mu = 0 \vee x^2 + y^2 &= 1 \end{aligned}$$

Dann gilt sicherlich $x \neq 0, y \neq 0$, denn aus $x = 0$ würde $y = 0$ folgen und umgekehrt. Der Punkt $(0,0)^T$ wäre aber als Punkt mit inaktiver Nebenbedingung ein lokales Extremum ohne NB. Das widerspricht aber der Aussage aus der vorigen Teilaufgabe. Man multipliziert nun die erste Gleichung der KT-Bedingungen mit y und die zweite mit x (und merkt sich, dass eventuell hinzukommende Lösungen mit $x = 0$ oder $y = 0$ eben nicht berücksichtigt werden dürfen) und erhält

$$\begin{aligned} 8xy - 3y^2 + \mu 2xy &= 0 \\ -3x^2 + \mu 2xy &= 0 \end{aligned}$$

Subtrahiert man nun die beiden Gleichungen voneinander, so wird der Lagrange-Multiplikator eliminiert und es ergibt sich

$$8xy - 3y^2 = -3x^2$$

Zudem ist auch die NB aktiv, denn wäre $\mu = 0$, so würde aus den KT-Bedingungen wieder $x = 0 = y$ folgen. Also bekommt man aus den KT-Bedingungen das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 3x^2 + 8xy - 3y^2 &= 0 \\ x^2 + y^2 &= 1 \end{aligned}$$

Die aktive NB wird nun (z.B.) nach y aufgelöst:

$$y^2 = 1 - x^2 \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{1 - x^2}$$

und in die KT-Gleichung eingesetzt, was auf zwei Möglichkeiten geht.

[1] Erste Möglichkeit: Substitution von $y = \sqrt{1 - x^2}$:

$$3x^2 + 8x\sqrt{1 - x^2} - 3(1 - x^2) = 0 \Leftrightarrow 8x\sqrt{1 - x^2} = 3 - 6x^2$$

Quadrieren der Gleichung führt zu

$$64x^2(1 - x^2) = 9 - 36x^2 + 36x^4 \Leftrightarrow 100x^4 - 100x^2 + 9 = 0 \Leftrightarrow x^4 - x^2 + \frac{9}{100} = 0$$

Es ergibt sich $x^2 = \frac{1}{10}$ oder $x^2 = \frac{9}{10}$. Für x hat man dann vier Lösungskandidaten, zu denen jeweils zur Probe die Gleichung $8xy + 3x^2 - 3y^2 = 0$ zu prüfen ist.

– $x = \frac{1}{\sqrt{10}}$. Dazu ist dann $y = \frac{3}{\sqrt{10}}$ und $8xy + 3x^2 - 3y^2 = 0$
– $x = -\frac{1}{\sqrt{10}}$. Dazu ist dann $y = \frac{3}{\sqrt{10}}$ und $8xy + 3x^2 - 3y^2 = -48/10 \neq 0$
– $x = \frac{3}{\sqrt{10}}$. Dazu ist dann $y = \frac{1}{\sqrt{10}}$ und $8xy + 3x^2 - 3y^2 = 48/10 \neq 0$
– $x = -\frac{3}{\sqrt{10}}$. Dazu ist dann $y = \frac{1}{\sqrt{10}}$ und $8xy + 3x^2 - 3y^2 = 0$

Es bleiben also nur die Punkte $(\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}})^T$ und $(-\frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}})^T$.

[2] Zweite Möglichkeit: Substitution von $y = -\sqrt{1 - x^2}$:

$$3x^2 - 8x\sqrt{1 - x^2} - 3(1 - x^2) = 0 \Leftrightarrow -8x\sqrt{1 - x^2} = 3 - 6x^2$$

Quadrieren der Gleichung führt wieder zu

$$64x^2(1 - x^2) = 9 - 36x^2 + 36x^4 \Leftrightarrow 100x^4 - 100x^2 + 9 = 0 \Leftrightarrow x^4 - x^2 + \frac{9}{100} = 0$$

Es ergibt sich also wieder $x^2 = \frac{1}{10}$ oder $x^2 = \frac{9}{10}$. Auch hier hat mal also vier Lösungskandidaten, allerdings gehört zu jedem x der Wert $y = -\sqrt{1 - x^2}$. Wieder muss zur Probe die Gleichung $8xy + 3x^2 - 3y^2 = 0$ geprüft werden.

– $x = \frac{1}{\sqrt{10}}$. Dazu ist dann $y = -\frac{3}{\sqrt{10}}$ und $8xy + 3x^2 - 3y^2 = -48/10 \neq 0$
– $x = -\frac{1}{\sqrt{10}}$. Dazu ist dann $y = -\frac{3}{\sqrt{10}}$ und $8xy + 3x^2 - 3y^2 = 0$
– $x = \frac{3}{\sqrt{10}}$. Dazu ist dann $y = -\frac{1}{\sqrt{10}}$ und $8xy + 3x^2 - 3y^2 = 0$
– $x = -\frac{3}{\sqrt{10}}$. Dazu ist dann $y = -\frac{1}{\sqrt{10}}$ und $8xy + 3x^2 - 3y^2 = 48/10 \neq 0$

Hier bleiben also $(-\frac{1}{\sqrt{10}}, -\frac{3}{\sqrt{10}})^T$ und $(\frac{3}{\sqrt{10}}, -\frac{1}{\sqrt{10}})^T$ übrig.

Unter der Nebenbedingung $x^2 + y^2 \leq 1$ hat f die kritischen Punkte $\pm(\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}})$ (Lagrange-Multiplikator $-\frac{1}{2}$) und $\pm(\frac{3}{\sqrt{10}}, -\frac{1}{\sqrt{10}})$ (Lagrange-Multiplikator $\frac{9}{2}$).

In der Aufgabe sind zwar nicht die globalen Extrema gesucht, aber wir wollen trotzdem hier kurz darauf eingehen. Wenn man die Zielwerte dieser vier kritischen Punkte vergleicht, so bekommt man folgende Tabelle:

x	y	$4x^2 - 3xy$
$\frac{1}{\sqrt{10}}$	$\frac{3}{\sqrt{10}}$	$-\frac{1}{2}$
$-\frac{1}{\sqrt{10}}$	$-\frac{3}{\sqrt{10}}$	$-\frac{1}{2}$
$\frac{3}{\sqrt{10}}$	$-\frac{1}{\sqrt{10}}$	$\frac{9}{2}$
$-\frac{3}{\sqrt{10}}$	$\frac{1}{\sqrt{10}}$	$\frac{9}{2}$

Das Optimierungsproblem erfüllt alle Voraussetzungen des Satzes 6.15 im Buch ⇨ vgl. S. 258, so dass man durch diesen Funktionswertvergleich die globalen Extrema herausfindet: Die ersten beiden kritischen Punkte sind Stellen eines globalen Minimums, die letzten beiden eines globalen Maximums.

Aufgabe 12. Optimierungsproblem: $G(x, y) = -\frac{5}{4}x^2 - \frac{9}{4}y^2 - \frac{1}{2}xy + 600x + 1200y - 9200 \stackrel{!}{=} \max$ unter $x + y \leq 240$.

Ein kritischer Punkt ergibt sich aus den Kuhn-Tucker-Bedingungen

$$\begin{aligned}
-\frac{5}{2}x - \frac{1}{2}y + 600 + \mu &= 0 \\
-\frac{9}{2}y - \frac{1}{2}x + 1200 + \mu &= 0 \\
\mu = 0 \vee x^2 + y^2 &= 240
\end{aligned}$$

Gleichsetzen über μ ergibt

$$-\frac{5}{2}x - \frac{1}{2}y + 600 = -\frac{9}{2}y - \frac{1}{2}x + 1200 \Leftrightarrow -2x + 4y = 600 \Leftrightarrow x = 2y - 300$$

Die Bedingung vom komplementären Schlupf führt zu zwei Möglichkeiten:

[1] $\mu = 0$ ergibt

$$\begin{aligned}
\frac{5}{2}x + \frac{1}{2}y = 600 &\Leftrightarrow 5x + y = 1200 \\
\frac{1}{2}x + \frac{9}{2}y = 1200 &\Leftrightarrow x + 9y = 2400
\end{aligned}$$

Subtituiert man $y = 1200 - 5x$ in die zweite Gleichung, so folgt

$$x + 9(1200 - 5x) = 2400 \Leftrightarrow -44x = -8400 \Leftrightarrow x = 2100/11$$

und daraus $y = 1200 - 5 \cdot 2100 = 2700/11$. Die Summe beträgt $x + y = 4800/11 \approx 436,36$, was nicht zulässig ist. Der Fall inaktiver Nebenbedingung ergibt also keinen kritischen Punkt.

