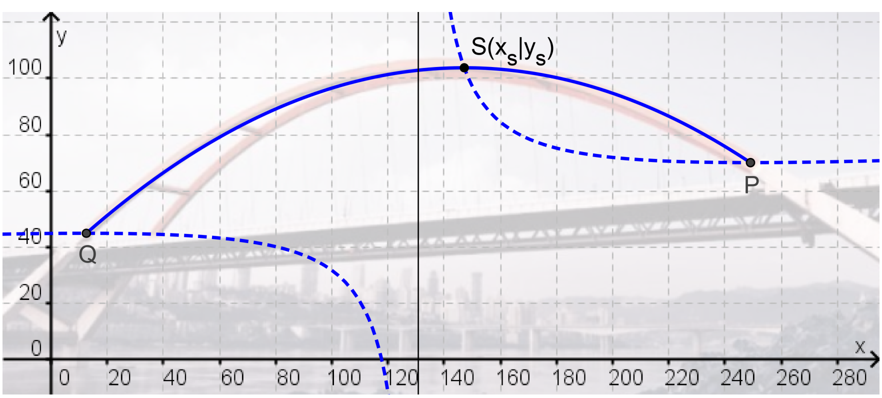
Analysis Brückenkurs
für Wirtschaftswissenschaften

Ingolf Terveer
Susanne Terveer

Ausführliche Lösungen zu den Übungsaufgaben



Web-Service: http://www.uvk-lucius.de/terveer

Web-Service: http://www.uvk-lucius.de/terveer

Kapitel 1

Aufgabe 1.

a) Der Zusammenhang kann nicht durch eine Funktion beschrieben werden, weil zum Gewicht des Briefes noch die Abmessungen hinzukommen.

b) Der Zusammenhang kann durch eine Funktion beschrieben werden: die Dauer hängt von der Ablaufgeschwindigkeit ab, die wiederum vom aktuellen Füllstand abhängt (feste Ablauföffnung am untersten Punkt des Gefäßes angenommen). Der genaue funktionale Zusammenhang hängt von den weiteren Eigenschaften (z.B. von der Form) des Gefäßes ab.

c) Der Zusammenhang kann nicht durch eine Funktion beschrieben werden, zur Entfernung sind grundsätzlich weitere Angaben erforderlich, beispielsweise die die Zugart.

d) Wenn man nur einen Teiler meint, so ist dieser noch nicht eindeutig durch die Zahl festgelegt, der Zusammenhang kann also nicht durch eine Funktion beschrieben werden. Wenn man die Menge aller Teiler meint, so liegt zwar eine eindeutige Zuordnung vor, aber nicht in dem Sinne einer reellwertigen Funktion.

e) Dies ist eine Funktion, denn die Menge $\{1, \ldots, x\}$ hat 2^x Teilmengen.

Aufgabe 2.

a) Für $x = 1$ kann kein eindeutiger Wert y zugewiesen werden (laut Tabelle sowohl $y = 3$ als auch $y = 2$. Daher kann es zu dieser Tabelle keine Funktion geben.

b) Erhöht sich x um 1, so verringert sich y um 2. Der Funktionsterm sollte den Bestandteil $-2x$ haben. Mit dem Punkt $(0|2)$ kommt man auf $x \mapsto -2x + 2$. Jede beliebige reelle Zahl darf eingesetzt werden.

c) Die y-Werte sind jeweils um eins erhöhte Potenzen $(\pm 1)^3$, $(\pm 2)^3$, $(\pm 3)^3$. Man prüft, dass $x \mapsto x^3 + 1$ zu der Wertetabelle passt. Jede beliebige reelle Zahl darf eingesetzt werden.

d) y ist jeweils negativer Kehrwert von x, also ist $x \mapsto -\frac{1}{x}$ der gesuchte Term. Mit Ausnahme von $x = 0$ kann jeder Wert für x eingesetzt werden.

Aufgabe 3.

a) $f(\frac{2}{3}) = 3\frac{2}{3} + 2 = 4$

$f(-5) = 3 \cdot (-5) + 2 = -13$

$f(t) = 3t + 2$

$f(\frac{t}{3} + 1) = 3(\frac{t}{3} + 1) + 2 = t + 5$

$f(\frac{1}{t}) = 3 \cdot \frac{1}{t} + 2 = \frac{3}{t} + 2$

b) $f(\frac{2}{3}) = -9(\frac{2}{3} - 1)^2 + 4 = 3$

$f(-5) = -9(-5 - 1)^2 + 4 = 320$

$f(t) = -9(t-1)^2 + 4 = -9(t^2 - 2t + 1) + 4 = -9t^2 + 18t - 5$

$f(\frac{t}{3} + 1) = -9(\frac{t}{3} + 1 - 1)^2 + 4 = -9(\frac{t}{3})^2 + 4 = -t^2 + 4$

$f(\frac{1}{t}) = -9(\frac{1}{t} - 1)^2 + 4 = -9\frac{(1-t)^2}{t^2} + 4 = \frac{-9(1-t)^2 + 4t^2}{t^2} = \frac{-9+18t-9t^2+4t^2}{t^2} = \frac{-5t^2+18t-9}{t^2}$

c) $f(\frac{2}{3}) = \frac{\frac{2}{3}+1}{\frac{2}{3}-1} = \frac{\frac{5}{3}}{-\frac{1}{3}} = -5$

$f(-5) = \frac{-5+1}{-5-1} = \frac{-4}{-6} = \frac{2}{3}$

$f(t) = \frac{t+1}{t-1}$

$f(\frac{t}{3} + 1) = \frac{\frac{t}{3}+1+1}{\frac{t}{3}+1-1} = \frac{\frac{t}{3}+2}{\frac{t}{3}} = \frac{t+6}{t}$

$f(\frac{1}{t}) = \frac{\frac{1}{t}+1}{\frac{1}{t}-1} = \frac{\frac{1+t}{t}}{\frac{1-t}{t}} = \frac{1+t}{1-t}$

Aufgabe 4.

a) Der Definitionsbereich beinhaltet alle Werte, für die der Nenner ungleich Null ist. Die Nullstellen des Nenners ergeben sich als Nullstellen von $x-1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ und $3x+2 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{2}{3}$. Also ist $\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 1$ und $x \neq -\frac{2}{3}\}$

