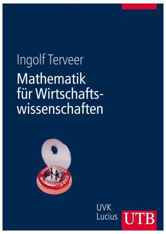
Lösungen zu den Übungsklausuren

Nachfolgend finden Sie zu den Übungsklausuren im Buch



Ingolf Terveer
Mathematik für Wirtschaftswissenschaften

3., überarbeitete Auflage, 308 Seiten
ISBN 978-3-8252-8506-7

die ausführlichen Lösungen.

Klausur 1

1.a) Gleichungsmatrix:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 8 \\ 2 & -1 & 8 & 0 & 1 & 6 \\ 5 & -2 & 19 & 1 & 3 & 24 \end{array}\right] \xrightarrow[III-5I]{II-2I} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & -1 & -10 \\ 0 & -2 & 4 & 1 & -2 & -16 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-II} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 10 \\ 0 & -2 & 4 & 1 & -2 & -16 \end{array}\right] \xrightarrow{III+2II} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \end{array}\right]$$

spezielle Lösung: $(8, 10, 0, 4, 0)^T$, allgemeine Lösung:
$\mathbb{L} = \left\{(x_1, \dots, x_5)^T \in \mathbb{R}^5 : x_1 = 8 - 3x_3 - x_5, x_2 = 10 + 2x_3 - x_5, x_4 = 4\right\}$

1.b) Substitution der allgemeinen Lösung in die Zielfunktion

$$\begin{aligned} x_2 + 2x_2 + x_3 + x_4 + 3x_5 &= (8 - 3x_3 - x_5) + 2\,(10 + 2x_3 - x_5) + x_3 + 4 + 3x_5 \\ &= 2x_3 + 32 \end{aligned}$$

dieser Wert ist mindestens 32 (wegen $x_3 \geq 0$), der Wert 32 wird durch $x_3 = 0$ realisiert. Der Wert ist zudem unabhängig von x_5. Also ist die spezielle Lösung schon optimal.

2.a) $\det \begin{bmatrix} a & 1 & 2 \\ 1 & a & 0 \\ 2 & 0 & a \end{bmatrix} = a^3 - 4a - a = a^3 - 5a = a(a^2 - 5)$

H ist invertierbar, genau dann, wenn $\det(H) \neq 0$, d.h. genau dann, wenn $a \notin \{0, \sqrt{5}, -\sqrt{5}\}$

Die erste Spalte von H^{-1} ist Lösung des LGS $\begin{bmatrix} a & 1 & 2 \\ 1 & a & 0 \\ 2 & 0 & a \end{bmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Die Cramer-Regel besagt: $b_1 = \dfrac{\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} a & 1 & 2 \\ 1 & a & 0 \\ 2 & 0 & a \end{bmatrix}} = \frac{a^2}{a(a^2-5)} = \frac{a}{a^2-5}$

2.b) $\det(H - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 & 2 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 1-\lambda \end{bmatrix}$

$= (1-\lambda)^3 - 4(1-\lambda) - (1-\lambda) = (1-\lambda)((1-\lambda)^2 - 5) = (1-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda - 4)$

Nullstellen: $\lambda = 1$ und

$\lambda^2 - 2\lambda - 4 = 0 \Leftrightarrow \lambda \in \{1+\sqrt{5}, 1-\sqrt{5}\}$

Also hat H die Eigenwerte $\lambda_1 = 1 > 0$, $\lambda_2 = 1 + \sqrt{5} > 0$ und $\lambda_3 = 1 - \sqrt{5} < 0$. Da kein einheitliches Vorzeichenverhalten für die Eigenwerte vorliegt, ist H indefinit.

3.a) $f(x) \; = \frac{1}{2x} + \sum_{k=0}^{\infty} (\frac{x}{2})^k = \frac{1}{2x} + \frac{1}{1-\frac{x}{2}} = \frac{1}{2x} + \frac{2}{2-x} = \frac{2+3x}{2x(2-x)} = \frac{2+3x}{4x-2x^2}$

Dabei ausgenutzt: Geometrische Reihe konvergiert für $|x| < 1$. Die vorgegebene Reihe konvergiert daher für $|\frac{x}{2}| < 1$, d.h. insbesondere für $x \in]0;2[$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \tfrac{3(4x-2x^2)-(2+3x)(4-4x)}{(4x-2x^2)^2} \\ &= \tfrac{12x-6x^2-8-12x+8x+12x^2}{(4x-2x^2)^2} \\ &= \tfrac{6x^2+8x-8}{(4x-2x^2)^2} = \tfrac{3x^2+4x-4}{2x^2(2-x)^2} = \tfrac{3x^2+4x-4}{2x^4-8x^3+8x^2} \end{aligned}$$

(die drei letzten Ausdrücke können als Endergebnis gelten)

Alternativ über die Darstellung $f(x) = \frac{1}{2x} + \frac{2}{2-x}$:

$$f'(x) \; = -\tfrac{1}{2x^2} + \tfrac{2}{(x-2)^2} = \tfrac{4x^2-(x-2)^2}{2x^2(x-2)^2} = \tfrac{3x^2+4x-4}{2x^4-8x^3+8x^2}$$

3.b)
$$\begin{aligned} f''(x) &= \tfrac{(12x+8)\left(4x-2x^2\right)^2-\left(6x^2+8x-8\right)2\left(4x-2x^2\right)(4-4x)}{(4x-2x^2)^4} \\ &= \tfrac{(12x+8)\left(4x-2x^2\right)-\left(6x^2+8x-8\right)2(4-4x)}{(4x-2x^2)^3} \\ &= \tfrac{\left(-24x^3+32x^2+32x\right)-\left(-48x^3-16x^2+128x-64\right)}{(4x-2x^2)^3} \\ &= \tfrac{24x^3+48x^2-96x+64}{(4x-2x^2)^3} = \tfrac{3x^3+6x^2-12x+8}{(2x-x^2)^3} = \tfrac{4}{(2-x)^3} + \tfrac{1}{x^3} = \tfrac{4x^3+(2-x)^3}{x^3(2-x)^3} \end{aligned}$$

(Die letzten vier Varianten können als Endergebnis gelten.) Die Rechnung ist wesentlich einfacher, wenn man die Darstellung $f'(x) = -\frac{1}{2x^2} + \frac{2}{(x-2)^2}$ der ersten Ableitung verwendet und beide Summanden einzeln ableitet. Dann ergibt sich sofort die vorletzte Darstellung oben.

Unter der Annahme, dass f'' keine Nullstellen auf D_f hat, kann das VZ-Verhalten durch Einsetzen eines Punktes ermittelt werden, etwa $x = 1$. Dann ergibt sich

$f''(1) = \frac{3+6-12+8}{(2-1)^3} = 5 > 0$

Damit ist $f''(x) > 0$ für alle $x \in]0;2[$. f ist daher auf D_f konvex.

Die Argumentation auf Basis von $f''(x) = \frac{4}{(2-x)^3} + \frac{1}{x^3} = \frac{4x^3+(2-x)^3}{x^3(2-x)^3}$ ist ebenfalls einfacher, denn dieser Wert ist sicher für $x \in D_f$ größer als Null. Daher ist f auf D_f konvex.

3.c) Wegen der Konvexität von f ist diejenige Lagermenge minimal, für die $f'(x) = 0$ gilt.