[2] $\mu \neq 0$ führt dazu, dass die Nebenbedingung aktiv ist, d.h. $x + y = 240$. Substituiert man hier die oben gewonnene Gleichung $x = 2y - 300$, so folgt

$$2y - 300 + y = 240 \Leftrightarrow 3y = 540 \Leftrightarrow y = 180$$

Daraus dann $x = 2y - 300 = 60$. Der Lagrange-Multiplikator dazu ist

$$-\frac{5}{2}x - \frac{1}{2}y + 600 + \mu = 0 \Leftrightarrow \mu = \frac{5}{2}x + \frac{1}{2}y - 600 = -360 < 0$$

Der Fall aktiver Nebenbedingung ergibt also den kritischen Punkt $(60, 180)^T$.

Aufgabe 13.

a) Die Kuhn-Tucker-Bedingungen lauten

$$\begin{aligned} 2x - 20 + 2\mu &= 0 \\ 2y - 10 + 3\mu &= 0 \\ \mu = 0 \vee 2x + 3y &= 22 \end{aligned}$$

In einem lokalen Minimum muss ferner $\mu \geq 0$ gelten. Aus den Bedingungen vom komplementären Schlupf folgen zwei Fälle:

[1] $\mu = 0$, dann besagen die ersten beiden Gleichungen $x = 10, y = 5$. Für die Nebenbedingung gilt dann $2x + 3y = 35$, d.h. der Punkt ist nicht zulässig.

[2] $\mu \neq 0$, dann ist die Nebenbedingung aktiv, d.h. $2x + 3y = 22$. Die KT-Bedingungen vereinfachen sich zu

$$\begin{aligned} 2x - 20 + 2\mu = 0 &\Leftrightarrow \mu = 10 - x \\ 2y - 10 + 3\mu = 0 &\Leftrightarrow \mu = \frac{10}{3} - \frac{2}{3}y \\ 2x + 3y = 22 & \end{aligned}$$

Gleichsetzen über μ ergibt

$$10 - x = \frac{10}{3} - \frac{2}{3}y \Leftrightarrow x = \frac{20}{3} + \frac{2}{3}y$$

Setzt man dies in die aktive Nebenbedingung ein, so folgt

$$2(\frac{20}{3} + \frac{2}{3}y) + 3y = 22 \Leftrightarrow \frac{13}{3}y = \frac{26}{3} \Leftrightarrow y = 2$$

Daraus folgt $x = \frac{20}{3} + \frac{2}{3} \cdot 2 = 8$. Der Lagrange-Multiplikator dazu ist $\mu = 10 - x = 8 \geq 0$. Hier bekommt man also den kritischen Punkt $(8, 2)^T$

b) Wie oben lauten die KT-Bedingungen

$$\begin{aligned} 2x - 20 + 2\mu &= 0 \\ 2y - 10 + 3\mu &= 0 \\ \mu = 0 \vee 2x + 3y &= 48 \end{aligned}$$

In einem lokalen Minimum muss ferner $\mu \geq 0$ gelten. Aus den Bedingungen vom komplementären Schlupf folgen zwei Fälle:

[1] $\mu = 0$, dann besagen die ersten beiden Gleichungen $x = 10, y = 5$. Für die Nebenbedingung gilt dann $2x + 3y = 35$, d.h. der Punkt ist jetzt anders als in der vorigen Teilaufgabe zulässig und stellt einen kritischen Punkt dar.

[2] $\mu \neq 0$, dann ist die Nebenbedingung aktiv, d.h. $2x + 3y = 48$. Die KT-Bedingungen vereinfachen sich zu

$$\begin{aligned} 2x - 20 + 2\mu = 0 &\Leftrightarrow \mu = 10 - x \\ 2y - 10 + 3\mu = 0 &\Leftrightarrow \mu = \frac{10}{3} - \frac{2}{3}y \\ 2x + 3y = 48 & \end{aligned}$$

Gleichsetzen über μ ergibt

$$10 - x = \frac{10}{3} - \frac{2}{3}y \Leftrightarrow x = \frac{20}{3} + \frac{2}{3}y$$

Setzt man dies in die aktive Nebenbedingung ein, so folgt

$$2(\frac{20}{3} + \frac{2}{3}y) + 3y = 48 \Leftrightarrow \frac{13}{3}y = \frac{104}{3} \Leftrightarrow y = 8$$

Daraus folgt $x = \frac{20}{3} + \frac{2}{3} \cdot 8 = 12$. Der Lagrange-Multiplikator dazu ist aber $\mu = 10 - 12 = -2 < 0$. Es handelt sich hier also nicht um einen Kandidaten für ein lokales Minimum.

Aufgabe 14. Das Problem lautet in Minimumform: Minimiere $f(x, y, z) = -4z + x^2 + y^2 + z^2$ unter $h_1(x, y, z) = z - xy \leq 0$ und $h_2(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 3 \leq 0$

Die KT-Bedingungen lauten

- $\nabla f(x, y, z) + \mu_1 \nabla h_1(x, y, z) + \mu_2 \nabla h_2(x, y, z) = 0$
- $\mu_1 h_1(x, y, z) = 0$ und $\mu_1 \geq 0$ und natürlich $h_1(x, y, z) \leq 0$ ($\Leftrightarrow$ ($\mu_1 = 0$ und $h_1(x, y, z) \leq 0$) oder ($h_1(x, y, z) = 0$ und $\mu_1 \geq 0$))
- $\mu_2 h_2(x, y, z) = 0$ und $\mu_2 \geq 0$ und natürlich $h_2(x, y, z) \leq 0$ ($\Leftrightarrow$ ($\mu_2 = 0$ und $h_2(x, y, z) \leq 0$) oder ($h_2(x, y, z) = 0$ und $\mu_2 \geq 0$))

Unter Verwendung der Gradienten

$$\nabla f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z - 4 \end{pmatrix}, \nabla h_1(x, y, z) = \begin{pmatrix} -y \\ -x \\ 1 \end{pmatrix}, \nabla h_2(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}$$

sind die KT-Bedingungen also

i) $2x - \mu_1 y + 2\mu_2 x = 0$

ii) $2y - \mu_1 x + 2\mu_2 y = 0$

iii) $-4 + 2z + \mu_1 + 2\mu_2 z = 0$

iv) $\mu_1(z - xy) = 0$ und $\mu_1 \geq 0$ und $z - xy \leq 0$

v) $\mu_2(x^2 + y^2 + z^2 - 3) = 0$ und $\mu_2 \geq 0$ und $x^2 + y^2 + z^2 - 3 \leq 0$

Aufgrund der verschiedenen Kombinationsmöglichkeiten von iv) und v) erhält man vier Fälle: Die nun erforderliche Rechnung ist allein wegen der vielen Fallunterscheidungen etwas mühsam und zeitaufwändig, weil auch in den Fällen selber noch einmal Fallunterscheidungen auftreten können. So lange man die Übersicht behält, in welchem Fall man sich gerade befindet, gibt es eigentlich keine größeren mathematischen Anforderungen dabei. In jedem dieser Fälle werden μ_1 und μ_2 aus den ersten drei Gleichungen i)-iii) eliminiert. Aus den verbleibenden Gleichungen lassen sich x, y, z jeweils berechnen. Die gewonnenen Lösungskandidaten (x, y, z) sind auf Zulässigkeit und „richtiges“Vorzeichen der Lagrange-Multiplikatoren zu prüfen.