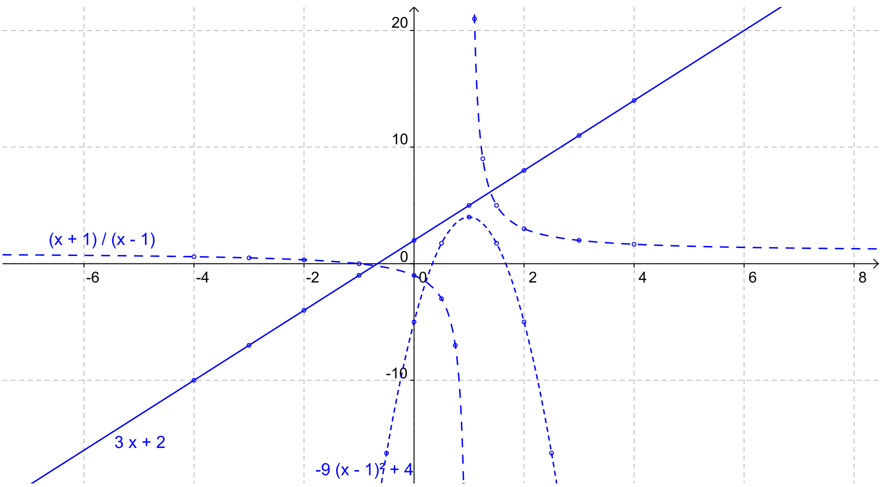
b) Die Definitionslücken bestimmt man, indem man den Ausdruck von innen nach außen auswertet und überlegt, für welche Werte die Berechnung eines Bruch-Teilausdruckes nicht möglich ist. Zunächst ist genau für $x = 0$ ist der Ausdruck $\frac{x+1}{x}$ nicht erklärt. Anderenfalls gilt $\frac{1}{1+\frac{2}{1-\frac{x+1}{x}}} = \frac{1}{1-2x}$.

Dieser Ausdruck wiederum ist für $x = \frac{1}{2}$ nicht erklärt.

Insgesamt ist der Ausgangsterm für $x \in \{0, \frac{1}{2}\}$ nicht erklärt. Als maximaler Definitionsbereich kommt daher $\mathbb{R} \setminus \{0, \frac{1}{2}\}$ in Frage. Sie sehen an diesem Beispiel, dass sich durch Termumformungen der Definitionsbereich eines Funktionsterms verändern kann. In diesem Beispiel darf zwar der Wert $x = 0$ nicht in den Ausgangs-Term eingesetzt werden, allerdings ist der Ausdruck in $x = 0$ stetig ergänzbar durch den Wert 1.

Aufgabe 5.

x	$3x+2$	x	$-9(x-1)^2+4$	x	$\frac{x+1}{x-1}$
-4	-10	$-\frac{3}{2}$	$-52,25$	-4	$\frac{3}{5}$
-3	-7	-1	-32	-3	$\frac{1}{2}$
-2	-4	$-\frac{1}{2}$	$-16,25$	-2	$\frac{1}{3}$
-1	-1	0	-5	-1	0
0	2	$\frac{1}{2}$	$1,75$	0	-1
1	5	1	4	1	Definitionslücke
2	8	$\frac{3}{2}$	$1,75$	2	3
3	11	2	-5	3	2
4	14	$\frac{5}{2}$	$-16,25$	4	$\frac{5}{3}$



Aufgabe 6.

Unter der Annahme, dass alle Strecken jeweils samt ihrer Endpunkte zum Graphen gehören, gilt folgendes:

a) stellt keine Funktion dar. Beispielsweise liegen die Punkte $(0|0)$ und $(0|40)$ auf dem Graphen

b) stellt keine Funktion dar, denn die Punkte $(5|3)$ und $(5|5)$ liegen auf dem Graphen.

c) stellt eine (stückweise lineare) Funktion dar mit Definitionsbereich $[1; 9]$.

d) stellt eine (stückweise lineare) Funktion dar mit Definitionsbereich $[1; 9]$. Beachten Sie, dass die „steilen“ Verbindungsstrecken nicht vertikal sind, so dass eine Funktion vorliegt (d.h. jedem Wert x ist genau ein Wert für y zugeordnet).

e) Für $\beta \neq 0$ stellt der Graph keine Funktion dar, weil er insbesondere die Ordinate zwei Mal schneidet. Für $\alpha = 0$ stellt der Graph eine Funktion dar mit Definitionsbereich $[0; x_0]$ und $x_0 = 6+3+1.5+0.75++0.375 = 11.$ 625 (Summe der fünf Halbkreisdurchmesser, welche den Graphen bilden).

f) stellt eine Funktion dar mit Definitionsbereich $[1; 5] \cup [6; 0]$.

Aufgabe 7.

a) $f([0; 5]) = \{f(x) : x \in [0; 5]\}$. Damit ergibt sich die gesuchte Bildmenge wie folgt:

$x \in [0; 5] \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 5 \Leftrightarrow 0 \leq 2x \leq 10 \Leftrightarrow -1 \leq 2x - 1 \leq 9 \Leftrightarrow -1 \leq f(x) \leq 9$.

Also ist $f([0; 5]) = [-1; 9]$

$f^{-1}([-2; 0]) = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \in [-2; 0]\}$. Damit ergibt sich die gesuchte Urbildmenge wie folgt:

$f(x) \in [-2; 0] \Leftrightarrow -2 \leq f(x) \leq 0 \Leftrightarrow -2 \leq 2x - 1 \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq 2x \leq 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$.

Also ist $f^{-1}([-2; 0]) = [-\frac{1}{2}\,; \frac{1}{2}]$.

b) $Bild(g) = g([0; 1[)$. Damit ergibt sich die gesuchte Bildmenge wie folgt: $x \in [0; 1[\Leftrightarrow 0 \leq x < 1 \Leftrightarrow -5 < -5x \leq 0 \Leftrightarrow -3 < 2 - 5x \leq 2 \Leftrightarrow -3 < g(x) \leq 2$.

Also ist $Bild(g) =] - 3; 2]$

und $g^{-1}([-4; -1]) = \{x \in \mathbb{D}_g = [0; 1] : g(x) \in [-4; -1]\}$. Damit ergibt sich die gesuchte Urbildmenge wie folgt:

$-4 \leq 2 - 5x \leq -1 \Leftrightarrow -6 \leq -5x \leq -3 \Leftrightarrow \frac{3}{5} \leq x \leq \frac{6}{5}$.

Also ist $g^{-1}([-4; -1]) = [\frac{3}{5}; \frac{6}{5}] \cap \mathbb{D}_g = [\frac{3}{5}; 1[$.

c) Die Rechnungen sind etwas mühselig, es sei denn, man nutzt gleich aus, dass die Funktion h eine streng monoton wachsende Funktion ist (d.h. für alle $x_1, x_2 \in \mathbb{D}_h$ gilt $x_1 < x_2 \Rightarrow h(x_1) < h(x_2)$) dieser Begriff wird gleich im nächsten Abschnitt besprochen, Sie sollten ggf. die Bearbeitung dieser Teilaufgabe dann nachholen.

Wie kann man die strenge Monotonie von h erkennen? Indem man zunächst den Term so umformt, dass man einfache Aussagen wie z.B.