Durch Einsetzen der berechneten Ableitung ergibt sich auf D_f:

$$\frac{6x^2+8x-8}{(4x-2x^2)^2}=0 \Leftrightarrow 6x^2+8x-8=0 \Leftrightarrow x^2+\frac{4}{3}x-\frac{4}{3}=0$$

$$\Leftrightarrow x=-\frac{2}{3}\pm\sqrt{\frac{4}{9}+\frac{4}{3}}=-\frac{2}{3}\pm\sqrt{\frac{16}{9}}=-\frac{2}{3}\pm\frac{4}{3}\in\{-2,\frac{2}{3}\}$$

In D_f liegt nur $x=\frac{2}{3}$ und liefert den Minimalwert von f

4.a)

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\frac{100xy^2}{x^3+2} &= \frac{100y^2(x^3+2)-100xy^2(3x^2)}{(x^3+2)^2}\\ &= \frac{100x^3y^2+200y^2-300x^3y^2}{(x^3+2)^2}\\ &= \frac{200y^2-200x^3y^2}{(x^3+2)^2}\\ &= \frac{100}{(x^3+2)^2}(2y^2-2x^3y)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y}\frac{100xy^2}{x^3+2} &= \frac{200xy}{x^3+2}\\ &= \frac{100}{(x^3+2)^2}2xy^2(x^3+2)\end{aligned}$$

4.b) partielle Elastizität nach x

$$\frac{x\frac{200y^2-200x^3y^2}{(x^3+2)^2}}{\frac{100xy^2}{x^3+2}}=\frac{x\left(200y^2-200x^3y^2\right)}{100xy^2(x^3+2)}=\frac{\left(2y^2-2x^3y^2\right)}{y^2(x^3+2)}=\frac{2-2x^3}{x^3+2}$$

partielle Elastizität nach y

$$\frac{y\frac{200xy}{x^3+2}}{\frac{100xy^2}{x^3+2}}=2\quad .$$

Im Falle $x=y=2$ ergibt sich $\frac{2-16}{8+2}+2=-\frac{14}{10}+2=\frac{3}{5}$.

Interpretation: Ändern sich beide Preise um 1%, so ändert sich die Nachfrage um näherungsweise 0,6%.

4.c) Homogenität bedeutet: Es gibt r mit $f(\lambda x,\lambda y)=\lambda^r f(x,y)$ für alle $\lambda>0$ und für alle $x,y>0$

Insbesondere gilt für die vorliegende Funktion aber

$$\begin{aligned}f(2\lambda,2\lambda) &= \frac{800\lambda^3}{8\lambda^3+2}\\ \lambda^r f(2,2) &= 80\lambda^r\end{aligned}$$

Aus der Homogenität von f würde folgen, dass für alle $\lambda>0$ gilt:

$$\frac{800\lambda^3}{8\lambda^3+2}=80\lambda^r \Leftrightarrow \frac{\lambda^3}{8\lambda^3+2}=\lambda^r$$

Dann passt aber $\lim_{\lambda\to\infty}\frac{\lambda^3}{8\lambda^3+2}=\frac{1}{8}$ zu keiner der drei Grenzwertaussagen

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda^r=\begin{cases}\infty & \text{falls } r>0\\ 1 & \text{falls } r=0\\ 0 & \text{falls } r<0\end{cases}$$

Also kann die Funktion nicht homogen sein. Der Widersprich ergibt sich aber auch, weil die Gleichung $\frac{\lambda^3}{8\lambda^3+2}=\lambda^r$ (oder eine ähnliche hergeleitete) nur endlich viele Lösungen haben, keinesfalls aber für alle $\lambda>0$ gültig sein kann.

4.d) Gesucht ist die Substitutionsgrenzrate von x gegeben y. Nach Formel hat diese den Wert

$$x'(y)=-\frac{D_2f(x,y)}{D_1f(x,y)}\Bigg|_{\substack{x=x(2)=2\\ y=2}}$$

mit den partiellen Ableitungen aus 4.a) gilt

$$D_1 f(2,2) = \left.\frac{200y^2 - 200x^3y^2}{(x^3+2)^2}\right|_{x=2,y=2} = \frac{800-6400}{100} = -56$$
$$D_2 f(2,2) = \left.\frac{200xy}{x^3+2}\right|_{x=2,y=2} = \frac{800}{10} = 80$$

und damit $x'(y) = \frac{80}{56} = \frac{10}{7}$. Der Preis muss sich also näherungsweise um $\frac{10}{7}\Delta y$ ändern, um die Nachfrage zu halten

5.a) Lagrange-Ansatz:

$$\begin{aligned} \nabla f(x,y,z) + \lambda\nabla(x+5y-100) + \mu\nabla(8y+z-100) &= \bar{0} \\ x+5y &= 100 \\ 8y+z &= 100 \end{aligned}$$

führt zum Gleichungssystem

$$\begin{aligned} yz + \lambda &= 0 \\ xz + 5\lambda + 8\mu &= 0 \\ xy + \mu &= 0 \\ x + 5y &= 100 \\ 8y + z &= 100 \end{aligned}$$

Substitution der ersten und dritten Gleichung für λ und μ in die zweite Gleichung ergibt dort

$$\begin{aligned} xz - 5yz - 8xy &= 0 \\ x + 5y &= 100 \\ 8y + z &= 100 \end{aligned}$$

Substitution der zweiten Gleichung für x und der dritten Gleichung für z in die erste Gleichung liefert

$$\begin{aligned} (100-5y)(100-8y) - 5y(100-8y) - 8(100-5y)y &= 0 \\ \Leftrightarrow 10000 - 1300y + 40y^2 - 500y + 40y^2 - 800y + 40y^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow 120y^2 - 2600y + 10000 &= 0 \\ \Leftrightarrow 3y^2 - 65y + 250 &= 0 \\ \Leftrightarrow y^2 - \frac{65}{3}y + \frac{250}{3} &= 0 \end{aligned}$$

Dazu gehören die Lösungen $y = \frac{65}{6} \pm \sqrt{\left(\frac{65}{6}\right)^2 - \frac{250}{3}} = \frac{65}{6} \pm \sqrt{\frac{4225-3000}{36}} = \frac{65}{6} \pm \sqrt{\frac{1225}{36}} = \frac{65}{6} \pm \frac{35}{6}$, d.h. die Lösungen $y = \frac{30}{6} = 5$ und $y = \frac{100}{6}$. Letztere ist wegen $z = 100 - 8 \cdot \frac{100}{6} < 0$ nicht zulässig. Es bleibt

$$\begin{aligned} y &= 5 \\ x &= 100 - 25 = 75 \\ z &= 100 - 40 = 60 \end{aligned}$$

Die Lagrange-Multiplikatoren lauten

$$\begin{aligned} \lambda &= -yz = -300 \\ \mu &= -xy = -375 \end{aligned}$$

Der Funktionswert für diesen kritischen Punkt ist

$f(75, 5, 60) = 75 \cdot 5 \cdot 60 = 22\,500$

Zum Wertevergleich: Zulässige Randpunkte ergeben sich dort, wo entweder $x = 0$, $y = 0$ oder $z = 0$ und gleichzeitig die Nebenbedingungen erfüllt sind. Das ergibt aber stets den Zielwert $f(x, y, z) = xyz = 0$. Also liegt im kritischen Punkt ein globales Maximum vor

5.b) Substitution der Nebenbedingungen sollte nach Auflösung

$$\begin{aligned} x &= 100 - 5y \\ z &= 100 - 8y \end{aligned}$$

erfolgen. Das ergibt

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= f(100 - 5y, y, 100 - 8y) \\ &= (100 - 5y)y(100 - 8y) \\ &= 40y^3 - 1300y^2 + 10000y \end{aligned}$$

Maximiere also $g(y) = 40y^3 - 1300y^2 + 10000y$. Dabei ist $y \in D_g = [0; 12,5]$ zu wählen, damit die übrigen Variablen ≥ 0 bleiben.

Notwendig für lokales Maximum ist $g'(y) = 120y^2 - 2600y + 10000 = 0$, d.h. (wie in 5.a))

$$\begin{aligned} 120y^2 - 2600y + 10000 &= 0 \\ \Leftrightarrow 3y^2 - 65y + 250 &= 0 \\ \Leftrightarrow y^2 - \frac{65}{3}y + \frac{250}{3} &= 0 \\ \Leftrightarrow y &= \frac{65}{6} \pm \frac{35}{6} \end{aligned}$$

von den beiden Lösungen liegt wie in 5.a gesagt nur $y = \frac{30}{6} = 5$ in D_g

Hinreichend für ein lokales Maximum ist $g''(y) < 0$, d.h. $240y - 2600 < 0$; mit $y = 5$ ergibt sich $g''(5) = 5 \cdot 240 - 2600 = -1400 < 0$. Es liegt also ein lokales Maximum vor.

Randwertvergleich: $g(5) = 22500$, $g(0) = 0$, $g(12,5) = (100 - 5 \cdot 12,5) \cdot 12,5 \cdot (100 - 8 \cdot 12,5) = 0$. Es ist also in $y = 5$ tatsächlich ein globales Maximum.