- 1.Fall: $\mu_1 = 0$ und $\mu_2 = 0$: Einsetzen in i)-iii) ergibt keine kritischen Punkte! Aus i)-iii) folgt nämlich $x = y = 0$, $z = 2$. Der Punkt $(0, 0, 2)^T$ Punkt erfüllt aber keine der Nebenbedingungen.

- 2. Fall: $\mu_1 = 0$ und $h_2(x, y, z) = 0$ ergibt ebenfalls keine kritischen Punkte. Die KT-Bedingungen vereinfachen sich dann nämlich zu

$$\begin{aligned} 2x(1 + \mu_2) &= 0 \\ 2y(1 + \mu_2) &= 0 \\ 2z(1 + \mu_2) &= 4 \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 3 \end{aligned}$$

  Falls dann $x \neq 0$ oder $y \neq 0$, so ist $\mu_2 = -1$ und somit ist die dritte Gleichung nicht lösbar (abgesehen davon ergibt ein negativer Lagrange-Multiplikator keinen Kandidaten für ein lokales Minimum). Daher muss nur $x = y = 0$ geprüft werden und hierfür ergibt sich aus der aktiven Nebenbedingung $z^2 = 3$. Der eine Punkt $(0, 0, \sqrt{3})$ erfüllt dann nicht die erste Nebenbedingung $z - xy \leq 0$, der zweite Punkt $(0, 0, -\sqrt{3})$ ist zwar zulässig, hat aber Lagrange-Multiplikator $\mu_2 = -\frac{4}{2\sqrt{3}} - 1$, welcher negativ ist. In der gewählten Minimimierungsform ist dieser Punkt also ebenfalls kein kritischer Punkt.

- 3.Fall: $h_1(x, y, z) = 0$ und $\mu_2 = 0$: Hier verbleibt das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2x - \mu_1 y &= 0 \\ 2y - \mu_1 x &= 0 \\ 2z - 4 + \mu_1 &= 0 \\ z - yx &= 0 \end{aligned}$$

  Die ersten beiden Gleichungen ergeben $x = \frac{1}{2}\mu_1 y = \frac{1}{2}\mu_1(\frac{1}{2}\mu_1 x) = \frac{1}{4}\mu_1^2 x$. Es sind die beiden Teilfälle $x = 0$ und $x \neq 0$ zu prüfen

  [1] Dann führt $x = 0$ zu $y = 0$ und auch $z = 0$, also zum zulässigen Punkt $(0, 0, 0)^T$, für den auch $\mu_1 = 4 > 0$ gilt.

[2] Ist andererseits $x \neq 0$, so darf die obige Gleichung $x = \frac{1}{4}\mu_1^2 x$ durch x geteilt werden und es folgt $\mu_1 = \pm 2$. Die negative Lösung können wir gleich wieder ignorieren, weil dazu kein lokales Minimum gehören kann. Es ist also $\mu_1 = 2$. Dann folgt $x = \frac{1}{2}\mu_1 y = y$, d.h. x und y stimmen überein. Außerdem folgt $2z - 4 + 2 = 0 \Leftrightarrow z = 1$. Die erste (aktive) Nebenbedingung $z - xy = 0$ führt dann zu den beiden kritischen Punkten $(1, 1, 1)^T$ und $(-1, -1, 1)^T$. Beide erfüllen auch die zweite Nebenbedingung (machen sie sogar aktiv).

Insgesamt finden wir im dritten Fall drei kritische Punkte $(0, 0, 0)^T$, $(1, 1, 1)^T$ und $(-1, -1, 1)^T$.

- 4.Fall: $h_1(x, y, z) = 0$ und $h_2(x, y, z) = 0$: Wir haben jetzt das größtmögliche Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2x - \mu_1 y + 2\mu_2 x &= 0 \\ 2y - \mu_1 x + 2\mu_2 y &= 0 \\ -4 + 2z + \mu_1 + 2\mu_2 z &= 0 \\ z - xy &= 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 3 &= 0 \end{aligned}$$

und eliminieren zunächst μ_1, μ_2 aus den ersten drei Gleichungen: Die dritte Gleichung ergibt

$$\mu_1 = 4 - 2z - 2\mu_2 z$$

und wird in die ersten beiden Gleichungen eingesetzt:

$$\begin{aligned} 2x - (4 - 2z - 2\mu_2 z)y + 2\mu_2 x = 0 &\Leftrightarrow x - 2y + zy + \mu_2(x + zy) = 0 \\ 2y - (4 - 2z - 2\mu_2 z)x + 2\mu_2 y = 0 &\Leftrightarrow y - 2x + zx + \mu_2(y + zx) = 0 \end{aligned}$$

Wir müssen nun drei Teilfälle behandeln:

[1] $x + zy = 0$. Mit der ersten NB $z = xy$ folgt $0 = x + zy = x + xy^2 = x(1 + y^2)$. Es muss also $x = 0$ sein und daher $z = 0$. Aus der ersten gewonnenen Gleichung

$$x - 2y + zy + \mu_2(x + zy) = 0$$

folgt zusätzlich $y = 0$. Der Punkt $(0, 0, 0)^T$ kann aber nicht die aktive NB $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ erfüllen. Hier findet man also keinen kritischen Punkt

[2] $y + zx = 0$. Dies lässt sich analog dem vorigen Teilfall behandeln. Man findet nur den Kandidaten $(0, 0, 0)^T$, für den die zweite NB nicht aktiv ist.

[3] $x + zy \neq 0 \neq y + zx$. Dann kann man aus den oben gewonnenen Gleichungen für μ_2 schließen, dass

$$\mu_2 = -\frac{x - 2y + zy}{x + zy} = -\frac{y - 2x + zx}{y + zx}$$

Gleichsetzen und Auflösen der Bruchgleichung ergibt

$$(x - 2y + zy)(y + zx) = (y - 2x + zx)(x + zy)$$

Wenn man die Terme links und rechts des Gleichheitszeichens ausmultipliziert und gemeinsame Summanden links und rechts eliminiert, so verbleibt nur noch die Gleichung

$$2x^2 = 2y^2$$

Die KT-Bedingungen vereinfachen sich dann zu

$$\begin{aligned} x^2 &= y^2 \\ z &= xy \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 3 \end{aligned}$$

Dabei können wir ausschließen dass $xy = 0$, da dies zum bereits im dritten Fall berechneten kritischen Punkt $(0,0,0)^T$ führt. Statt dessen substituieren wir $y^2 = x^2$ und $z = xy$ in der NB $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ und erhalten

$$2x^2 + x^4 = 3 \Leftrightarrow x^4 + 2x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 1)(x^2 + 3) = 0$$

Das entspricht vier möglichen Lösungen $x = \pm 1$ und $y = \pm x$ sowie $z = xy$. Die beiden Lösungen mit $y = x$, d.h. $(1,1,1)^T$ und $(-1,-1,1)^T$ haben wir bereits im dritten Fall gefunden. Zu prüfen ist noch, ob die beiden Kandidaten $(1,-1,-1)^T$ und $(-1,1,-1)^T$ nichtnegative Lagrange-Multiplikatoren haben: Beim ersten Kandidaten ergibt sich

$$\mu_2 = -\frac{1 - 2(-1) + (-1)(-1)}{1 + (-1)(-1)} = -2 < 0$$

Beim zweiten Kandidaten entsprechend

$$\mu_2 = -\frac{(-1) - 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 1}{(-1) + (-1) \cdot 1} = -2 < 0$$

Beide Kandidaten haben also negativen Lagrange-Multiplikator $\mu_2 = -2$, sind also keine lokalen Minima.

Wir erhalten insgesamt folgende kritische Punkte:

- $(0,0,0)^T$ mit Zielwert $f(0,0,0) = 0$
- $(1,1,1)^T$ mit Zielwert $f(1,1,1) = -1$
- $(-1,-1,1)^T$ mit Zielwert $(-1,-1,1) = -1$

Wir wollen hier noch kurz erwähnen, weshalb die kritischen Punkte mit Zielwert -1 bereits das globale Minimum von f (und damit das globale Maximum im Ausgangsproblem) darstellen, denn dieses Argument wird in den weiteren Aufgaben nicht mehr behandelt.