$0 < x_1 < x_2 \Rightarrow \frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2}$ oder $x_1 < x_2 \Rightarrow -x_1 > -x_2$verwenden kann. Beispielsweise könnte man folgendermaßen die Monotonie nachrechnen: falls $1 \leq x_1 < x_2 \leq 2$, so gilt:

$$h(x_1) = \frac{x_1}{x_1+3} - \frac{1}{x_1+3} = \underbrace{\frac{1}{\underbrace{1 + \underbrace{\frac{3}{x_1}}_{>\frac{3}{x_2}}}_{>1+\frac{3}{x_2}}}}_{<\frac{1}{1+\frac{3}{x_2}}} + \underbrace{\frac{1}{\underbrace{-3 - x_1}_{>-3-x_2}}}_{<\frac{1}{-3-x_2}} < \frac{1}{1+\frac{3}{x_2}} + \frac{1}{-3-x_2} = h(x_2)$$

Mit Hilfe der strengen Monotonie folgt:

$x \in [1;2] \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 2 \Leftrightarrow h(1) \leq h(x) \leq h(2) \Leftrightarrow 0 \leq h(x) \leq \frac{1}{5}$

Es ist also $Bild(h) = h([1;2]) = [0; \frac{1}{5}]$.

Nach dieser Rechnung ist klar, dass nur Werte in $[0; \frac{1}{5}]$ angenommen werden können. Es gilt mithin $h^{-1}([0;1]) = h^{-1}([0; \frac{1}{5}]) = \mathbb{D}_h = [1;2]$

Aufgabe 8.

a) f ist streng monoton fallend und streng konvex

b) f ist streng monoton fallend und weder konkav noch konvex. In (4|4) liegt ein Wendepunkt (von rechtsgekrümmt nach linksgekrümmt) vor.

c) f ist streng monoton wachsend und sowohl konkav als auch konvex (dies ist bei linearen Funktionen der Fall, vgl. das betreffende Kapitel

d) f ist streng monoton wachsend und streng konkav.

e) f ist streng monoton wachsend und weder konkav noch konvex. In (4|4) liegt ein Wendepunkt (von linksgekrümmt nach rechtsgekrümmt) vor.

f) f ist konstant und damit sowohl monoton wachsend als auch monoton fallend (aber nicht streng monoton). f ist sowohl konkav als auch konvex (aber nicht streng konkav oder streng konvex).

Aufgabe 9.

Alle Funktionen sind für $x \in [0; 1500]$ skizziert; dies wird als (ökonomischer) Definitionsbereich angenommen.

Die Kostenfunktion ist streng monoton wachsend, sowohl konkav als auch konvex (linear) und hat den Ordinatenabschnitt (0|100). Sie nimmt ihr Maximum an für $x = 1500$.

Die Erlösfunktion läuft durch den Ursprung (einzige Nullstelle). sie hat ein Maximum etwa bei $x = 600$ (der exakte Wert liegt bei $581,\overline{6}$) ein Minimum bei $x = 0$ und eine Wendestelle bei $x = 1000$. Sie ist links von $x = 600$ streng monoton wachsend und rechts davon streng monoton fallend (wobei der Bereich oberhalb von $x = 1400$ durch visuelle Überprüfung nicht genau zu entscheiden ist, tatsächlich wechselt die Funktion bei $x = 1418,\overline{3}$ noch von streng monoton fallend zu streng monoton wachsend und hat an dieser Stelle ein lokales Minimum). In $x = 600$ liegt ein Erlösmaximum vor. Die Erlösfunktion ist links von der Wendestelle streng konkav und rechts davon streng konvex.

Die Gewinnfunktion hat den Ordinatenabschnitt $(0|-100)$ und die ungefähren Nullstellen $x \approx 1$ und $x \approx 1460,75$. Sie ist streng monoton wachsend für $x \leq 500$ streng monoton fallend für $x \geq 500$. In $x = 0$ und $x = 1500$ liegt minimaler Gewinn (Verlust) vor, in $x = 500$ maximaler Gewinn. Die Gewinnfunktion hat eine Wendestelle in $x = 1000$, sie ist links davon streng konkav und rechts davon streng konvex.

Die ungefähre Lage von Nullstellen, Extrema und Wendestellen ist mit Hilfe von Geogebra oder einer anderen dynamischen Geometrie-Software zu finden. Später werden wir Methoden besprechen, um diese Stellen auch rechnerisch ausfindig zu machen.

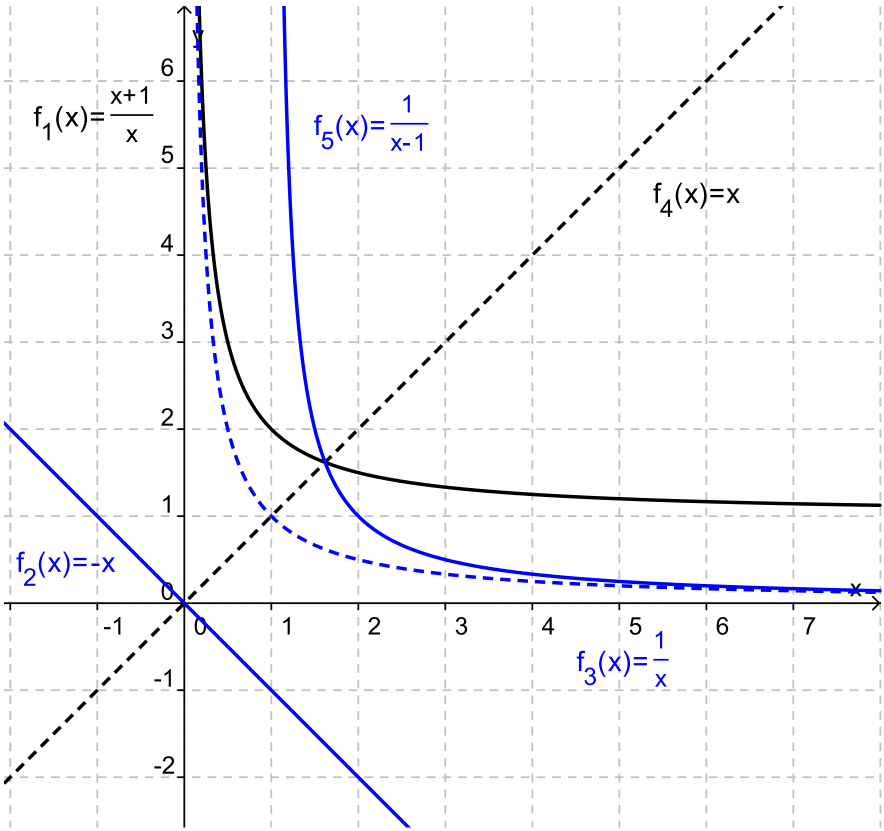
Aufgabe 10.