Dazu gehören die Werte $x = 100 - 5 \cdot 5 = 75$ und $z = 100 - 8 \cdot 5 = 60$.

Vorteil der Lagrange-Methode ist, dass mit den Lagrange-Multiplikatoren Größen zur Verfügung stehen, mit denen die marginale Änderung des Optimalwertes bei Änderung der Soll-Mengen der Nebenprodukte angegeben werden kann (Schattenpreiseigenschaft von λ und μ). Insbesondere gilt:

Ändert sich die Sollmenge des ersten Nebenproduktes um δ_1 Einheiten, so ändert sich der Optimalwert um näherungsweise $-\lambda\delta_1 = 300\delta_1$.

Ändert sich die Sollmenge des zweiten Nebenproduktes um δ_2 Einheiten, so ändert sich der Optimalwert um näherungsweise $-\mu\delta_2 = 375\delta_2$

Bei einer gleichzeitigen Änderung beider Sollmengen um δ_1 bzw. δ_2 Einheiten ändert sich der Optimalwert um näherungsweise $300\delta_1 + 375\delta_2$ Einheiten.

5.c) In 5.a) wurde die Optimallösung für das Problem mit $a = 0$ geliefert.

Die marginale Optimalwertänderung bei Änderung dieses Wertes ergibt sich durch Ableiten der Lagrange-Funktion des in a allgemeinen Problems nach a und anschließendem Einsetzen der Optimalwerte für den Fall $a = 0$.

Lagrange-Funktion

$$L(x, y, z, \lambda, \mu; a) = x(y + 2a)z + \lambda(x + 5(y + 3a) - 100) + \mu(8(y + a) + z - 100)$$

Ableitung nach a

$$2xz + 15\lambda + 8\mu$$

Einsetzen von $x = 75$, $y = 5$, $z = 60$, $\lambda = -300$, $\mu = -375$ (und $a = 0$).

$$2 \cdot 75 \cdot 60 - 4500 - 3000 = 1500$$

Je marginaler Änderung δ_a, ausgehend von $a = 0$ erhöht sich der Output näherungsweise um 1500 Einheiten.

Der technische Parameter a sollte also größer als Null sein, um die maximal mögliche Produktion des Hauptproduktes marginal zu erhöhen.

Klausur 2

1.a) Es gibt die j-te Spalten von A jeweils an, wie viel Kilogramm der drei Rohstoffe zur Herstellung eines Kilogramms des der Lacksorte L_j benötigt wird. Entsprechend beschreiben die zwei Spalten von B die Zusammensetzung je eines Kilogramms der Endprodukte E_1, E_2 aus den Lacksorten L_1, L_2 und L_3. Das bedeutet

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5} \\ 0 & \frac{3}{5} \end{bmatrix}.$$

1.b) Bei der zweistufigen Produktion sind die Verflechtungsmatrizen der beiden Stufen miteinander so zu multiplizieren, dass die Endprodukt-Verflechtungsmatrix rechts und die Zwischenproduktverflechtungsmatrix links steht. Es ist also $C = AB = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{2} & \frac{7}{15} \end{bmatrix}$

1.c) Es bezeichne x die zusätzlich zu kaufende Menge des Grundstoffes R_3. Das Ausgangs-LGS $\left[\begin{array}{cc|c} \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & 3000 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & 2000 \\ \frac{1}{2} & \frac{7}{15} & x + 4000 \end{array}\right]$ beschreibt die Möglichkeiten, die Endprodukte zu den gegebenen Grundstoffquantitäten von R_1 und R_2 sowie der um x aufgestockten Quantität von R_3 zu produzieren. Mit dem Gauß-Verfahren kann man das Problem auf Lösbarkeit untersuchen:

$$\left[\begin{array}{cc|c} \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & 3000 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & 2000 \\ \frac{1}{2} & \frac{7}{15} & x + 4000 \end{array}\right] \xrightarrow{I \to (4)\, I} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{4}{3} & 12000 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & 2000 \\ \frac{1}{2} & \frac{7}{15} & x + 4000 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[III + \left(-\frac{1}{2}\right) I]{II + \left(-\frac{1}{4}\right) I} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{4}{3} & 12000 \\ 0 & -\frac{2}{15} & -1000 \\ 0 & -\frac{1}{5} & x - 2000 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{II \to \left(-\frac{15}{2}\right) II} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{4}{3} & 12000 \\ 0 & 1 & 7500 \\ 0 & -\frac{1}{5} & x - 2000 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{III + \left(\frac{1}{5}\right) II} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{4}{3} & 12000 \\ 0 & 1 & 7500 \\ 0 & 0 & x - 500 \end{array}\right] \xrightarrow{I + \left(-\frac{4}{3}\right) II} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2000 \\ 0 & 1 & 7500 \\ 0 & 0 & x - 500 \end{array}\right]$$

Lösbar ist das LGS für $x = 500$, d.h. 500 Kilogramm R_3 sollten hinzugekauft werden.

Als Lösung liest man aus der obigen ZSF dann ab: Es werden 2000 Kilogramm E_1 und 7500 Kilogramm E_2 hergestellt.

2. Auflösung nach x_2 bzw. x_3 ergibt

$$\begin{aligned} x_3 &= 40 - 2x_1 \\ x_2 &= 30 - 3x_1 \end{aligned}$$

Substituiert man dies in die Zielfunktion, so ergibt sich

$$\begin{aligned} 4x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 4x_1 + 3(30 - 3x_1) + 4(40 - 2x_1) \\ &= 250 - 13x_1 \end{aligned}$$

Damit wird der Zielwert am kleinsten, wenn x_1 maximal wird. Weil aber sowohl x_2 als auch x_3 nichtnegativ sein müssen, ist $\min(\frac{40}{2}, \frac{30}{3}) = 10$ der größtmögliche zu realisierende Wert. D.h. $x_1 = 10$, $x_2 = 0$, $x_3 = 20$ ist die Optimallösung.

3.a) Nach Sarrus ist $\det(A(t)) = 4 - 4t^2$. $A(t)$ ist invertierbar genau dann, wenn $\det(A(t)) \neq 0$, d.h. wenn $4 - 4t^2 \neq 0$, d.h. wenn $t \notin \{-1, 1\}$

3.b) Das charakteristische Polynom von $A(1) = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$ ist

$$\begin{aligned} \det \begin{bmatrix} -1-\lambda & 2 & 2 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & -1 & -2-\lambda \end{bmatrix} &= (-1-\lambda)(2-\lambda)(-2-\lambda) - 2(2-\lambda) \\ &= 6\lambda - \lambda^2 - \lambda^3 \end{aligned}$$

Eigenwerte sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms:

$$\begin{aligned} 6\lambda - \lambda^2 - \lambda^3 = 0 &\Leftrightarrow \lambda(6 - \lambda - \lambda^2) = 0 \\ &\Leftrightarrow -\lambda(\lambda^2 + \lambda - 6) = 0 \\ &\Leftrightarrow -\lambda(\lambda - 2)(\lambda + 3) = 0 \end{aligned}$$

Nullstellen sind $\lambda = 0$, $\lambda = 2$, $\lambda = -3$. Der kleinste Eigenwert ist $\lambda = -3$. Dazu gehört als Eigenvektor ein vom Nullvektor verschiedener Vektor aus $\text{Kern}(A + 3I_3)$. Dazu

$$\begin{bmatrix} -1+3 & 2 & 2 \\ 0 & 2+3 & 0 \\ 1 & -1 & -2+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Umformung in ZSF :

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{I \leftrightarrow III} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{III + (-2)\,I} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{II \to \left(\frac{1}{5}\right) II} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{III + (-4)\,II} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{I + (1)\,II} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Lösungsvektor, d.h. Eigenvektor zum Eigenwert -3 ist z.B. $(1, 0, -1)^T$.

4.a) In der Übergangsmatrix müssen spaltenweise die Wechsel- bzw. Bleibeanteile eines Anbieters stehen, die zeilenweise an den Anbietern ausgerichtet sind, zu denen die Kunden wechseln Für Anakonda sind dies $\frac{3}{4}$ (verbleibende Kunden) und $\frac{1}{4}$(zu Boah! wechselnde Kunden). Für Boah! sind dies $\frac{1}{3}$ (zu Anakonda wechselnd) und $\frac{2}{3}$(verbleibend). Das ergibt die Form $P = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$.