Aufgrund der zweiten NB kann man nämlich als Definitionsbereich für das Problem $\mathbb{D}' = [-3,3]^3$ wählen, ohne den zulässigen Bereich zu verkleinern und damit kritische Punkte oder das gesuchte Minimum zu „verlieren“. Da alle Funktionen differenzierbar auf ganz $\mathbb{R}^3$ sind, kann man den Satz vom Maximum/Minimum 6.15 ⇨ vgl. S. 258 anwenden. Es muss also ein globales Minimum von f unter den NB geben, welches, da $\mathbb{D}'$ groß genug ist, nicht auf dem Rand von $\mathbb{D}'$ liegt. Es verbleibt somit der Wertvergleich der kritischen Punkte und dieser liefert die optimalen Punkte $(1,1,1)^T$ und $(-1,-1,1)^T$.

Aufgabe 15. Die Aufgabe wird jeweils mit den beiden im Buch vorgestellten Möglichkeiten gelöst:

- Es wird jeweils eine Basis von $Gx = \bar{0}$ berechnet – dazu wird G in ZSF überführt und die Basis wie in Satz 2.7 ⇨vgl. S. 62 schematisch bestimmt – und zu einer Matrix A zusammengesetzt. Die Matrix $A^T HA$ wird dann auf (pauschale) Definitheit untersucht.
- Es wird die geränderte Hesse-Matrix , d.h. die Blockmatrix $R = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & G \\ G^T & H \end{bmatrix}$ aufgestellt. Wenn alle Hauptminoren zu einer Zeilen- und Spaltenzahl größer als $2r$ (r Zeilenzahl von G) das Vorzeichen $(-1)^r$ haben, ist H positiv definit unter $Gx = \bar{0}$.

a) Erster Rechenweg:

$G = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$ liegt in ZSF vor. Basis ist $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Dann ist

$$A^T HA = \begin{bmatrix} -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 \end{bmatrix}$$

Diese Matrix ist positiv definit, also ist H positiv definit unter $Gx = \bar{0}$. Hauptminoren müssen zur Zeilenzahl > 2 berechnet werden, also nur die Determinante von R. Diese ist

Zweiter Rechenweg: $R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \\ 2 & -3 & 2 \end{bmatrix}$. Es muss nur die Determinante von R berechnet werden, sie lautet $-6 < 0$, hat also genau das Vorzeichen $(-1)^1$. H ist also positiv definit unter $Gx = \bar{0}$.

b) Erster Rechenweg:

$G \begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix}$ liegt in ZSF vor. Basis ist $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Dann ist

$$A^T HA = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \end{bmatrix}$$

Diese Matrix ist negativ definit, also ist H negativ definit unter $Gx = \bar{0}$.

Zweiter Rechenweg: Hier rechnen wir nach, dass $-H$ positiv definit ist, betrachten also also: $R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & -2 \end{bmatrix}$. Die Determinante ist $-6 < 0$, d.h. (wie in der vorigen Teilaufgabe) ist $-H$ positiv definit unter $Gx = \bar{0}$. Das bedeutet, dass H negativ definit ist unter $Gx = \bar{0}$.

c) Erster Rechenweg:

$G = \begin{bmatrix} 5 & 3 \end{bmatrix}$ hat die ZSF $\begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$. Basis ist $\begin{pmatrix} -\frac{3}{5} \\ 1 \end{pmatrix}$. Dann ist

$$A^T HA = \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{18}{5} \\ \frac{9}{5} + t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{99}{25} + t \end{bmatrix}$$

Diese Matrix ist positiv definit für $t > -\frac{99}{25}$, positiv (und negativ) semidefinit für $t = -\frac{99}{25}$ und negativ definit für $t < -\frac{99}{25}$. Entsprechend ist dann auch das Definitheitsverhalten von H unter $Gx = \bar{0}$.

Zweiter Rechenweg: Wir prüfen H auf positive Definitheit. Die geänderte Hesse-Matrix ist $R = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 3 \\ 5 & 1 & -3 \\ 3 & -3 & t \end{bmatrix}$ und wieder ist nur die Determinante zu berechnen, sie lautet $-99 - 25t = -(99 + 25t)$. Für $t > -\frac{99}{25}$ ist dieser Wert negativ, also ist H dann positiv definit unter $Gx = \bar{0}$. Wenn wir die geänderte Hesse-Matrix mit $-H$ bilden, so ergibt sich die Determinante entsprechend zu $99 + 25t$ und dieser Wert ist negativ für $t < -\frac{99}{25}$. $-H$ ist dann positiv definit, d.h. H ist negativ definit unter $Gx = \bar{0}$. Beachten Sie, dass der Fall $t = \frac{99}{25}$ so nicht gelöst werden kann, weil Nulldeterminanten in der Regel keine hinreichenden Bedingungen für Definitheit liefern, ⇨ vgl. S. 212 im Buch.

d) Erster Rechenweg:

$G = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ hat die ZSF $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{7}{6} \end{bmatrix}$, Basis ist $\begin{pmatrix} 1/2 \\ -7/6 \\ 1 \end{pmatrix}$ bzw. $\begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ 6 \end{pmatrix}$ (wegen des leichteren Rechnens). Dann ist

$$A^T H A = \begin{bmatrix} 3 & -7 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -3 & 2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -7 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -7 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 33 \\ -10 \\ 23 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 307 \end{bmatrix}$$

Diese Matrix ist positiv definit, also ist H positiv definit unter $Gx = \bar{0}$.

Zweiter Rechenweg: $R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 5 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 5 & 2 & 0 & -3 & 2 \\ 3 & 0 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$. Wegen $r = 2$ muss nur die komplette Determinante berechnet werden, was man durch Zeilenumformungen leisten kann.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 5 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 5 & 2 & 0 & -3 & 2 \\ 3 & 0 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \rightarrow \\ \leftarrow \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 5 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 7 & -10 & -8 & -18 \\ 0 & 3 & -9 & -2 & -11 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \xrightarrow{1/3} \\ \underset{3}{\leftarrow} \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 5 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 7 & -10 & -8 & -18 \\ 0 & 1 & -3 & -\frac{2}{3} & -\frac{11}{3} \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \rightarrow \\ \leftarrow \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 5 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 11 & -\frac{10}{3} & \frac{23}{3} \\ 0 & 1 & -3 & -\frac{2}{3} & -\frac{11}{3} \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Daher ist $\det(R) = 3 \cdot 1 \cdot (-1) \cdot \det \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 11 & -\frac{10}{3} & \frac{23}{3} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -33 & 10 & -23 \end{bmatrix} = 307 > 0$ (die Faktoren 1 und -1 kommen vom zweimaligen Entwickeln nach der ersten Spalte). Da dieser Wert dasselbe Vorzeichen hat wie $(-1)^r = (-1)^2 = 1 > 0$, ist H positiv definit unter $Gx = \bar{0}$.

e) Erster Rechenweg:

$G = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ hat ZSF $\begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$. Basis ist $\begin{pmatrix} -3/5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ bzw. $\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$

(des leichteren Rechnens wegen). Dann ist

$$A^T HA = \begin{bmatrix} -3 & 5 & 0 \\ -1 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 5 & 0 \\ -1 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 2 & 4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 5 \\ 5 & -10 \end{bmatrix}$$

Die berechnete Matrix hat Hauptminoren $-5 < 0$ und $250 > 0$, sie ist also negativ definit. Daher ist auch H negativ definit unter $Gx = \bar{0}$.