Tabelle der Verkettungen $(f \circ g)(x)$:

$g(x) =$	$\frac{x+1}{x}$	$-x$	$\frac{1}{x}$	x	$\frac{1}{x-1}$
$f(x) =$					
$\frac{x+1}{x}$	$\frac{\frac{x+1}{x}+1}{\frac{x+1}{x}} = \frac{2x+1}{x+1}$	$\frac{(-x)+1}{x} = \frac{1-x}{x}$	$\frac{\frac{1}{x}+1}{\frac{1}{x}} = x+1$	$\frac{x+1}{x}$	$\frac{\frac{1}{x-1}+1}{\frac{1}{x-1}} = x$
$-x$	$-\frac{x+1}{x}$	$-(-x) = x$	$-\frac{1}{x}$	$-x$	$-\frac{1}{x-1}$
$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{\frac{x+1}{x}} = \frac{x}{x+1}$	$\frac{1}{(-x)} = -\frac{1}{x}$	$\frac{1}{\frac{1}{x}} = x$	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{\frac{1}{x-1}} = x-1$
x	$\frac{x+1}{x}$	$= -x$	$\frac{1}{x}$	x	$\frac{1}{x-1}$
$\frac{1}{x-1}$	$\frac{1}{\frac{x+1}{x}-1} = x$	$\frac{1}{(-x)-1} = -\frac{1}{x+1}$	$\frac{1}{\frac{1}{x}-1} = -\frac{x}{x-1}$	$\frac{1}{x-1}$	$\frac{1}{\frac{1}{x-1}-1} = -\frac{x-1}{x-2}$

Also ist f_1 Umkehrfunktion zu f_5 (und umgekehrt), f_2, f_3 und f_4 sind jeweils zu sich selbst Umkehrfunktionen.

Skizze der Funktionen, aus der die Umkehrfunktionseigenschaften hervorgehen:



Aufgabe 11.

Eine Funktion $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ lässt sich grundsätzlich umkehren, wenn jeder Bildwert $f(x)$ nur für ein $x \in \mathbb{D}$ angenommen wird. In a) ist der Verlauf der Funktion – auch im rechten Bereich – streng monoton wachsend, daher gibt es eine Umkehrfunktion. In b) wird der Wert 3 zweimal angenommen, es gibt also keine Umkehrfunktion. In c) ist der Verlauf streng monoton fallend, es gibt also eine Umkehrfunktion.

Aufgabe 12.

a) R_1 = ist die Relation zum Einheitskreis, d.h. dem Kreis mit Radius 1 um den Ursprung.

b) Zum einen gehört der Punkt $(0|1)$ zu R_2. Nimmt man an, dass $y \neq 1$, so lässt sich die Gleichung umformen zu $x(y-1) = y-1 \Leftrightarrow x = 1$.

Also gehören auch alle Punkte $(1|y)$ mit $y \neq 1$ zu R_2. Also ist $R_2 = \{(0|1)\} \cup \{(1|y) : y \neq 1\}$.

c) Die Betragsungleich löst sich zu $-1 \leq x - y \leq 1 \Leftrightarrow x - 1 \leq y \leq x + 1$. Die Relation besteht also aus allen Punkten zwischen den Geraden mit den Gleichungen $z = x - 1$ und $z = x + 1$.

d) gemäß Preisaushang der Deutschen Post von 2008 kosten Briefe mit einem Gewicht bis 20 Gramm 0,55€ (Standardbrief), bis 50 Gramm 0,90€ (Kompaktbrief), bis 500 Gramm 1,45€ (Großbrief) und bis 1000 Gramm 2,20€ (Maxibrief). Sie müssen dabei jedoch gewisse Abmessungen abhängig vom Gewicht einhalten, sonst fallen sie automatisch in die nächst höhere Briefkategorie, deren Abmessungen sie erfüllen. Lässt man die Abmessungen beiseite, so lautet die Briefportorelation

$R_4 = R_{4,1} \cup R_{4,2} \cup R_{4,3} \cup R_{4,4}$ mit

$R_{4,1} = [0; 20] \times \{0, 55\}$, $R_{4,2} = [0; 90] \times \{0, 90\}$, $R_{4,3} = [0; 500] \times \{1, 45\}$, $R_{4,4} = [0; 1000] \times \{2, 20\}$

Kapitel 2

Aufgabe 1.

a) $a = \frac{5-1}{-1-1} = -2$, $b = 5 - 1 \cdot (-2) = 7$, $f(x) - 2x + 7 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{7}{2}$

b) $a = \frac{\frac{1}{2}-(-2)}{\frac{1}{5}-\frac{1}{2}} = -\frac{25}{3}$, $b = \frac{1}{2} - (-2)(-\frac{25}{3}) = -\frac{97}{6}$,

$f(x) = -\frac{25}{3}x - \frac{97}{6} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\frac{97}{6}}{-\frac{25}{3}} = -\frac{97}{50}$

c) $a = \frac{7-7}{0-(-1)} = 0$, $b = 7 - 7 \cdot 0 = 7$,

$f(x) = 7$ hat keine Nullstelle.

d) $a = \frac{3t-t}{-2-0} = -t$, $b = 3t - (-2) \cdot (-t) = -t$, $f(x) = -tx - t = 0$.

Falls $t = 0$, so ist $f(x) = 0$ und jedes $x \in \mathbb{R}$ ist Nullstelle. Falls $t \neq 0$, so ist $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$.

e) $a = \frac{t+4-t}{s+2-s} = 2$, $b = t - 2s$,

$f(x) = 2x + t - 2s = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2s-t}{2} = s - \frac{t}{2}$

f) Für $t \neq 1$ ist $a = \frac{\frac{t^2}{t-1} - \frac{t}{t-1}}{2-(-3)} = \frac{t^2-t}{5(t-1)} = \frac{t(t-1)}{5(t-1)} = \frac{t}{5}$, $b = \frac{t}{t-1} - (-3)\frac{t}{5} = \frac{5t+3t(t-1)}{5(t-1)} = \frac{3t^2+2t}{5(t-1)}$, $f(x) = \frac{t}{5}x + \frac{3t^2+2t}{5(t-1)}$.

Für $t = 0$ ist $f(x) = 0$. Für $t \neq 0$ ist $x = -\frac{\frac{3t^2+2t}{5(t-1)}}{\frac{t}{5}} = -\frac{3t+2}{t-1}$ die Nullstelle von f.

Aufgabe 2.

Es ist $ax + 100 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{100}{a}$. Für $x > -\frac{100}{a}$ wird $f(x) < 0$, was im Sachkontext einem negativen Preis entsprechen würde. Man wird die Funktion also nur für $x \leq -\frac{100}{a}$ interpretieren, eine größere Menge wird nicht als Nachfrage berücksichtigt.