4.b) Multipliziert man etwa P mit sich selber, so ergibt sich

$$P^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & \frac{3}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{5}{12} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & \frac{3}{4} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & \frac{3}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{5}{12} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & \frac{3}{4} \end{bmatrix}^{-1}$$

und die mittleren beiden Matrizen heben sich weg, daher ist

$$\begin{aligned} P^2 &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & \frac{3}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{5}{12} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{5}{12} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & \frac{3}{4} \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & \frac{3}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left(\frac{5}{12}\right)^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & \frac{3}{4} \end{bmatrix}^{-1} \end{aligned}$$

Das geht für jede beliebige Matrix-Potenz genau so und ergibt

$$\begin{aligned} P^n &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & \frac{3}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left(\frac{5}{12}\right)^n & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & \frac{3}{4} \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & \frac{3}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left(\frac{5}{12}\right)^n & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{7} & -\frac{4}{7} \\ \frac{4}{7} & \frac{4}{7} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \left(\frac{5}{12}\right)^n & 1 \\ -\left(\frac{5}{12}\right)^n & \frac{3}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{7} & -\frac{4}{7} \\ \frac{4}{7} & \frac{4}{7} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{3}{7}\left(\frac{5}{12}\right)^n + \frac{4}{7} & -\frac{4}{7}\left(\frac{5}{12}\right)^n + \frac{4}{7} \\ -\frac{3}{7}\left(\frac{5}{12}\right)^n + \frac{3}{7} & \frac{4}{7}\left(\frac{5}{12}\right)^n + \frac{3}{7} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

4.c) Die Aufteilung nach n Quartalen beträgt

$$\begin{aligned} P^n x &= \begin{bmatrix} \frac{3}{7}\left(\frac{5}{12}\right)^n + \frac{4}{7} & -\frac{4}{7}\left(\frac{5}{12}\right)^n + \frac{4}{7} \\ -\frac{3}{7}\left(\frac{5}{12}\right)^n + \frac{3}{7} & \frac{4}{7}\left(\frac{5}{12}\right)^n + \frac{3}{7} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{4}\left(\frac{3}{7}\left(\frac{5}{12}\right)^n + \frac{4}{7}\right) + \frac{3}{4}\left(-\frac{4}{7}\left(\frac{5}{12}\right)^n + \frac{4}{7}\right) \\ \frac{1}{4}\left(-\frac{3}{7}\left(\frac{5}{12}\right)^n + \frac{3}{7}\right) + \frac{3}{4}\left(\frac{4}{7}\left(\frac{5}{12}\right)^n + \frac{3}{7}\right) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \left(\frac{5}{12}\right)^n\left(\frac{1}{4}\frac{3}{7} - \frac{3}{4}\frac{4}{7}\right) + \frac{1}{4}\frac{4}{7} + \frac{3}{4}\frac{4}{7} \\ \left(\frac{5}{12}\right)^n\left(-\frac{1}{4}\frac{3}{7} + \frac{3}{4}\frac{4}{7}\right) + \frac{1}{4}\frac{3}{7} + \frac{3}{4}\frac{3}{7} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{9}{28}\left(\frac{5}{12}\right)^n + \frac{4}{7} \\ \frac{9}{28}\left(\frac{5}{12}\right)^n + \frac{3}{7} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(Hier reicht die Berechnung des ersten Ausdrucks im Marktanteilvektor, weil nur nach Anakonda gefragt ist.)

Wann der Marktanteil den geforderten Wert von 50% übersteigt, lässt sich durch Auflösung der folgenden Ungleichung bestimmen:

$$\frac{4}{7} - \frac{9}{28}\left(\frac{5}{12}\right)^n > \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{4}{7} - \frac{1}{2} > \frac{9}{28}\left(\frac{5}{12}\right)^n \Leftrightarrow \frac{1}{14} > \frac{9}{28}\left(\frac{5}{12}\right)^n$$
$$\Leftrightarrow \left(\frac{5}{12}\right)^n < \frac{2}{9} \Leftrightarrow n > \frac{\log\frac{2}{9}}{\log\frac{5}{12}} \approx 1,718$$

Nach zwei Quartalen ist also die 50%-Grenze überschritten.

4.d) Lösung unter Verwendung von 4.c): Langfristig lauten die Marktanteile

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4}{7}-\frac{9}{28}\left(\frac{5}{12}\right)^n\right)=\frac{4}{7}\approx 0{,}571$

diese werden von unten approximiert, d.h. können nicht überschritten werden. Das Ziel eines 60%-Marktanteils kann also nicht erreicht werden.

Lösung ohne Verwendung von 4.c): Langfristige Marktanteile entsprechen stabilen Marktanteilen, d.h. sind Lösung des Gleichungssystems $Px = x$, d.h. $(P-I)x = \bar{0}$.

Die Zeilenstufenform von $\begin{bmatrix}\frac{3}{4} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{4} & \frac{2}{3}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{4} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{3}\end{bmatrix}$ lautet $\begin{bmatrix}1 & -\frac{4}{3}\\ 0 & 0\end{bmatrix}$. Lösung ist $x_1=\frac{4}{3}x_2 \Leftrightarrow x_2=\frac{3}{4}x_1$. Aus $x_1+x_2=1$ (Marktanteile!) folgt $x_1+\frac{3}{4}x_1=1\Leftrightarrow x_1=\frac{4}{7}=0.571\,43$. Also kann das Ziel nicht erreicht werden.

5.a)
$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1\cdot\ln(x+1)-(x+1)\frac{1}{x+1}}{(\ln(x+1))^2}=\frac{\ln(x+1)-1}{(\ln(x+1))^2}\\ f''(x) &= \frac{\frac{1}{x+1}(\ln(x+1))^2-(\ln(x+1)-1)2(\ln(x+1))\frac{1}{x+1}}{(\ln(x+1))^4}\\ &= \frac{\ln(x+1)-2(\ln(x+1)-1)}{(x+1)(\ln(x+1))^3}=\frac{2-\ln(x+1)}{(x+1)(\ln(x+1))^3}\end{aligned}$$

5.b) Notwendig ist $f'(x)=0$. Das führt auf $\ln(x+1)-1=0\Leftrightarrow \ln(x+1)=1\Leftrightarrow x+1=e\Leftrightarrow x=e-1=: x_{\min}$

Hinreichend ist $f'(x)=0$ und $f''(x)\neq 0$. An der angegebenen Stelle gilt $2-\ln(e+1-1)=2-\ln(e)=2-1=1>0$ und $(e-1+1)(\ln(e-1+1))^3=e>0$. Also ist $f''(e-1)=\frac{1}{e}>0$. An der Stelle $x=e-1$ liegt also ein lokales Minimum vor.

Lokale Maxima können nur noch an den Rändern vorliegen. Da das Definitionsintervall links offen ist, kommt nur noch die rechte Intervallgrenze $x=10$ in Frage. Dort gilt $f(10)\approx 4{,}587\,4$ und $f'(10)\approx 0.243\,12>0$. Weil in $x=e-1$ der einzige Vorzeichenwechsel von f' vorliegt, ist f auf $[e-1,10]$ streng monoton wachsend, deshalb ist in $x=10$ ein lokales Randmaximum.

5.c) Wegen $\lim\limits_{x\to 0}\ln(x+1)=\ln(1)=0$ und $\lim\limits_{x\to 0}(x+1)=1$ ist $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x+1}{\ln(x+1)}=+\infty$. Damit ist die Stelle $x_{\min}$ Stelle eines globalen Minimums und die Stelle $x=10$ nur Stelle eines lokalen Maximums.

5.d) Das Vorzeichenverhalten von f'' legt das Krümmungsverhalten von f fest. Ersteres ist aber durch den Zähler von f'', d.h. durch $2-\ln(x+1)$ bestimmt. Es ist $2-\ln(x+1)\geq 0\Leftrightarrow \ln(x+1)\leq 2\Leftrightarrow x+1\leq e^2\Leftrightarrow x\leq e^2-1\approx 6{,}389\,1=: x_w$. Da genau an dieser Stelle ein Vorzeichenwechsel von $+$ nach $-$ vorliegt, ist f in $]0;x_w]$ (streng) konvex und in $[x_w;10]$ (streng) konkav.