Zweiter Rechenweg: Man prüft, dass $-H$ positiv definit ist unter $Gx = \bar{0}$. Es ist

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 3 & 1 \\ 5 & 0 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \rightarrow \\ \leftarrow \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 & 5 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \overset{1/2}{\rightarrow} \\ \underset{2}{\leftarrow} \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 & 5 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} \rightarrow \\ \leftarrow \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & \frac{7}{2} \\ 0 & 0 & -1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

und hat Determinante $\det(R) = (-2) \det \begin{bmatrix} -2 & \frac{7}{2} \\ -1 & \frac{3}{2} \end{bmatrix} = -1 < 0$. Außerdem ist noch der Hauptminor $\det(R_3)$ zu berechnen:

$$\det(\begin{bmatrix} 0 & 5 & 3 \\ 5 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix} = -5 < 0$$

Also ist $-H$ positiv definit und H negativ definit unter $Gx = \bar{0}$.

f) Erster Rechenweg:

$G = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ hat ZSF $\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Basis ist $\begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ bzw. $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

(um des einfacheren Rechnens willen). Dann ist

$$A^T HA = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 9 \\ 0 & 2 \\ 5 & 1 \\ 6 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & -7 \\ 13 & -5 \end{bmatrix}$$

Die berechnete Matrix hat Hauptminoren $11 > 0$ und $36 > 0$, sie ist also positiv definit. Daher ist auch H positiv definit unter $Gx = \bar{0}$.

Zweiter Rechenweg: Zunächst wird die Determinante der $5x5$-Hauptuntermatrix von R berechnet:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -5 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \rightarrow \\ \leftarrow \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \rightarrow \\ \leftarrow \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

mit Determinante $\det(R_5) = 11 > 0$ und

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -5 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \rightarrow \\ \leftarrow \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -9 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \xrightarrow{-1} \\ \xleftarrow[-1]{} \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -9 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -5 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{-1/5} \\ \xleftarrow[-5]{} \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -9 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & -\frac{2}{5} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \rightarrow \\ \leftarrow \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{5} & \frac{9}{5} & \frac{9}{5} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{5} & \frac{9}{5} & \frac{9}{5} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{5} & -\frac{23}{5} & -\frac{28}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & -\frac{2}{5} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{-5} \\ \xleftarrow[-1/5]{} \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{5} & \frac{9}{5} & \frac{9}{5} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{5} & \frac{9}{5} & \frac{9}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 23 & 28 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & -\frac{2}{5} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \rightarrow \\ \leftarrow \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 11 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -12 & -15 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 23 & 28 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & -\frac{2}{5} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

mit $\det(R) = (-1) \cdot (-5) \cdot (-\frac{1}{5}) \cdot (-1) \cdot 1 \cdot (-1) \cdot 1 \cdot \det \begin{bmatrix} 11 & 13 \\ -12 & -15 \end{bmatrix} = 9 > 0$. Beide Hauptminoren sind positiv, daher ist H unter $Gx = \bar{0}$ positiv definit.

Aufgabe 16. Es werden jeweils die Hesse-Matrizen zu den Lagrange-Funktionen ermittelt und auf Definitheit unter sucht.

Aufgabe 6.a)

Zusammenfassung der FOC: $\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$, $\nabla g(x,y) = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$. Es gibt zwei kritische Punkte $(2,2)^T$ jeweils mit $\lambda = -2$. Die zu berechnende Hesse-Matrix ist

$$H_L(x,y,\lambda) = H_f(x,y) + \lambda H_g(x,y) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

Sie ist nach dem speziellen Determinantenkriterium für $2x2$-Matrizen ⇨ vgl. S. 212 positiv semidefinit, aber pauschale (strikte) Definitheit ist nicht gegeben. Daher muss die Definitheit unter $Gx = \bar{0}$ geprüft werden, wobei

$$G = \begin{bmatrix} y & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(zum Schluss steht die ZSF). Eine Basis hierzu ist $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Die reduzierte Matrix lautet

$$A^T H_L A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \end{bmatrix}$$

und ist positiv definit. H_L ist also positiv definit unter $Gx = \bar{0}$, also liegt im kritischen Punkt ein lokales Minimum vor. Gleiches gilt auch für den zweiten kritischen Punkt, da alle Bestimmungsgrößen dieselben Werte haben.

Aufgabe 6.b)

Zusammenfassung der FOC: $\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$, $\nabla g(x,y) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Es gibt einen kritischen Punkt $(t,-2t)^T$ mit $\lambda = -2t$. Die zu berechnende Hesse-Matrix ist

$$H_L(x,y,\lambda) = H_f(x,y) + \lambda H_g(x,y) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

und ist pauschal positiv definit, also auch positiv definit unter jeder Nebenbedingung Daher liegt im kritischen Punkt ein lokales Minimum vor.

Aufgabe 6.c)

Zusammenfassung der FOC: $\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\nabla g(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$. Es gibt zwei kritische Punkte $(t,-2t)^T$ mit $\lambda = -\frac{1}{2t}$ und $(-t,2t)^T$ mit $\lambda = \frac{1}{2t}$. Die zu berechnende Hesse-Matrix ist

$$H_L(x,y,\lambda) = H_f(x,y) + \lambda H_g(x,y) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Bei $(t,-2t)^T$ ergibt sich $H_L = -\frac{1}{2t}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ und ist für $t > 0$ pauschal negativ definit. Im kritischen Punkt $(t,-2t)$ liegt daher ein lokales Maximum vor. Bei $(-t,2t)$ ist H_L im Gegensatz dazu pauschal positiv definit, so dass in diesem kritischen Punkt ein lokales Minimum vorliegt.

Aufgabe 7

Zusammenfassung der FOC: $\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 5/\sqrt{x} \\ 20/(y+1) \end{pmatrix}$, $\nabla g(x,y) = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \end{pmatrix}$. Kritischer Punkt ist $(1,1)^T$ mit Lagrange-Multiplikator $\lambda = -\frac{1}{2}$.

Die zu berechnende Hesse-Matrix lautet

$$H_L(x,y) = H_f(x,y) + \lambda H_g(x,y) = \begin{bmatrix} -\frac{5}{2}x^{-3/2} & 0 \\ 0 & -20/(y+1)^2 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5/2 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$$

und ist pauschal negativ definit. Daher liegt im kritischen Punkt ein lokales Maximum vor.

Aufgabe 8

Zusammenfassung der FOC: $\nabla f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\nabla g(x,y,z)) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}$. Die kritischen Punkte lauten $(1,-2,1)^T$ mit Lagrange-Multiplikator $\lambda = -\frac{1}{2}$ und $(-1,2,-1)^T$ mit Lagrange-Multiplikator $\lambda = \frac{1}{2}$.

Die zu prüfende Hesse-Matrix lautet

$$H_L(x,y,z,\lambda) = H_f(x,y,z) + \lambda H_g(x,y,z) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Beim ersten kritischen Punkt mit $\lambda = -\frac{1}{2}$ ist diese Matrix pauschal negativ definit, beim zweiten hingegen pauschal positiv definit. Im ersten kritischen Punkt liegt daher ein lokales Maximum, im zweiten ein lokales Minimum vor.

Aufgabe 10

Zusammenfassung der FOC: $\nabla f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 4x \\ 2y \\ 3z \end{pmatrix}$ $\nabla g_1(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\nabla g_2(x,y,z) = \begin{pmatrix} 9 \\ 8 \\ 7,5 \end{pmatrix}$, kritischer Punkt ist $(\frac{5}{9}, \frac{1}{18}, \frac{7}{18}$ mit Lagrange-Multiplikatoren $\lambda_1 = \frac{131}{18}$, $\lambda_2 = -\frac{19}{18}$. Die zu prüfende Hesse-Matrix lautet

$$H_L(x,y,z,\lambda) = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

und ist pauschal positiv definit. Im kritischen Punkt liegt daher ein lokales Minimum vor.

Aufgabe 17. Lagrange-Ansatz: $y + \lambda a = 0 = x + \lambda b \Rightarrow y = ax/b$

$ax + ax/b = c \Leftrightarrow xa(b+1)/b = c \Leftrightarrow x = bc/(a(b+1)) \Rightarrow y = ac/(b(a+1))$

Zielwert $f(x,y) > 0$, Randwerte $x = 0, y = c/b$ bzw. $y = 0, x = c/a$ führt zu $f(0, c/b) = f(c/a, 0) = 0$, also globales Maximum im kritischen Punkt.