Aufgabe 3.

Mit einem linearen Ansatz $f(x) = ax + b$ und $f(0) = 28000$, $f(5) = 0$ ergibt sich $b = \frac{28000-0}{0-5} = -5600$ und $a = 28000 - 0 \cdot (-56000) = 28000$, also $f(x) = 28000 - 5600x$.

Aufgabe 4.

Zunächst wird der Verbrauch des Wagens im Leerlauf pro Stunde berechnet. Ein Durchschnittsverbrauch von $6,7$ l/100km bedeutet auf der bisherigen Strecke einen Gesamtverbrauch von $\frac{75}{100}6,7 = 5,025$ Liter. Nach 10 Minuten ist der Gesamtverbrauch auf $\frac{75}{100}7,2 = 5,4$ Liter angestiegen. Es wurden also in 10 Minuten $5,4 - 5,025 = 0,375$ Liter Benzin verbraucht, das sind $6 \cdot 0,375 = 2,25$ Liter pro Stunde.

Die Restmenge im Tank lässt sich nun als Funktion der verstrichenen Zeit schreiben: $f(x) = 15 - 2,25x$. Gesucht ist die Nullstelle dieser Funktion, d.h. $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{15}{2,25} = 6,\overline{6}$. Der Motor könnte im Stau – bei gleich bleibendem Verbrauch – insgesamt 6 Stunden und 40 Minuten im Stau stehen, abzüglich der bereits verbrachten Zeit also 6 Stunden und 30 Minuten.

Aufgabe 5.

a) $f(x) = 2(x-1) - 1 = 2x - 3$

b) $f(x) = -3(x-(-3)) + 4 = -3x + 13$

c) $f(x) = \frac{4}{5}(x-5) + 6 = \frac{4}{5}x + 2$

d) $f(x) = (-2)(x-(-1)) - 1 = -2x + 1$

Aufgabe 6.

$f(x) = 3(x - t^2) + (3t^2 + 2)$

Aufgabe 7.

$K(x) = 0,2029(x - 3250) + 933 = 0,2029x + 273,575$. Das konstante Glied entspricht dem Grundpreis des Stromtarifs, d.h. dem verbrauchsunabhängigen Anteil der Stromrechnung (fixe Kosten).

Aufgabe 8.

Bringen Sie die angegebene Normalform $y = tx + \frac{11}{2}$ in die Form einer Geradengleichung $-tx + y = \frac{11}{2} \Leftrightarrow -2tx + 2y = 11$. Wenn Sie nun anhand der vorgegebene Geradengleichung $3x + sy = 11$ einen Vergleich der Koeffizienten zu x und y vornehmen, so sehen Sie $-2t = 3 \Leftrightarrow t = -\frac{3}{2}$ und $s = 2$.

Aufgabe 9.

a) $y = 3x + 2 \Leftrightarrow 3x = y - 2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}y - \frac{2}{3}$. Nach Tausch von x und y erhält man die Umkehrfunktion als $f^{-1}(x) = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$.

b) $y = -\frac{1}{3}x - \frac{1}{4} \Leftrightarrow -\frac{1}{3}x = y + \frac{1}{4} \Leftrightarrow x = -3y - \frac{3}{4}$. Also $f^{-1}(x) = -3x - \frac{3}{4}$.

c) $y = x \Leftrightarrow x = y$. Also $f^{-1}(x) = x$.

d) Hier ist $t \neq 0$, anderenfalls ist die Funktion nicht definiert. Dann gilt $y = \frac{x}{t} + (t-1) \Leftrightarrow \frac{x}{t} = y - (t-1) \Leftrightarrow x = ty - t(t-1)$. Also gilt $f^{-1}(x) = tx - t(t-1)$.

Aufgabe 10.

a) $h(x) = 8 - \frac{1}{3}(x-2) = -\frac{1}{3}x + \frac{26}{3}$,

b) $h(x) = 14 + 8(x - (-16)) = 8x + 142$,

c) $h(x) = 9 - \frac{3}{2}(x-3) = \frac{3}{2}x + \frac{27}{2}$

Aufgabe 11.

Es ist $f(x) = f_{\frac{1}{3}}(x) = \frac{1}{3}x - 2$. Jede Normale zu $f(x)$ hat die Steigung $a = -3$. Sie hat also die Punkt-Steigungsform $g_t(x) = -3x + t$ mit $t \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 12.

Eine solche Funktion kann es nicht geben. Die Normalform der genannten Funktion lautet $f(x) = ax + b$ mit $b = y_0 - ax_0$. Ihre Umkehrfunktion lautet $f^{-1}(x) = \frac{1}{a}x - \frac{b}{a}$. Ihre Normale lautet $h(x) = -\frac{1}{a}(x - x_0) + y_0 = -\frac{1}{a}x + y_0 - \frac{1}{a}x_0$. Wenn f^{-1} und h übereinstimmen würden, müssten sie die selbe Steigung haben, d.h. es müsste $a = -\frac{1}{a}$ gelten, d.h. $a^2 = -1$. Einen solchen Wert $a \in \mathbb{R}$ gibt es nicht.

Aufgabe 13.

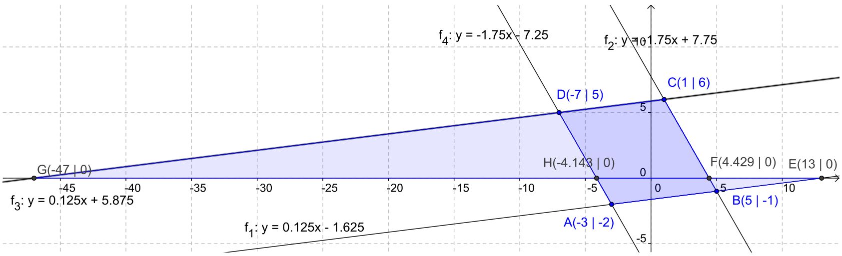
a) Die beiden Funktionen f und g haben verschiedene Steigungen, daher haben sich auch genau einen Schnittpunkt, den man durch Gleichsetzen ermittelt: $-\frac{3}{5}x + \frac{7}{5} = 2x - 4 \Leftrightarrow -\frac{13}{5}x = -\frac{27}{5} \Leftrightarrow x = \frac{27}{13}$

b) Die Geradengleichung wird in Normalform gebracht $tx + 5y = 10 - t \Leftrightarrow y = -\frac{t}{5}x + 2 - \frac{t}{5}$. Jetzt werden die Normalformen wieder gleichgesetzt: $-\frac{3}{5}x + \frac{7}{5} = -\frac{t}{5}x + 2 - \frac{t}{5} \Leftrightarrow \frac{t-3}{5}x = \frac{3-t}{5}$. Für $t = 3$ lautet die Gleichung $0 = 0$ und ist allgemeingültig. Die beiden Geraden sind dann identisch. Für $t \neq 3$ ergibt sich genau ein Schnittpunkt $x = -1$.