6.a) $\frac{\partial}{\partial x}\frac{y^{\frac{1}{3}}z^{\frac{2}{3}}}{x}=-\frac{y^{\frac{1}{3}}z^{\frac{2}{3}}}{x^2}=-\frac{f(x,y,z)}{x}$

$\frac{\partial}{\partial y}\frac{y^{\frac{1}{3}}z^{\frac{2}{3}}}{x}=\frac{1}{3}\frac{y^{-\frac{2}{3}}z^{\frac{2}{3}}}{x}=\frac{f(x,y,z)}{3y}$

$\frac{\partial}{\partial z}\frac{y^{\frac{1}{3}}z^{\frac{2}{3}}}{x}=\frac{2}{3}\frac{y^{\frac{1}{3}}z^{-\frac{1}{3}}}{x}=\frac{2f(x,y,z)}{3z}$

6.b) Die Funktion f ist Null-homogen, d.h. es gilt

$$f(\lambda x,\lambda y,\lambda z)=\sqrt[3]{\frac{(\lambda y)^{\frac{1}{3}}(\lambda z)^{\frac{2}{3}}}{\lambda x}}=\sqrt[3]{\frac{\lambda^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}z^{\frac{2}{3}}}{\lambda x}}=\lambda^0 f(x,y,z)$$

Für homogene Funktionen ist aber der Homogenitätsgrad gleich der Summe der partiellen Elastizitäten, letztere ist somit Null.

6.c) Die Nachfrage beträgt derzeit $f(1,2,3)=\sqrt[3]{\frac{yz^2}{x^3}}\Bigg|_{x=2,y=8,z=8}=\sqrt[3]{\frac{8^3}{2^3}}=4$. Gesucht ist für f die Substitutionsgrenzrate von x gegeben y an der Stelle $x=1,y=2,z=3$. Diese beträgt $-\left.\frac{\frac{\partial}{\partial y}f(x,y,z)}{\frac{\partial}{\partial x}f(x,y,z)}\right|_{x=2,y=8,z=8} = -\frac{\frac{1}{6}}{-2} = \frac{1}{12}$, denn

$$\left.\frac{\partial}{\partial y}f(x,y,z)\right|_{x=2,y=8,z=8} = \left.\frac{1}{3}\frac{y^{-\frac{2}{3}}z^{\frac{2}{3}}}{x}\right|_{x=2,y=8,z=8} = \frac{1}{3}\frac{8^{-\frac{2}{3}}8^{\frac{2}{3}}}{2} = \frac{1}{6}$$

$$\left.\frac{\partial}{\partial x}f(x,y,z)\right|_{x=2,y=8,z=8} = -\left.\frac{y^{\frac{1}{3}}z^{\frac{2}{3}}}{x^2}\right|_{x=2,y=8,z=8} = -\frac{8^{\frac{1}{3}}8^{\frac{2}{3}}}{2^2} = -4$$

Das bedeutet, dass der Preis von P_1 auf $x = 2 + \frac{1}{12}\Delta y$ verändert werden muss, wenn der Preis von P_2 auf $y = 8 + \Delta y$ abgeändert wird und wenn dabei die Nachfrage von 4 Einheiten P_1 näherungsweise gehalten werden soll.

6.d) $\det H_f(x,y,z)_2 = \det\left(\frac{1}{f(x,y,z)}\begin{bmatrix}\frac{2}{x^2} & -\frac{1}{3xy}\\ -\frac{1}{3xy} & -\frac{2}{9y^2}\end{bmatrix}\right) = \frac{-5}{x^2y^2f(x,y,z)^2} < 0.$

Daher ist $H_f(x,y,z)$ für alle $x,y,z > 0$ indefinit. Mithin ist f weder konvex noch konkav.

7. Notwendig für ein lokales Extremum in $(x,y)^T$ ist, dass es $\lambda \in \mathbb{R}$ gibt mit

$$\nabla f(x,y) + \lambda\nabla g(x,y) = \bar{0}$$
$$g(x,y) = 0$$

Hier

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} y-2x \\ x\end{pmatrix}, \quad \nabla g(x,y) = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

und damit lauten die Kuhn-Tucker-Bedingungen

$$y - 2x + \lambda = 0$$
$$x + \lambda = 0$$
$$x + y = 1$$

Aus den ersten beiden Gleichungen ergibt sich $y - 2x = x \Leftrightarrow y = 3x$. Eingesetzt in die dritte Gleichung folgt $4x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$ und damit $y = \frac{3}{4}$.

Weil der zulässige Bereich in Form des Geradensegmentes $M = \{x,y : x \geq 0, y \geq 0, x+y=1\}$ abgeschlossen und beschränkt ist, hat das Problem ein globales Maximum und ein globales Minimum, welche entweder der oben berechnete kritische Punkt oder Randpunkt von M, d.h. einer der Punkte $(0,1)^T$ und $(1,0)^T$ sind. Der Wertevergleich ergibt

x	y	$f(x,y) = xy - x^2$
$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{16} - \frac{1}{16} = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$
1	0	-1
0	1	0

Damit liegt im bestimmten kritischen Punkt ein globales Maximum vor.

Der zugehörige Lagrange-Multiplikator lautet $\lambda = -x = -\frac{1}{4}$. Er bedeutet, dass sich der Optimalwert sich um näherungsweise $-\lambda\Delta g = \frac{1}{4}\Delta g$ Einheiten erhöht, wenn sich der Sollwert 1 der Nebenbedingung um Δg erhöht.

Klausur 3

1.a) Die Übergangsmatrix enthält die Wechsel bzw. Bleibe-Anteile der drei Fahrer für den Tages-Übergang, in der „von"-Richtung spaltenweise, in der „zu"Richtung zeilenweise sortiert. Es ist daher $A = \begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{5}\\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{5}\\ \frac{1}{6} & 1 & 0\end{bmatrix}$.

1.b) $A^2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{5} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{6} & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{5} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{6} & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\frac{1}{2} + \frac{3}{5}\frac{1}{6} & \frac{3}{5}\cdot 1 & \frac{1}{2}\frac{3}{5} \\ \frac{1}{3}\frac{1}{2} + \frac{2}{5}\frac{1}{6} & \frac{2}{5}\cdot 1 & \frac{1}{3}\frac{3}{5} \\ \frac{1}{6}\frac{1}{2} + 1\cdot\frac{1}{3} & 1\cdot 1 & \frac{1}{6}\frac{3}{5} + 1\cdot\frac{2}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{20} & \frac{3}{5} & \frac{3}{10} \\ \frac{7}{30} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{5}{12} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$

Die Matrix stellt das Kundenwechselverhalten für den 2-Tageszeitraum dar.

1.c) Die Matrix hat die Determinante $\det(A) = \frac{1}{3}\frac{3}{5} - \frac{1}{2}\frac{2}{5} = 0$, sie ist also nicht invertierbar

1.d) Diese Marktaufteilung muss die Eigenschaften $Ax = x \Leftrightarrow (A - I)x = \bar{0}$ haben, wobei x ein stochastischer Vektor ist. Das ergibt vier lineare Gleichungen in drei Unbekannten, welche gelöst werden müssen.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{3}{5} & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 & -\frac{2}{5} & 0 \\ -\frac{1}{6} & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{I \to (2)\, I} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{6}{5} & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 & -\frac{2}{5} & 0 \\ -\frac{1}{6} & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\substack{II + \left(\frac{1}{3}\right) I \\ III + \left(\frac{1}{6}\right) I \\ IV + (-1)\, I}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{6}{5} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{4}{5} & 0 \\ 0 & -1 & \frac{4}{5} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{11}{5} & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{III + (1)\, II \\ IV + (-1)\, II}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{6}{5} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{4}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{III \leftrightarrow IV} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{6}{5} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{4}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{III \to \left(\frac{1}{3}\right) III} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{6}{5} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{4}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\substack{I + \left(\frac{6}{5}\right) III \\ II + \left(\frac{4}{5}\right) III}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{5} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{4}{15} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Die im Zeitverlauf konstant bleibenden Marktanteile lauten also $x_1 = \frac{2}{5}$, $x_2 = \frac{4}{15}$, $x_3 = \frac{1}{3}$