Aufgabe 18. Lagrange-Ansatz: $1 - 2x + \mu = 0 = 1 - 2y + 2\mu$. Gleichsetzen über μ ergibt $1 - 2y + 2(2x - 1) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}y$. Jetzt zwei Fälle: Wenn NB inaktiv, d.h. $\mu = 0$, so ergibt sich aus den K-T-Bedingungen $x = y = \frac{1}{2}$, was aber kein zulässiger Punkt ist. Wenn NB aktiv, so hat man zusätzliche Gleichung $x + 2y = 1 \Leftrightarrow x = 1 - 2y$. Das jetzt mit der obigen Gleichung gleichsetzen, ergibt $1 - 2y = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}y \Leftrightarrow y = \frac{3}{10}$. Daraus $x = 1 - 2y = \frac{2}{5}$. Der Lagrange-Multiplikator dazu ist $\mu = 2x - 1 = -\frac{1}{5} < 0$, also K-T-Bedingungen erfüllt (Maximierungsproblem, siehe Bemerkung im Anschluss an Satz 6.10 ⇨ vgl. S. 248). Wir haben einen kritischen Punkt $(\frac{2}{5}, \frac{3}{10})^T$ mit Zielwert $f(2/5, 3/10) = 11/20$.

Zum Randwertvergleich auf $\mathbb{D} = [0; \infty[^2$. Zulässige Randpunkte mit $x, y \geq 0$ und $x + 2y \leq 1$ sind Punkte mit $x = 0$ oder $y = 0$. Im ersten Fall $x = 0$ gilt also $0 \leq y \leq \frac{1}{2}$. Die Zielfunktion lautet hierfür $x(1-x) + y(1-y) = y(1-y)$ und wird maximal für $y = \frac{1}{2}$ mit Zielwert $1/4$. Im zweiten Fall $y = 0$ gilt $0 \leq y \leq 1$. Die Zielfunktion lautet hierfür $x(1-x) + y(1-y) = x(1-x)$ und wird maximal für $x = \frac{1}{2}$, ebenfalls mit Zielwert $1/4$. Beide Randmaxima ergeben einen geringeren Zielwert als der kritische Punkt, also liegt in $(2/5, 3/10)^T$ ein globales Maximum vor.

Aufgabe 19.

Aufgabe 6.a): Randvergleich für $x \to 0$ bzw. $y \to 0$ gibt unendlichen Zielwert. Deshalb in beiden kritischen Punkten ein globales Minimum.

Aufgabe 6.b): Hier wird $\mathbb{D} = \mathbb{R}^2$ zunächst auf $\mathbb{D} = [-r; r]^2$ mit hinreichend großem $r > 0$ eingeschränkt, so dass die NB-Gerade $x - 2y = 5t$ genau die Randpunkte $(-r, -r/2 - 5/2t)^T$ und $(r, r/2 - 5/2t)^T$ hat. Beide liefern bei ausreichend großem $r > 0$ unbeschränkte Zielwerte $f(-r, -r/2 - 5/2t) = \frac{5}{4}r^2 + \frac{5}{2}rt + \frac{25}{4}t^2$ bzw. $f(r, r/2 - 5/2t) = \frac{5}{4}r^2 - \frac{5}{2}rt + \frac{25}{4}t^2$. Im kritischen Punkt muss daher ein globales Minimum vorliegen.

Aufgabe 6.c): Hier ist kein Randvergleich nötig, weil die NB (Kreislinie) in $\mathbb{D} = \mathbb{R}^2$ randlos beschränkt werden kann. Der kritische Punkt $(-t, 2t)^T$ ist dann globales Minimum, der kritische Punkt $(t, -2t)^T$ ist globales Maximum, wie der Vergleich der Zielwerte zeigt.

Aufgabe 7.: Randpunkte für $x = 0, y = 3/2$ (Zielwert $50 + \ln(5/2) \approx 50,91$) bzw. $x = 3, y = 0$ (Zielwert $10\sqrt{3} + 50 \approx 67,32$. Im kritischen Punkte $x = y = 1$ liegt Zielwert $10 + 20\ln(2) + 50 \approx 73,86$ vor, also ein globales Maximum.

Aufgabe 8.: kein Randwertvergleich erforderlich, weil zulässiger Bereich (Kugeloberfläche) in ausreichend großen Quader ohne Randberührung eingebettet werden kann. Also müssen nur die Funktionswerte der kritischen Punkte verglichen werden: globales Minimum in $(-1, 2, -1)^T$ und globales Maximum in $(1, -2, 1)^T$

Aufgabe 9.: Randpunkte sind hier alle Punkte $(x_1, \ldots, x_n)$ mit $x_j \in \{0, 1\}$ für ein $j \in \{1, \ldots, n\}$. In jedem Fall ist wegen der Nebenbedingung $x_1 + \cdots + x_n = 1$ eine der Variablen Null und damit auch der Zielwert. Im kritischen Punkt mit Zielwert > 0 muss daher ein globales Maximum vorliegen.

Aufgabe 10.: Im kritischen Punkt $(\frac{5}{9}, \frac{1}{18}, \frac{7}{18})^T$ lautet der Zielwert $\frac{61}{72} \approx 0,847$. Wegen der Nebenbedingung $x + y + z = 1$ liegen Randwerte vor, wenn wenigstens eine der Variablen Null ist: Das gibt drei Teilprobleme im Randwertvergleich

- 1. Teilproblem: $x = 0$. Das Gleichungssystem $x+y+z = 1, 9x+7y+8z = 8,5, x = 0$ hat keine Lösung mit $x, y, z \geq 0$
- 2. Teilproblem: $y = 0$. Das Gleichungssystem $x+y+z = 1, 9x+7y+8z = 8,5, y = 0$ hat die Lösung $(1/2, 0, 1/2)^T$ mit Zielwert $\frac{7}{8} \approx 0,875$
- 3. Teilproblem: $y = 0$. Das Gleichungssystem $x+y+z = 1, 9x+7y+8z = 8,5, z = 0$ hat die Lösung $(3/4, 1/4, 0)^T$ mit Zielwert $\frac{19}{16} \approx 1,1875$

Der Minimalwert wird hier also im kritischen Punkt angenommen. Die Bankkundin sollte die Anlagen im Verhältnis 10 : 1 : 7 wählen.

Aufgabe 20.

Aufgabe 12.:

Optimierungsproblem: $G(x, y) = -\frac{5}{4}x^2 - \frac{9}{4}y^2 - \frac{1}{2}xy + 600x + 1200y - 9200 \stackrel{!}{=} \max$ unter $x+y \leq 240$. Kritischer Punkt ergibt sich nach Lagrange-Methode für $(60, 180)^T$. Dass dort ein globales Maximum vorliegt, kann mit dem Satz von Kuhn-Tucker begründet werden ($-G$ hat positiv definite Hesse-Matrix, ist also konvex, NB ist lineare Ungleichung, wird also durch konvexe Funktion beschrieben, Lagrange-Multiplikator ist bei Formulierung des Problems via Minimierung von $-G$ positiv, Slater-Bedingung ist z.B. mit $x = y = 1$ erfüllt).

Aufgabe 13.:

$$\nabla k = \begin{pmatrix} 2x - 20 \\ 2y - 10 \end{pmatrix}, H_k = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \nabla g = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, H_g = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Prüfe den Fall „Nebenbedingung aktiv“: $\nabla L = (2x-20+2\lambda, 2y-10+3\lambda)^T = (0, 0)^T \Rightarrow x = 8, y = 2, \lambda = 2 > 0$. Die Voraussetzungen des Satzes von Kuhn-Tucker sind erfüllt (Positiv semidefinite Hesse-Matrizen, daher konvexe Funktionen, Slater-Bedingung mit $x = y = 1$), daher ist der kritische Punkt bereits Stelle eines globalen Minimums. Zur NB $2x + 3y \leq 48$ findet sich $(12, 8)^T$ als Kandidat mit aktiver NB und negativem Lagrange-Multiplikator; dort liegt also kein lokales Minimum vor. Der Punkt $(10, 5)^T$ erweist sich als kritischer Punkt mit inaktiver Nebenbedingung und nach dem Satz von Kuhn-Tucker somit als Stelle eines globalen Minimums.