c) Für $t = 0$ lautet die Geradengleichung $x = 0$. Es gibt dann genau einen Schnittpunkt, nämlich $(0|\frac{7}{5})$. Für $t \neq 0$ lautet die Normalform zur Geradengleichung $y = -\frac{6}{t}x - 1$. Wieder werden die Normalformen gleich gesetzt: $-\frac{3}{5}x + \frac{7}{5} = -\frac{6}{t}x - 1 \Leftrightarrow (-\frac{3}{5} + \frac{6}{t})x = -1 - \frac{7}{5} \Leftrightarrow \frac{-3t+30}{5t}x = -\frac{12}{5}$. Für $t = 10$ ist diese Gleichung unlösbar. In diesem Fall liegen die beiden Geraden parallel. Für $t \neq 10$ gibt es genau einen Schnittpunkt, nämlich für $x = -\frac{12t}{-3t+30} = \frac{4t}{t-10}$. Dies ist übrigens auch für $t = 0$ die oben berechnete Lösung.

Aufgabe 14.

a) Skizze:



Gerade durch A und B: $f_1(x) = -2 + (x - (-3))\frac{-2-(-1)}{-3-5} = \frac{1}{8}x - \frac{13}{8}$. Gerade durch B und C: $f_2(x) = 6 + (x - 1)\frac{6-(-1)}{1-5} = -\frac{7}{4}x + \frac{31}{4}$. Gerade durch C und D: $f_3(x) = 5 + (x - 7)\frac{5-6}{-7-1} = \frac{1}{8}x + \frac{47}{8}$. Gerade durch D und A: $f_4(x) = 5 + (x + 7)\frac{5-(-2)}{-7-(-3)} = -\frac{7}{4}x - \frac{29}{4}$

b) Diagonale durch A und C: $h_1(x) = 6 + (x-1)\frac{6-(-2)}{1-(-3)} = 2x+4$. Diagonale durch B und D: $h_2(x) = 5 + (x+7)\frac{5-(-1)}{-7-5} = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$. Der Schnittpunkt der Diagonalen ergibt sich durch Gleichsetzen: $2x+4 = -\frac{1}{2}x+\frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{5}{2}x = -\frac{5}{2} \Leftrightarrow x = -1$. Der Schnittpunkt ist also $(-1|2)$.

c) Das Viereck ist ein Parallelogramm, weil die gegenüberliegenden Seiten jeweils parallel sind (erkennt man an der identischen Steigung der jeweiligen Geraden). Der Flächeninhalt des Parallelogramms ergibt sich über folgende Dreiecksflächen. Dazu seien $E(13|0)$, $F(\frac{31}{7}|)$, $G(-47|0)$, $H(-\frac{29}{7}|0)$ die Abszissen-Schnittpunkte der Geraden durch A, B bzw. B, C bzw. C, D bzw. D, A. Der Flächeninhalt des Parallelogramms ist dann Summe der Dreiecksflächen $\Delta(GFC)$ und $\Delta(HAE)$ abzüglich der Summe der Dreiecksflächen $\Delta(GHD)$ und $\Delta(BEF)$. Dabei wird durch die y-Koordinaten der Punkte A, B, C, D jeweils die Höhe der Dreiecke und durch Abschnitte auf der Abszisse jeweils die Länge der Grundseite erklärt. Die gesuchte Fläche ist dann

$\frac{1}{2}(\frac{31}{7}-(-47))\cdot 6+\frac{1}{2}(13-(-\frac{29}{7})\cdot 2-\frac{1}{2}(-\frac{29}{7}-(-47))\cdot 5-\frac{1}{2}(13-\frac{31}{7})\cdot 1 = 60.$
Der Inhalt des Parallelogramms beträgt also 60 Flächeneinheiten.

Aufgabe 15.

Für den ersten Wagen lautet die Weg-Zeit-Funktion $s_1(t) = 75t$ mit $t \geq 0$, für den zweiten Wagen $s_2(t) = 80(t - \frac{2}{60}) = 80t - \frac{8}{3}$ mit $t \geq \frac{2}{60}$. Der Zeitpunkt, zu dem sich die Wagen treffen, berechnet sich als Schnittpunkt der beiden Funktionen, d.h. für $s_1(t) = s_2(t) \Leftrightarrow 75t = 80t - \frac{8}{3} \Leftrightarrow 5t = \frac{8}{3} \Leftrightarrow t = \frac{8}{15} = \frac{32}{60}$.

Die zweite Wagen überholt den ersten also nach 32 Minuten. Dann hat er $s_1(\frac{32}{60}) = 75 \cdot \frac{32}{60} = 40$ km zurückgelegt. Neustadt und Althausen liegen also mindestens 40 km voneinander entfernt.

Aufgabe 16.

a) Der Schnittpunkt ergibt sich durch Gleichsetzen von f_t und g_t

$-(t^2+1)x-(t+1) = (t^2+1)x+(t-1) \Leftrightarrow 2(t^2+1)x = -2t \Leftrightarrow x = x_t = -\frac{t}{t^2+1}$

Dann ist $y_t = f_t(x_t) = -(t^2+1)\left(-\frac{t}{t^2+1}\right) - (t+1) = -1$. Der Schnittpunkt ist also $P(-\frac{t}{t^2+1}|-1)$.

b) Die Nullstelle von f_t ergibt sich zu

$$-(t^2+1)x-(t+1) = 0 \Leftrightarrow x = x_f = -\frac{t+1}{t^2+1}$$

Der Schnittpunkt von f_t mit der Abszisse ist also $Q(-\frac{t+1}{t^2+1}|0)$.

Die Nullstelle von g_t ergibt sich zu

$$(t^2+1)x+(t-1) = 0 \Leftrightarrow x = x_g = -\frac{t-1}{t^2+1}$$

Der Schnittpunkt von g_t mit der Abszisse ist also $R(-\frac{t-1}{t^2+1}|0)$. Das betrachtete Dreieck hat also eine Grundseite der Länge

$$|-\frac{t+1}{t^2+1}+\frac{t-1}{t^2+1}| = \frac{2}{t^2+1}$$

und die Höhe 1. Sein Flächeninhalt beträgt also

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{t^2+1}\cdot 1 = \frac{1}{t^2+1}$$

Dieser Wert wird maximal, wenn der Nenner t^2+1 minimal wird, also für $t=0$. Der maximale Flächeninhalt ist dann 1.

Aufgabe 17.