1.e) Das charakteristische Polynom von A lautet

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \det \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - \lambda & 0 & \frac{3}{5} \\ \frac{1}{3} & -\lambda & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{6} & 1 & -\lambda \end{bmatrix} \\ &= \left(\tfrac{1}{2} - \lambda\right)(-\lambda)^2 + \tfrac{1}{3}\tfrac{3}{5} - \tfrac{1}{6}\tfrac{3}{5}(-\lambda) - \tfrac{2}{5}\left(\tfrac{1}{2} - \lambda\right) \\ &= -\lambda^3 + \tfrac{1}{2}\lambda^2 + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{10}\lambda - \tfrac{1}{5} + \tfrac{2}{5}\lambda \\ &= -\lambda^3 + \tfrac{1}{2}\lambda^2 + \tfrac{1}{2}\lambda \\ &= (-\lambda)\left(\lambda^2 - \tfrac{1}{2}\lambda - \tfrac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

Nullstellen sind $\lambda = 0$ und die Lösungen von $\lambda^2 - \frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{2} = 0$, d.h. $-\frac{1}{2}$ und 1. Die Eigenwerte lauten also $0, 1, -\frac{1}{2}$.

Ein Eigenvektor x zum Eigenwert 1 bedeutet $Ax = x$; wenn es sich dabei gleichzeitig um einen stochastischen Vektor handelt, so hat man eine stabile Verteilung gefunden (das ist hier genau eine, die in 1.d) berechnet wurde)

Ein Eigenvektor zum Eigenwert 0 ist ein Vektor $x \neq \bar{0}$ mit $Ax = 0$. Da 0 Eigenwert ist, muss es einen solchen Vektor geben. Daran kann man erkennen, dass A nicht invertierbar ist, sonst wäre $x = \bar{0}$, die einzige Lösung von $Ax = \bar{0}$.

1.f) Ein Marktanteilvektor $(x_1, x_2, x_3)^T$, der nach einem Tag zum Marktanteilvektor $(a, b, c)^T$ führt, muss zum einen ein stochastischer Vektor sein, d.h. die lineare Gleichung $x_1 + x_2 +$

$x_3 = 1$ erfüllen. Zum anderen muss er die Gleichungen des Marktwechsels erfüllen, d.h.

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Es liegen also drei lineare Gleichungen für den Marktübergang und eine lineare Gleichung für die Forderung vor, dass es sich bei $(x_1, x_2, x_3)^T$ um einen stochastischen Vektor handelt. Weiter müssen alle auftretenden $x_i \geq 0$ sein. Es ist also zunächst das LGS mit der folgenden Gleichungsmatrix auf Lösbarkeit zu untersuchen:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{5} & a \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{5} & b \\ \frac{1}{6} & 1 & 0 & c \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{I \to (2)\, I} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{6}{5} & 2a \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{5} & b \\ \frac{1}{6} & 1 & 0 & c \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\substack{II + \left(-\frac{1}{3}\right) I \\ III + \left(-\frac{1}{6}\right) I \\ IV + (-1)\, I}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{6}{5} & 2a \\ 0 & 0 & 0 & b - \frac{2a}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{5} & c - \frac{a}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{5} & 1 - 2a \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{II \leftrightarrow III} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{6}{5} & 2a \\ 0 & 1 & -\frac{1}{5} & c - \frac{a}{3} \\ 0 & 0 & 0 & b - \frac{2a}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{5} & 1 - 2a \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{IV + (-1)\, II} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{6}{5} & 2a \\ 0 & 1 & -\frac{1}{5} & c - \frac{a}{3} \\ 0 & 0 & 0 & b - \frac{2a}{3} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{5a}{3} - c + 1 \end{array}\right]$$

Damit das LGS überhaupt lösbar ist, muss gelten, dass $b = \frac{2}{3}a$ und $c = 1 - \frac{5}{3}a$. Jede Lösung hat dann die Form

$$\begin{aligned} x_1 &= 2a - \frac{6}{5}z \\ x_2 &= c - \frac{a}{3} + \frac{1}{5}z = \left(1 - \frac{5}{3}a\right) - \frac{a}{3} + \frac{1}{5}z = 1 - 2a + \frac{1}{5}z \\ x_3 &= z \end{aligned}$$

mit einer zunächst allgemeinen Zahl $z \in \mathbb{R}$. Alle drei Werte müssen größer oder gleich Null sein, daher muss gelten

$$\begin{aligned} 2a - \frac{6}{5}z &\geq 0 \Leftrightarrow z \leq \frac{5}{3}a \\ 1 - 2a + \frac{1}{5}z &\geq 0 \Leftrightarrow z \geq 10a - 5 \\ z &\geq 0 \end{aligned}$$

Damit es solch ein z überhaupt gibt, muss $\frac{5}{3}a > 10a - 5$ sein, d.h. $a < \frac{3}{5}$

Dann ist für $z \in [\max(0, 10a - 5); \frac{5}{3}a]$ der Vektor $x = (x_1, x_2, x_3)^T = (2a - \frac{6}{5}z, 1 - 2a + \frac{1}{5}z, z)^T$ ein stochastischer Vektor mit $Ax = (a, b, c)^T$.

Die Lösung ist also mit Ausnahme des Falles $a = \frac{3}{5}$ nicht eindeutig.

2.a) Falls $a > 0$, so ist $a_n = \frac{a4^n + b3^n}{3^n + c} = 4^n \cdot \frac{a + b\left(\frac{3}{4}\right)^n}{\left(\frac{3}{4}\right)^n + c\left(\frac{1}{4}\right)^n}$; der zweite Faktor ist konvergent mit Grenzwert $a \neq 0$, der erste Faktor ist divergent, daher ist die Folge (bestimmt) divergent.

Falls $a = 0$ und $b > 0$, so ist $a_n = \frac{b3^n}{3^n + c} = \frac{b}{1 + c\left(\frac{1}{3}\right)^n} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} b$.

Falls $a = 0$ und $b = 0$, so ist $a_n = 0$ und damit insbesondere eine Nullfolge.

2.b) Den geometrischen Faktor erhält man durch sukzessive Quotientenbildung aus $a_0 = 675$, $a_1 = 450$, $a_2 = 300$, $a_3 = 200$

$$\frac{a_1}{a_0} = \frac{450}{675} = \frac{2}{3}, \quad \frac{a_2}{a_1} = \frac{300}{450} = \frac{2}{3}, \quad \frac{a_3}{a_2} = \frac{200}{300} = \frac{2}{3}$$

Damit $a_1 = \frac{2}{3}a_0$, $a_2 = \frac{2}{3}a_1$, $a_3 = \frac{2}{3}a_2$. Das wird sinnvoll in Form von $a_n = \frac{2}{3}a_{n-1}$, $a_0 = 650$ fortgesetzt. Explizit lautet die Folge $a_n = 650 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n$. Für die ersten 10 Jahre summieren sich die Tantiemen zu

$$\sum_{n=0}^{9} 650 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n = 650\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{10}}{1-\frac{2}{3}} \approx 1916,2$$

Die Summe aller - unendlich vielen - Tantiemen ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} 650 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{650}{1-\frac{2}{3}} = 1950$$

3.a) Ansatz für $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$: Die Funktion muss an den Randstellen 0 und ℓ glatt in die horizontalen Geraden $y = 0$ und $y = 5$ übergehen, d.h. es muss gelten $f(0) = 5$, $f(\ell) = 0$ und $f'(0) = f'(\ell) = 0$.