Aufgabe 21. Es bezeichne $V(a)$ jeweils den Optimalwert des modifizierten Problems. Vorgehensweise generell: Man berechnet die Lagrange-Funktion des modifizierten Problems, leitet nach dem Parameter a ab und setzt in das Ergebnis die Optimallösung des Ausgangsproblems und dessen zugehörigen Parameter ein. Das Resultat hiervon ist nach dem Envelope-Theorem die marginale Änderung des Optimalwertes, d.h. $V'(1)$. Hinweis zur Notation: Mit log ist auch hier der natürliche Logarithmus gemeint.

ai) Lagrange-Funktion $L_a(x,y,\lambda) = xy^a + \lambda(x^2+y^2-1) = xe^{a\log(y)} + \lambda(x^2+y^2-1)$
$\frac{\partial}{\partial a}L_a(x,y,\lambda) = xy^a\log(y)$
$$V'(1) = \frac{\partial}{\partial a}L_a(x,y,\lambda)\Bigg|_{\substack{x=\sqrt{\frac{1}{2}}\\ y=\sqrt{\frac{1}{2}}\\ \lambda=-\frac{1}{2}\\ a=1}} = \tfrac{1}{2}\log\sqrt{\tfrac{1}{2}} = -\tfrac{1}{4}\log 2 \approx -0{,}173\,29$$

aii) Da hier der Wert der Nebenbedingung verändert wird, ist $V'(0) = -\lambda = \frac{1}{2}$.

bi) Lagrange-Funktion $L_a(x,y,\lambda) = x^{2+a} + y^{2+a} + \lambda(x+y-1) = e^{(2+a)\log x} + e^{(2+a)\log y} + \lambda(x+y-1)$
$\frac{\partial}{\partial a}L_a(x,y,\lambda) = x^{(2+a)}\log x + y^{(2+a)}\log y$
$$V'(1) = \frac{\partial}{\partial a}L_a(x,y,\lambda)\Bigg|_{\substack{x=\frac{1}{2}\\ y=\frac{1}{2}\\ \lambda=-1\\ a=1}} = 2\left(\tfrac{1}{2}\right)^3\cdot\log\tfrac{1}{2}$$

bii) Lagrange-Funktion $L_a(x,y,\lambda) = x^2 + y^2 + \lambda(ax+y-1)$
$\frac{\partial}{\partial a}L_a(x,y,\lambda) = \lambda x$
$$V'(1) = \frac{\partial}{\partial a}L_a(x,y,\lambda)\Bigg|_{\substack{x=\frac{1}{2}\\ y=\frac{1}{2}\\ \lambda=-1\\ a=1}} = -\tfrac{1}{2}$$

biii) Lagrange-Funktion $L_a(x,y,\lambda) = x^{2+a} + y^{2+a} + \lambda(ax+y-1)$
$\frac{\partial}{\partial a}L_a(x,y,\lambda) = x^{(2+a)}\log x + y^{(2+a)}\log y + \lambda x$
$$V'(1) = \frac{\partial}{\partial a}L_a(x,y,\lambda)\Bigg|_{\substack{x=\frac{1}{2}\\ y=\frac{1}{2}\\ \lambda=-1\\ a=1}} = 2\left(\tfrac{1}{2}\right)^3\log\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}$$

ci) Lagrange-Funktion $L_a(x,y,z,\lambda) = \log((xyz)^a) + \lambda(x+2y+2z-1) = a\log(xyz) + \lambda(x+2y+2z-1)$
$\frac{\partial}{\partial a}L_a(x,y,z,\lambda) = \log(xyz)$
$$V'(1) = \frac{\partial}{\partial a}L_a(x,y,z,\lambda)\Bigg|_{\substack{x=\frac{1}{3}\\ y=\frac{1}{6}\\ z=\frac{1}{6}\\ \lambda=-3\\ a=1}} = \log(\tfrac{1}{3}\tfrac{1}{6}\tfrac{1}{6}) = -\log 108$$

cii) Lagrange-Funktion $L_a(x,y,z,\lambda) = \log((xyz)^a) + \lambda(x+2y+(1+a)z-1) = a\log(xyz)+\lambda(x+2y+(1+a)z-1)$
$\frac{\partial}{\partial a}L_a(x,y,z,\lambda) = \log(xyz)+\lambda z$
$V'(1) = \frac{\partial}{\partial a}L_a(x,y,z,\lambda)\Big|_{\substack{x=\frac{1}{3}\\ y=\frac{1}{6}\\ z=\frac{1}{6}\\ \lambda=-3\\ a=1}} = -\log(108)-\frac{1}{2}$

Aufgabe 22.

a) Das Optimierungsproblem lautet $f(x,y,z) = \sqrt[4]{8,1}x^{1/4}y^{1/2}z^{1/4} \overset{!}{=} \max$ für $x,y,z \geq 0$ unter $h(x,y,z) = 2x+4y^2+8z-1200 \leq 0$. Dieses Problem erfüllt die Voraussetzungen des Satzes von Kuhn-Tucker, d.h.

– Die Zielfunktion als CD-Funktion mit positiven Exponenten und Homogenitätsgrad 1 ist konkav ($-f$ ist konvex), vgl. hierzu auch Satz 5.21 im Buch ⇨ vgl. S. 214.

– Die Nebenbedingungsfunktion h ist ebenfalls konvex, denn ihre Hesse-Matrix ist positiv semidefinit (Eigenwerte 0 und 8)

– Die Slater-Bedingung ist z.B. mit $x=y=1$ erfüllt.

Nach dem Satz von Kuhn-Tucker gilt dann: $(x,y,z)^T$ ist genau dann ein globales Maximum von f (Minimum von $-f$) unter der NB, wenn es $\mu < 0$ ($\mu > 0$ bei Minimierung von $-f$) gibt, so dass $\nabla f(x,y,z)+\mu\nabla h(x,y,z) = \bar{0}$ und $\mu h(x,y,z) = 0$. Diese Kuhn-Tucker-Bedingungen lauten hier (beachten Sie bei der Berechnung der partiellen Ableitungen von f die Eigenschaften, die für CD-Funktionen z.B. auf Seite 193 formuliert wurden)

$$\begin{aligned}\frac{f(x,y,z)}{4x}+2\mu &= 0\\ \frac{f(x,y,z)}{2y}+8\mu y &= 0\\ \frac{f(x,y,z)}{4z}+8\mu &= 0\\ \mu(2x+4y^2+8z-1200) &\leq 0\end{aligned}$$

Dann ist zunächst nur $\mu \neq 0$ möglich, d.h. die NB ist aktiv. Außerdem kann ein Maximum sicher nur für $x,y,z > 0$ realisiert werden. Multipliziert man dann die erste Gleichung mit $4y$ und die dritte mit y, so ergibt sich

$$\begin{aligned}f(x,y,z)\frac{4y}{4x}+8\mu y &= 0\\ f(x,y,z)\frac{1}{2y}+8\mu y &= 0\\ f(x,y,z)\frac{y}{4z}+8\mu y &= 0\\ 2x+4y^2+8z &= 1200\end{aligned}$$

und durch Gleichsetzen der ersten mit der zweiten und der zweiten mit der dritten Gleichung wird μ eliminiert

$$\begin{aligned} \frac{4y}{4x} &= \frac{1}{2y} \Leftrightarrow x = 2y^2 \\ \frac{y}{4z} &= \frac{1}{2y} \Leftrightarrow z = \frac{1}{2}y^2 \\ 2x + 4y^2 + 8z = 1200 \end{aligned}$$

Jetzt kann man x und y in der NB substituieren und bekommt

$$2(2y^2) + 4y^2 + 8(\frac{1}{2}y^2) = 1200 \Leftrightarrow 12y^2 = 1200 \Leftrightarrow y = 10$$

Daraus dann $x = 200$ und $z = 50$, sowie $f(x,y,z) = \sqrt[4]{\frac{81}{100} \cdot 200 \cdot 10^2 \cdot 50} = \sqrt[4]{81000} = 30$.

