Notation für Zeilenumformungen in einem LGS:

ZV(i,j)**:** Zeile i und j werden vertauscht $(i \neq j)$:

ZM(i,β)**:** Zeile i wird mit Konstante $\beta \neq 0$ multipliziert.

ZA(i,j,α)**:** Zu Zeile j wird das α-fache von Zeile $i \neq j$ addiert.

2.4 Lineare Optimierung

Ein **lineares Optimierungsproblem**[13] (**LOP**) in **Standardform**[14] hat mit Variablenvektor $x = (x_1, \ldots, x_n)^T$ die Form

$$c^T x \stackrel{!}{=} \min_{x \geq \bar{0}} \quad \text{unter } Ax = b \tag{2.6}$$

mit $c \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $Rang(A) = m$, $b \in \mathbb{R}^m$, $b \geq \bar{0}$.

2.4.1 Basisform und Basislösung

Eine $m \times (n+1)$ Gleichungsmatrix $(F|d)$ ist in **Basisform**, wenn in F alle Einheitsvektoren $e^{(1)}, \ldots, e^{(m)}$ als Spalten[15] auftreten. Die zugehörigen Spalten[16] $j_1, \ldots, j_m$ heißen **Basisspalten**[17]. Die zugehörigen Variablen $x_{j_1}, \ldots, x_{j_m}$ heißen **Basisvariablen**[18].

2.4.2 Simplexalgorithmus

Für ein LOP in Standardform (2.6) mit Basisform[19] $(F|d)$:

[13] auch: lineares Programm [14] Überführung anderer LOP in Standardform: Ein Maximierungsproblem wird durch Multiplikation der Zielfunktion mit -1 in ein Minimierungsproblem überführt. Eine Nebenbedingung der Form $a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n \leq b_i$ (bzw. $\geq b_i$) wird mit einer **Schlupfvariable** $y_i \geq 0$ überführt in $a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n + y_i = b_i$ (bzw. $\cdots - y_i = b_i$). Eine Gleichung mit $b_i < 0$ wird mit -1 multipliziert. Redundante Gleichungen werden schließlich gestrichen. [15] Spalten in Form von Einheitsvektoren heißen **Einheitsspalten**. [16] Anders als bei der Zeilenstufenform muss hierbei nicht $j_1 < \cdots < j_m$ gelten und liegt auch keine Treppenform vor. [17] bzw. **Pivotspalten** [18] Die übrigen Variablen heißen **Nichtbasisvariablen**. [19] Basisspalten seien hier $j_1, \ldots, _m$.

[1] Simplex-Tableau:

$$
\begin{array}{c|ccc|c|c}
 & c_1 \dots & c_\ell & \dots c_n & x & \text{Engpass} \\
\hline
c_{j_1} & f_{11} \dots & f_{1\ell} & \dots f_{1n} & d_1 & d_1/f_{1\ell} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
c_{j_k} & f_{k1} \dots & f_{k\ell} & \dots f_{kn} & d_k & d_k/f_{k\ell} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
c_{j_m} & f_{m1} \dots & f_{m\ell} & \dots f_{mn} & d_m & d_m/f_{m\ell} \\
\hline
 & \delta_1 \dots & \delta_\ell & \dots \delta_n & z &
\end{array}
$$

mit $\delta_j = \sum_{r=1}^m c_{j_r} f_{rj} - c_j$, $j = 1, \dots, n$, und $z = \sum_{r=1}^m c_{j_r} d_r$

[2] Falls $\delta_j \leq 0 \forall j$: Optimallösung erreicht! Sonst wähle[20] $\delta_\ell > 0$.

[3] Wenn $f_{i\ell} \leq 0 \forall i$: Problem unlösbar[21]. Sonst $\rightsquigarrow$ Schritt [4]

[4] Wähle[22] $f_{k\ell} > 0$ so, dass $d_k/f_{k\ell}$ minimal ist.

[5] Neue Basisform durch Basiswechsel[23,24] an Pivotstelle (k, ℓ):
ZM$(k, 1/f_{k\ell})$, dann **ZA**$(k, i, -f_{i\ell})$ für $i \neq k$, **ZA**$(k, m{+}1, -\delta_\ell)$[25]
Fahre mit der neuen Basisform in Schritt [2] fort.

2.4.3 Zweiphasenmethode

Ein LOP in Standardform (2.6) löst man wie folgt:

[1] Phase 1:

Löse $\bar{1}^T u = \sum_{i=1}^n u_i \overset{!}{=} \min_{x \geq \bar{0}, u \geq \bar{0}}$ unter $Ax + Ku = b$ (2.7)

$K \in \mathbb{R}^{m \times k}$ besteht aus den k Einheitsspalten, die in A fehlen[26,27]. Die Lösung des Problems sei mit $x^{(1)}$, $u^{(1)}$ bezeichnet.

[2] Phase 2:

Ist $u_1^{(1)} + \dots + u_k^{(1)}$ größer als Null, so hat das Ausgangsproblem keine Lösung. Anderenfalls ist ist $x^{(1)}$ eine zulässige Basislösung von (2.6). Bezeichnet $\tilde{A}x + \tilde{K}u = \tilde{b}$ die Nebenbedingungen laut Schlusstableau aus Phase 1, so ist $[\tilde{A}|\tilde{b}]$ eine Basisform, mit der das Ausgangsproblem (2.6) gelöst wird.

[20] Bei mehreren Möglichkeiten: Wähle das kleinstmögliche ℓ (**Bland-Regel**, 1. Teil) [21] Die Zielfunktion ist nach unten unbeschränkt. [22] Bei mehreren Möglichkeiten: Wähle k mit am weitesten links liegender Basisspalte (Bland-Regel, 2. Teil). [23] Jede Zeilenumformung bezieht sich immer auf die in der vorigen Zeilenumformung erhaltene Gleichungsmatrix. [24] Basisspalten werden dann $j_1, \dots, j_{k-1}, \ell, j_{k+1}, \dots, j_m$. [25] Die letzte Umformung entspricht Fortschreibung der δ-Werte. [26] Wenn keine Einheitsspalte fehlt, kann Phase 1 übersprungen werden. [27] Die zusätzlichen Variablen $u_1, \dots, u_k$ des LOP heißen **künstliche Variablen**.