Da $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$, lauten die Steckbrief-Gleichungen für f

$$\begin{aligned} f(0) &= 5 \Leftrightarrow d = 5 \\ f'(0) &\neq 0 \Leftrightarrow c = 0 \\ f(\ell) &= 0 \Leftrightarrow a\ell^3 + b\ell^2 + 5 = 0 \\ f'(\ell) &= 0 \Leftrightarrow 3a\ell^2 + 2b\ell = 0 \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung besagt

$$b = -\frac{3}{2}\ell a$$

Setzt man dies in die vorletzte Gleichung ein, so folgt

$$a\ell^3 - \frac{3}{2}a\ell^3 + 5 = 0 \Leftrightarrow a\frac{\ell^3}{2} = 5 \Leftrightarrow a = \frac{10}{\ell^3}$$

Damit Rücksubstitution

$$a = -\frac{15}{\ell^2}$$

Die Funktion lautet somit

$$f(x) = \frac{10}{\ell^3}x^3 - \frac{15}{\ell^2}x^2 + 5$$

mit dem Definitionsbereich $[0; \ell]$.

Die Funktion hat damit die Ableitungen

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{30}{\ell^3}x^2 - \frac{30}{\ell^2}x \\ f''(x) &= \frac{60}{\ell^3}x - \frac{30}{\ell^2} \\ f'''(x) &= \frac{60}{\ell^3} \end{aligned}$$

Die Rampe ist am steilsten, wenn $f'(x)$ minimal wird. Das kann entweder an den Rändern oder in einem inneren Punkt geschehen. Dort muss gelten (Notwendig ist, das die erste Ableitung von f', d.h. f'' verschwindet)

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{60}{\ell^3}x - \frac{30}{\ell^2} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\ell}{2}$$

Hinreichend für ein lokales Minimum ist (zweite Ableitung von f' größer Null) $f'''(x) > 0$. Das ist hier aber erfüllt: $f'''(x) = \frac{60}{\ell^3} > 0$. Es liegt also in $x = \frac{\ell}{2}$ ein lokales Minimum vor mit dem Wert $f'(\frac{\ell}{2}) = \frac{30}{\ell^3}\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 - \frac{30}{\ell^2}\left(\frac{\ell}{2}\right) = -\frac{15}{2\ell}$. An den Rändern ist $f'(0) = f'(\ell) = 0$, daher ist das lokale Minimum auch globales Minimum.

Die kleinste Steigung beträgt also genau in der Mitte der Rampe $-\frac{15}{2\ell}$. Diese Steigung darf höchstens 25% betragen, d.h. es muss gelten

$$-\frac{15}{2\ell} \geq -\frac{25}{100} \Leftrightarrow \frac{2\ell}{15} \geq 4 \Leftrightarrow \ell \geq 30$$

Die Rampe muss also mindestens 30m lang sein.

3.b) Das Volumen der Aufschüttung ergibt sich als Längsschnittsfläche unter der Rampe multipliziert mit der Breite der Rampe, d.h. als

$$\begin{aligned} 5\cdot\int_0^\ell f(x)dx &= 5\cdot\int_0^\ell \left(\tfrac{10}{\ell^3}x^3-\tfrac{15}{\ell^2}x^2+5\right)dx \\ &= 5\cdot\left[\tfrac{10}{4\ell^3}x^4-\tfrac{15}{3\ell^2}x^3+5x\right]_{x=0}^{x=\ell} \\ &= 5(\tfrac{5}{2}\ell-5\ell+5\ell)=\tfrac{25}{2}\ell \end{aligned}$$

Für eine Rampe der Länge $\ell = 30\text{m}$ werden beispielsweise 375 Kubikmeter Füllmaterial benötigt.

4.a)
$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}\frac{(x-\frac12 y)^2+x+y}{x+y} &= \frac{\left(2(x-\frac12 y)+1\right)(x+y)-\left((x-\frac12 y)^2+x+y\right)}{(x+y)^2} \\ &\frac{2(x-\frac12 y)(x+y)-(x-\frac12 y)^2}{(x+y)^2} \\ &= \frac{(x-\frac12 y)\left(2(x+y)-(x-\frac12 y)\right)}{(x+y)^2} \\ &= \frac{(x-\frac12 y)\left(x+\frac52 y\right)}{(x+y)^2} \\ \frac{\partial}{\partial y}\frac{(x-\frac12 y)^2+x+y}{x+y} &= \frac{\left(2(x-\frac12 y)\left(-\frac12\right)+1\right)(x+y)-\left((x-\frac12 y)^2+x+y\right)}{(x+y)^2} \\ &= \frac{(x-\frac12 y)\left(-(x+y)-(x-\frac12 y)\right)}{(x+y)^2} \\ &= \frac{(x-\frac12 y)(-2x-\frac12 y)}{(x+y)^2} \end{aligned}$$

4.b) Es ist $h(x,y)=f(x,y)-1=\frac{(x-\frac12 y)^2+x+y}{x+y}-1=\frac{(x-\frac12 y)^2}{x+y}+1-1=\frac{(x-\frac12 y)^2}{x+y}$

Daher ist $h(\lambda x,\lambda y)=\frac{(\lambda x-\frac12\lambda y)^2}{\lambda x+\lambda y}=\frac{\lambda^2(x-\frac12 y)^2}{\lambda(x+y)}=\lambda\frac{(x-\frac12 y)^2}{(x+y)}=\lambda h(x,y)$. Somit ist h linear homogen.

4.c) Die Hauptunterdeterminanten von H_f lauten $\frac92\frac{y^2}{(x+y)^3}>0$ und

$\left(\frac92\right)^2\left(\frac{y^2}{(x+y)^3}\frac{x^2}{(x+y)^3}-x\frac{y}{(x+y)^3}x\frac{y}{(x+y)^3}\right)=0$

Aufgrund des erweiterten Determinantenkriteriums für 2×2-Matrizen ist H_f für alle $x,y>0$ positiv semidefinit. Damit ist f auf $]0;\infty[\times]0;\infty[$ konvex.

4.d) Wegen der Konvexität von f sind alle Punkte mit $\nabla f(x,y)=0$ bereits Stellen eines globalen Minimums. Oben wurde der Gradient

$$\begin{pmatrix} \frac{(x-\frac12 y)(x+\frac52 y)}{(x+y)^2} \\ \frac{(x-\frac12 y)(-2x-\frac12 y)}{(x+y)^2} \end{pmatrix}$$

berechnet. Seine Nullstellen liegen für $x,y>0$ dort, wo der Zähler jeweils verschwindet, d.h. dort, wo $x-\frac12 y=0$ ist, d.h. dort, wo $y=2x$. In diesem Fall hat die Funktion gleich unendlich viele globale Minima mit dem Zielwert 1 auf der Gerade $y=2x$.

5.a) Der Lagrange-Ansatz lautet

$$1-\lambda\frac{1}{2\sqrt{x}}=0\Leftrightarrow\lambda=2\sqrt{x}$$
$$2-\lambda\frac{1}{2\sqrt{y}}=0\Leftrightarrow\lambda=4\sqrt{y}$$
$$3-\lambda\frac{1}{2\sqrt{z}}=0\Leftrightarrow\lambda=6\sqrt{z}$$
$$\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=11$$

Aus den ersten drei Gleichungen folgt durch Gleichsetzen über λ

$\sqrt{y} = \frac{1}{2}\sqrt{x} \Leftrightarrow y = \frac{1}{4}x, \sqrt{z} = \frac{1}{3}\sqrt{x} \Leftrightarrow z = \frac{1}{9}x$

Setzt man dies in die Nebenbedingung ein, so ergibt sich

$\sqrt{x} + \frac{1}{2}\sqrt{x} + \frac{1}{3}\sqrt{x} = 11 \Leftrightarrow \frac{11}{6}\sqrt{x} = 11 \Leftrightarrow x = 36$

Rücksubstitution ergibt dann $y = 9, z = 4$. Der Lagrange-Multiplikator lautet $\lambda = 2\sqrt{36} = 12$. Der Zielwert dieser Lösung ist $f(36, 9, 4) = 66$.

5.b) In dem genannten Problem sind beide Funktionen f und g konvex, denn f ist eine lineare Funktion und g hat den Gradienten $(-\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}, -\frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}, -\frac{1}{2}z^{-\frac{1}{2}})^T$ und die Hesse-Matrix $\begin{bmatrix} \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4}y^{-\frac{3}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4}z^{-\frac{3}{2}} \end{bmatrix}$. Für $x, y, z > 0$ hat diese Matrix aber lauter positive Eigenwerte, ist also positiv definit für alle $x, y, z > 0$. Daher ist auch g konvex.