Der Lagrange-Multiplikator ist dann gegeben durch

$$\frac{30}{800} + 2\mu \Leftrightarrow \mu = -\frac{3}{160}$$

Sein negatives Vorzeichen ist die letzte zu prüfende Eigenschaft im Satz von Kuhn-Tucker. Mit 200 Einheiten Rentierwolle, 10 Einheiten Pythagorasbaum-Holz und 50 Heinzelmännchen-Montagestunden wird die Ausbringung maximiert und beträgt 30 Mengeneinheiten.

b) Der mit (-1) multiplizierte Lagrange-Multiplikator ist (auch in diesem Optimierungsproblem mit Ungleichungsrestriktion) der Schattenpreis der Kosten. Die maximale Ausbringung erhöht sich daher, wenn die Gesamtkosten um bis zu 50 HEuro steigen dürfen, um näherungsweise

$$50 \cdot \frac{3}{150} = \frac{15}{16} \approx 0,9375$$

Mengeneinheiten.

c) Hier muss mit dem Envelope-Theorem argumentiert werden (wobei man davon ausgehen darf, dass die NB in Gleichungsform vorliegt).

Die Lagrange-Funktion lautet hier

$$L(x,y,z,\mu) = f(x,y,z) + \mu(2x + 4y^2 + (8+a)z - 1200)$$

wobei momentan $a = 0$ und die Änderung zu $a = 0,5$ geprüft werden soll. Man leitet die Lagrange-Funktion nach a ab (wobei dieser Parameter nicht in f auftritt, so dass man nur den zweiten Summanden betrachten muss) und erhält

$$\frac{\partial}{\partial a} L(x,y,z,\mu) = \mu z$$

Im aktuellen Maximum (für $a = 0$) wird dieser Wert zu $-\frac{15}{16}$. Mit der Änderung $a = \frac{1}{2}$ ist die näherungsweise Änderung des Maximalwertes dann $a\mu z = -\frac{15}{32} \approx -0,46875$ Mengeneinheiten (d.h. eine Verringerung).

d) Hier liegt eine Modifikation der Kostenfunktion zu

$$h(x, y, z) = 2x^{1+b} + 4y^2 + 8z - 1200$$

und $b = 0,1$ vor. Wieder mit dem Envelope-Theorem erhält man

$$\begin{aligned} L(x, y, z, \mu) &= f(x, y, z) + \mu(2x^{1+b} + 4y^2 + 8z - 1200) \\ \frac{\partial}{\partial b} L(x, y, z, \mu) &= \mu 2x^{1+b} \ln(x) \end{aligned}$$

(Beachten Sie, dass nach b abgeleitet wird, d.h. man sollte $x^{1+b} = e^{(1+b)\ln(x)}$ schreiben und die Kettenregel benutzen.) Setzt man nun die aktuellen Werte ein, also $b = 0$ und die Maximalstelle, so ergibt sich die Änderungsrate $2 \cdot (-\frac{3}{160}) \cdot 200 \cdot \ln(200) = \frac{30}{4} \cdot \ln(200) \approx 39,7$. Mit $b = 0,1$ ergibt sich dann die näherungsweise Verringerung um $3,97$ Einheiten.

e) Treten alle drei Änderungen der vorangegangenen Teilaufgaben gleichzeitig ein, so kann aufgrund der totalen Differenzierbarkeit der Optimalwertfunktion die Änderung der Ausbringung näherungsweise als Summe der Einzeländerungen geschrieben werden, sie beträgt also

$$0,9375 - 0,46875 - 3,97 \approx -3,5$$

Mengeneinheiten.

Aufgabe 23.

a) $\nabla f(x, y) = (64x + 72y - 1712, 72x + 130y - 2220)^T$

$H_f(x, y) = \begin{bmatrix} 64 & 72 \\ 72 & 130 \end{bmatrix}$ hat die Hauptunterdeterminanten $64 > 0$ und $64 * 130 - 72^2 = 3136 > 0$. Also ist $H_f(x, y)$ für alle x, y positiv definit. f ist also konvex.

b) Da f konvex ist, ist jeder kritische Punkt von f ein globales Minimum. Kritische Punkte ergeben sich durch $\nabla f(x, y) = \bar{0}$, d.h. aus dem LGS

$$\begin{aligned} 64x + 72y - 1712 = 0 \Leftrightarrow 8x + 9y - 214 = 0 \Leftrightarrow 72x + 81y - 1926 = 0 \\ 72x + 130y - 2220 = 0 \end{aligned}$$

Subtraktion der ersten von der zweiten Gleichung liefert $49y = 294 \Leftrightarrow y = 6$. Eingesetzt in die Gleichung $8x + 9y - 214 = 0$ ergibt sich

$$8x + 54 - 214 = 0 \Leftrightarrow 8x = 160 \Leftrightarrow x = 20$$

c) Ansatz ist das Lagrange-Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcl} \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial h}{\partial x} & = & 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial h}{\partial y} & = & 0 \\ h(x, y) & = & 0 \end{array} \quad \text{d.h.} \quad \begin{array}{rcl} 64x + 72y - 1712 + 2\lambda & = & 0 \\ 72x + 130y - 2220 + 2\lambda & = & 0 \\ 2(x + y) & = & 102 \end{array}$$

Gleichsetzen über 2λ ergibt das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 64x + 72y - 1712 &= 72x + 130y - 2220 \\ x + y &= 51 \end{aligned}$$

bzw. $8x + 58y = 508$, $x + y = 51$ bzw. nach Subtraktion des achtfachen der zweiten von der ersten Gleichung $50y = 100 \Leftrightarrow y = 2$ sowie $x + y = 51 \Leftrightarrow x = 49$. Der Lagrange-Multiplikator hierzu lautet

$$2\lambda = -(64x + 72y - 1712) \Leftrightarrow \lambda = -\frac{1}{2}(64 * 49 + 2 * 72 - 1712) = -784$$

d) Nach c) ist $x = 49, y = 2, \lambda = -784$ kritischer Punkt zum Problem

$$f(x,y) := (4x + y - 86)^2 + (4x + 8y - 128)^2 + 1 \stackrel{!}{=} \min_{x,y \geq 0}$$
$$h(x,y) := 2(x + y) = 102$$

Diese Rechnung lässt sich mit kleinen Modifikationen auf Optimierungsprobleme übertragen, bei denen die Nebenbedingung mit -1 multipliziert wird bzw. als Ungleichung vorliegt (Dabei ändert der Multiplikator ggf. sein Vorzeichen). Dann ergibt sich: $x = 49, y = 2, \lambda = 784 > 0$ ist kritischer Punkt zum Problem

$$f(x,y) := (4x + y - 86)^2 + (4x + 8y - 128)^2 + 1 \stackrel{!}{=} \min_{x,y \geq 0}$$
$$\tilde{h}(x,y) := 102 - 2(x + y) \leq 0$$

In diesem letzten Problem erfüllt der kritische Punkt aber alle Voraussetzungen des Satzes von Kuhn-Tucker:

[1] f ist konvex (s.o.). $\tilde{h}$ ist linear, also konvex.

[2] Die Slater-Bedingung ist erfüllt, z.B. $\tilde{h}(52, 52) = -2 < 0$

[3] Der Punkt $x = 49, y = 2, \lambda = 784 > 0$ erfüllt gemäß Rechnung in a) die Kuhn-Tucker-Bedingungen.

Er liefert also ein globales Minimum für das zuletzt genannte Optimierungsproblem. Weil er zusätzlich für das ursprüngliche Problem zulässig ist, muss er auch ein globales Minimum des Ausgangsproblems sein.

e) Die marginale minimale Schadstoffausbringung stimmt mit dem negativen Lagrange-Multiplikator aus a) überein. Also erhöht sich die Schadstoffausbringung näherungsweise um 784 Einheiten, wenn die Ausbringung des Hauptproduktes um 1 Einheit erhöht wird (Hauptprodukt-Schattenpreis).