$f(x) = m(x-200)+5,5$ mit $f(300) = 8$, d.h. $m(300-200)+5,5 = 8 \Leftrightarrow 100m = 2,5 \Leftrightarrow m = \frac{1}{40}$. Die Funktion lautet also $f(x) = \frac{1}{40}x + 0,5$. Der konstante Term erfasst paketzahl-unabhängige Rüstzeiten, der Faktor $\frac{1}{40}$ entspricht dem durchschnittlichenb Abstand zwischen zwei Lieferungen. Dabei wird davon ausgegangen, dass alle Lieferungen den gleichen Zeitaufwand (Fahrtzeit zwischen zwei Zielen und Abgabe des Pakets) erfordern.

Aufgabe 18.

Die Kunstschmiede muss mit der Erlösfunktion $E(x) = 650x$ rechnen. Damit der Erlös die Kosten deckt, muss gelten $E(x) \geq K(x)$, also

$$650x \geq 120x+4500 \Leftrightarrow 530x \geq 4500 \Leftrightarrow x \geq 6,923$$

Es müssen also mindestens 7 Lampen verkauft werden.

Aufgabe 19.

a) Genau dann, wenn $t+1 = -3-t \Leftrightarrow 2t = -4 \Leftrightarrow t = -2$, liegen die beiden Punkte vertikal übereinander, es kann also dann keine Funktion geben. Für $t \neq -2$ erhält man die Punkt-Steigungsform $f_t(x) = (t-2) + (x - (t+1))\frac{t-2-(4-t)}{t+1-(-3-t)}$. Die Normalform hierzu lautet $f(x) = \frac{2t-6}{2t+4}x + (t - 2) - (t+1)\frac{2t-6}{2t+4} = \frac{t-3}{t+2}x + \frac{(t-2)(t+2)-(t+1)(t-3)}{t+2} = \frac{t-3}{2+t}x + \frac{2t-1}{t+2}$. Sofern im folgenden die Funktion f_t verwendet wird, muss man zwangsläufig davon ausgehen, dass $t \neq -2$.

b) Für $t = 3$ ist die Funktion konstant gleich 1 und hat keine Nullstelle. Für $t \neq 3$ ist $x = -\frac{\frac{2t-1}{t+2}}{\frac{t-3}{t+1}} = -\frac{2t-1}{t-3}$ Nullstelle. Der Ordinatenabschnitt ist durch $f_t(0) = \frac{2t-1}{t+2}$ gegeben. Damit $f_t(0) = 0$, muss gelten $\frac{2t-1}{t+2} = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}$

c) Die Steigung der Funktion f_t ist der lineare Faktor $a = \frac{t-3}{2+t} \Leftrightarrow (2+t)a = t-2 \Leftrightarrow 2a+2 = t(1-a) \Leftrightarrow t = \frac{2a+2}{1-a}$. Diese Umformung ist aber nur für $a \neq 1$ möglich. Für $a = 1$ gibt es kein zugehöriges t.

d) Betrachten Sie die Funktionen f_t und f_3 (letztere ist die einzige konstante lineare Funktion in der Schar). Ein Punkt $(x|y)$, der allen F_t gemeinsam ist, muss auf F_0 liegen, also muss gelten $f_t(x) = f_3(x) = 1$. Also $\frac{t-3}{2+t}x + \frac{2t-1}{t+2} = 1 \Leftrightarrow \frac{t-3}{2+t}x = 1 - \frac{2t-1}{t+2} \Leftrightarrow \frac{t-3}{2+t}x = \frac{-t+3}{t+2} \Leftrightarrow x = -1$. Der gemeinsame Schnittpunkt ist also $N(-1|1)$.

e) Die Normale zur Funktion $f_t(x) = \frac{t-3}{2+t}x + \frac{2t-1}{t+2}$ lässt sich nur in Normalform darstellen, wenn die Steigung von f_t ungleich Null ist, d.h. für $t \neq 3$. Dann lautet die Punkt-Steigungsform der Normalen in $N(-1|1)$ eben $g_t(x) = 1+(x-(-1))\frac{2+t}{3-t} = \frac{2+t}{3-t}x+1+\frac{2+t}{3-t} = \frac{2+t}{3-t}x+\frac{3-t+2+t}{3-t} = \frac{2+t}{3-t}x+\frac{5}{3-t}$

f) Zuerst werden die Abszissenschnittpunkte von f_t und g_t berechnet. Für f_t ist dies (im Fall $t \neq 3$) die Stelle $x_t = -\frac{2t-1}{t-3}$, für g_t (im Fall $t \neq -2$) die Stelle $z_t = -\frac{5}{2+t}$. Ist also $t \notin \{-2, 3\}$, so hat das Dreieck die Eckpunkte $(-\frac{5}{2+t}|0)$, $(-\frac{2t-1}{t-3}|0)$ und $(-1|1)$ und damit den Flächeninhalt $\frac{1}{2}|\frac{5}{2+t} - \frac{2t-1}{t-3}| = \frac{1}{2}|\frac{5(t-3)-(2+t)(2t-1)}{(t+2)(t-3)}| = \frac{1}{2}|\frac{-2t^2+2t-13}{(t+2)(t-3)}|$. Wir betrachten diesen Ausdruck zunächst für $t \in]-2;3[$, dann kann man die Betragsstriche weglassen und der Ausdruck wird zu $\frac{-t^2+t-6,5}{t^2-t-6} = -1 - \frac{12,5}{(t+2)(t-3)}$. Der Ausdruck wird minimal, wenn der Nenner $(t+2)(t-3)$ minimal wird. Im Vorgriff auf das nächste Kapitel ergibt sich der Scheitelpunkt der Parabel $t^2 - t - 6 = (t - \frac{1}{2})^2 - 6,25$, d.h. der minimale Wert für $t = \frac{1}{2}$. Außerhalb des genannten Intervalls für t vertauschen F_t und G_t nur ihre Rollen, es gibt keine weiteren Kandidaten-Dreiecke für minimale Flächeninhalte.

Kapitel 3

Aufgabe 1.