Weiterhin ist die Slater-Bedingung erfüllt, denn z.B. für $x = 121, y = 1, z = 1$ gilt $g(x, y, z) = 11 - \sqrt{121} - \sqrt{1} - \sqrt{1} = -2 < 0$

Insgesamt hat f genau dann ein globales Minimum unter $g(x, y, z) \leq 0$, wenn es $\lambda \geq 0$ gibt, so dass

$$\begin{aligned} \nabla f(x,y,z) + \lambda \nabla h(x,y,z) &= \bar{0} \\ g(x,y,z) &\leq 0 \\ \lambda g(x,y,z) &= 0 \end{aligned}$$

In 5.a) wurde genau ein kritischer Punkt berechnet, für den die Nebenbedingung aktiv ist und gleichzeitig $\lambda = 12 > 0$ gilt. Dieser löst also auch das in 5.b) vorliegende Optimierungsproblem. Er ist dann aber auch eine Optimallösung für das Problem in 5.a), denn weil die NB aktiv ist, ist sie in Gleichungsform erfüllt und das ist gerade die NB des Optimierungsproblems in 5.a), welches ansonsten mit dem Problem in (b) übereinstimmt.

5.c) Dies ist für das Ausgangsproblem der Randwertevergleich. Weil nämlich die Wurzelfunktionen in $x = 0$ bzw. $y = 0$ bzw. $z = 0$ nicht differenzierbar sind, können mögliche Extrema mit der Lagrange-Methode dort nicht ausfindig gemacht werden. Man muss nunmehr folgende Fälle überprüfen:

i) $x = 0, y, z > 0$ mit $\sqrt{y} + \sqrt{z} = 11$

Wie in 5.a) bekommt man mit der Lagrange-Methode das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2 - \lambda\frac{1}{2\sqrt{y}} &= 0 \Leftrightarrow \lambda = 4\sqrt{y} \\ 3 - \lambda\frac{1}{2\sqrt{z}} &= 0 \Leftrightarrow \lambda = 6\sqrt{z} \\ \sqrt{y} + \sqrt{z} &= 11 \end{aligned}$$

Aus den ersten beiden Gleichungen folgt $4\sqrt{y} = 6\sqrt{z} \Leftrightarrow \sqrt{z} = \frac{2}{3}\sqrt{y} \Leftrightarrow z = \frac{4}{9}y$.

Eingesetzt in die NB folgt: $\frac{5}{3}\sqrt{y} = 11 \Leftrightarrow y = \left(\frac{33}{5}\right)^2 = \frac{1089}{25} = 43.56$ und $z = \frac{4}{9}\left(\frac{33}{5}\right)^2 = \frac{484}{25} = 19.36$

Der kritische Punkt hat den Zielwert $f(0, \frac{1089}{25}, \frac{484}{25}) = \frac{726}{5} = 145.2$

ii) $y = 0, x, z > 0$ mit $\sqrt{x} + \sqrt{z} = 11$

Wie in 5.a) bekommt man mit der Lagrange-Methode das Gleichungssystem

$$1 - \lambda \frac{1}{2\sqrt{x}} = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2\sqrt{x}$$
$$3 - \lambda \frac{1}{2\sqrt{z}} = 0 \Leftrightarrow \lambda = 6\sqrt{z}$$
$$\sqrt{x} + \sqrt{z} = 11$$

Aus den ersten beiden Gleichungen folgt $2\sqrt{x} = 6\sqrt{z} \Leftrightarrow \sqrt{z} = \frac{1}{3}\sqrt{x} \Leftrightarrow z = \frac{1}{9}x$.

Eingesetzt in die NB folgt: $\frac{4}{3}\sqrt{y} = 11 \Leftrightarrow y = \left(\frac{33}{4}\right)^2 = \frac{1089}{16} = 68.063$ und $z = \frac{1}{9}\left(\frac{33}{4}\right)^2 = \frac{121}{16} = 7.5625$

Der kritische Punkt hat den Zielwert $f(\frac{1089}{16}, 0, \frac{121}{16}) = \frac{363}{4} = 90.75$

iii) $z = 0, x, y > 0$ mit $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 11$

Wie in (a) bekommt man mit der Lagrange-Methode das Gleichungssystem

$$1 - \lambda \frac{1}{2\sqrt{x}} = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2\sqrt{x}$$
$$2 - \lambda \frac{1}{2\sqrt{y}} = 0 \Leftrightarrow \lambda = 4\sqrt{y}$$
$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = 11$$

Aus den ersten beiden Gleichungen folgt $4\sqrt{y} = 2\sqrt{x} \Leftrightarrow \sqrt{y} = \frac{1}{2}\sqrt{y} \Leftrightarrow y = \frac{1}{4}x$.

Eingesetzt in die NB folgt: $\frac{5}{4}\sqrt{x} = 11 \Leftrightarrow x = \left(\frac{44}{5}\right)^2 = \frac{1936}{25} = 77.44$ und $y = \frac{1}{4}\left(\frac{44}{5}\right)^2 = \frac{484}{25} = 19.36$

Der kritische Punkt hat den Zielwert $f(\frac{1936}{25}, \frac{484}{25}, 0) = \frac{2904}{25} = 116.16$

iv) $x, y = 0,\ z = 121$ ergibt den Zielwert $f(0, 0, 121) = 363$

v) $x, z = 0,\ y = 121$ ergibt den Zielwert $f(0, 121, 0) = 242$

vi) $y, z = 0,\ x = 121$ ergibt den Zielwert $f(121, 0, 0) = 121$

Insgesamt kommen folgende Punkte mit folgenden Zielwerten in Frage

Nr.	x	y	z	$f(x, y, z)$
0	36	9	4	66
1	0	$\frac{1089}{25} = 43,56$	$\frac{484}{25} = 19,36$	$\frac{726}{5} = 145,2$
2	$\frac{1089}{16} = 68,063$	0	$\frac{121}{16} = 7,5625$	$\frac{363}{4} = 90,75$
3	$\frac{1936}{25} = 77,44$	$\frac{484}{25} = 19,36$	0	$\frac{2904}{25} = 116,16$
4	0	0	121	363
5	0	121	0	242
6	121	0	0	121

Man erkennt, dass der optimale Punkt bereits in 5.a) gefunden wurde.

5.d) Hier ist die marginale Änderungsrate des Optimalwertes für das Ausgangsproblem (d.h. den Fall $a = 0$) gesucht.

Die Lagrange-Funktion des parametrisierten Problems lautet

$$\begin{aligned} L_a(x, y, z, \lambda) &= x + 2y + 3z + \lambda(x^{\frac{1}{2}+a} + y^{\frac{1}{2}+a} + z^{\frac{1}{2}+a}) \\ &= x + 2y + 3z + \lambda(e^{\ln(x)(\frac{1}{2}+a)} + e^{\ln(y)(\frac{1}{2}+a)} + e^{\ln(z)(\frac{1}{2}+a)}) \end{aligned}$$

Leitet man diese partiell nach a ab, so ergibt sich

$$\begin{aligned}\frac{\partial L_a(x,y,z)}{\partial a} &= \lambda(\ln(x)e^{\ln(x)(\frac{1}{2}+a)} + \ln(y)e^{\ln(y)(\frac{1}{2}+a)} + \ln(z)e^{\ln(z)(\frac{1}{2}+a)}) \\ &= \lambda(\ln(x)x^{\frac{1}{2}+a} + \ln(y)y^{\frac{1}{2}+a} + \ln(z)z^{\frac{1}{2}+a})\end{aligned}$$

Setzt man nun die Werte $x = 26$, $y = 9$, $z = 4$, $\lambda = 12$ und $a = 0$ ein, so ergibt nach nach dem Envelope-Theorem die marginale Änderungsrate des Optimalwertes für das Ausgangsproblem, d.h. der Wert

$$12(\ln(36)\sqrt{36} + \ln(9)\sqrt{9} + \ln(4)\sqrt{4}) \approx 370,38 > 0$$

Durch marginale Verkleinerung des Exponenten, d.h $a < 0$ können also die minimalen Kosten verringert werden.