Der Punkt wird jeweils in die Gleichung $ax^2 = y$ bzw. $x^2 + c = y$ eingesetzt. Die Gleichung wird aufgelöst. Nachstehend wird jeweils erst die Parabel ax^2 und dann die Parabel $x^2 + c$ beschrieben.

a) $a2^2 = 7 \Leftrightarrow a = \frac{7}{4}$ und $2^2 + c = 7 \Leftrightarrow c = 3$ Dehnung bzw. Vertikalverschiebung nach oben.

b) $a6^2 = -12 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{3}$ und $6^2+c = -12 \Leftrightarrow c = -48$. Stauchung/Spiegelung bzw. Vertikalverschiebung nach unten.

c) $a2^2 = t \Leftrightarrow a = \frac{t}{4}$ und $2^2 + c = t \Leftrightarrow c = t - 4$. Für $|t| > 4$ Dehnung, für $|t| < 4$ Stauchung, für $t < 0$ gleichzeitig Spiegelung. Vertikalverschiebung um $t - 4$.

d) Für $t \neq 0$ ist $at^2 = 2 \Leftrightarrow a = \frac{2}{t^2}$. Für $t = 0$ gibt es keine derartige Funktion. Weiter ist $t^2 + c = 2 \Leftrightarrow c = 2 - t^2$. Für $t^2 > 2$ Stauchung, für $t^2 < 2$ Dehnung. Vertikalverschiebung um $2 - t^2$.

e) Für $t \neq 0$ ist $at^2 = 2t \Leftrightarrow a = \frac{2}{t}$. Für $t = 0$ ist jeder Wert für a geeignet. Weiter ist $t^2 + c = 2t \Leftrightarrow c = 2t - t^2$. Für $|t| < 2$ Dehnung, für $|t| > 2$ Stauchung. Vertikalverschiebung um $2t - t^2$

Aufgabe 2.

Man setzt jeweils die Punkt-Koordinaten x, y in die Gleichung $y = ax^2+c \Leftrightarrow c = y - ax^2$ ein und erhält zwei Gleichungen in den Unbekannten a, c. Durch Gleichsetzen über c bekommt man eine Gleichung in a.

a) $c = 0-a\cdot1^2 = -a$ und $c = 3-a\cdot2^2 = 3-4a$. Daraus $-a = 3-4a \Leftrightarrow a = 1$ und $c = -1$.

b) $c = 2 - a \cdot 3^2 = 2 - 9a$ und $c = -2 - a \cdot (-1)^2 = -2 - a$. Daraus $2 - 9a = -2 - a \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$ und $c = -\frac{5}{2}$.

c) $c = 2 - a \cdot 1^2 = 2 - a$ und $c = t - a \cdot 2^2 = t - 4a$. Daraus $2 - a = t - 4a \Leftrightarrow 3a = t - 2 \Leftrightarrow a = \frac{t-2}{3}$ und $c = 2 - a = \frac{8-t}{3}$.

d) $c = t - a \cdot s^2$ und $c = 2t - a \cdot (2s)^2 = 2t - 4s^2a$. Daraus $t - as^2 = 2t-4as^2 \Leftrightarrow 3as^2 = t$. Für $s = 0, t = 0$ ist diese Gleichung allgemeingültig, entsprechend gibt es unendlich viele Lösungen für a, wobei jeweils $c = 0$. Für $s = 0, t \neq 0$ ist die Gleichung unlösbar. Für $s \neq 0$ hat die Gleichung die Lösung $a = \frac{t}{3s^2}$ und dazu $c = t - as^2 = t - \frac{t}{3s^2}s^2 = \frac{2t}{3}4$.

e) $c = y_0 - a \cdot x_0^2$ und $c = y_1 - a \cdot x_1^2$. Daraus $y_0 - a \cdot x_0^2 = y_1 - a \cdot x_1^2 \Leftrightarrow a(x_1^2 - x_0^2) = y_1 - y_0 \Leftrightarrow a = \frac{y_1 - y_0}{x_1^2 - x_0^2}$ und $c = y_0 - x_0^2 \frac{y_1 - y_0}{x_1^2 - x_0^2} = \frac{y_0(x_1^2 - x_0^2) - x_0^2(y_1 - y_0}{x_1^2 - x_0^2} = -\frac{x_1^2 y_0 - x_0^2 y_1}{x_1^2 - x_0^2}$

Aufgabe 3. Es sind die drei Gleichungen $y_i = axi^2 + bx_i + c \Leftrightarrow c = y_i - ax_i^2 - bx_i$, $i = 0, 1, 2$ aufzustellen. Durch Gleichsetzen über c erhält man zwei Gleichungen in zwei Unbekannten a, b, welche dann zu lösen sind.

a) $c = 1 - a \cdot 0^2 - b \cdot 0 = 1$, $c = 2 - a \cdot 1^2 - b \cdot 1 = a - b$, $c = 10 - a \cdot 3^2 - b \cdot 3 = 10 - 9a - 3b$ ergibt $a + b = 1$ und $9a + 3b = 9$.
Löst man die erste Gleichung zu $b = 1 - a$ auf und setzt das in die zweite Gleichung ein, so ergibt sich $9a + 3(1 - a) = 9 \Leftrightarrow 6a = 6 \Leftrightarrow a = 1$.
Es folgt die Rücksubstition: $b = 1 - a = 0$ und $c = 1$.
Die Funktion lautet also $f(x) = x^2 + 1$.

b) $c = 1 - a \cdot 1^2 - b \cdot 1 = 1 - a - b$, $c = 2 - a \cdot 2^2 - b \cdot 2 = 2 - 4a - 2b$, $c = 1 - a \cdot 3^2 - b \cdot 3 = 1 - 9a - 3b$ ergibt $1 - a - b = 2 - 4a - 2b \Leftrightarrow 3a + b = 1$ und $1 - a - b = 1 - 9a - 3b \Leftrightarrow 8a + 2b = 0$.
Löst man die erste Gleichung zu $b = 1 - 3a$ auf und setzt das in die zweite Gleichung ein, so ergibt sich $8a + 2(1 - 3a) = 0 \Leftrightarrow 2a = -2 \Leftrightarrow a = -1$.
Es folgt die Rücksubstition: $b = 1 - 3a = 4$ und $c = 1 - a - b = -2$.
Die Funktion lautet also $f(x) = -x^2 + 4x - 2$.

c) $c = t - a \cdot 1^2 - b \cdot 1 = t - a - b$, $c = 4t - a \cdot 2^2 - b \cdot 2 = 4t - 4a - 2b$, $c = t - a \cdot 4^2 - b \cdot 4 = t - 16a - 4b$ ergibt $t - a - b = 4t - 4a - 2b \Leftrightarrow 3a + b = 3t$ und $t - a - b = t - 16a - 4b \Leftrightarrow 15a + 3b = 0$
Löst man die erste Gleichung zu $b = 3t - 3a$ auf und setzt das in die zweite Gleichung ein, so ergibt sich $15a + 3(3t - 3a) = 0 \Leftrightarrow 6a = -9t \Leftrightarrow a = -\frac{3t}{2}$.
Es folgt die Rücksubstitution: $b = 3t - 3a = 3t - \frac{-9t}{2} = \frac{15t}{2}$ und $c = t - a - b = t - (-\frac{3t}{2}) - \frac{15t}{2} = -5t$.
Die Funktion lautet also $f(x) = -\frac{3t}{2}x^2 + \frac{15t}{2}x - 5t$.

d) $c = 0 - a \cdot 1^2 - b \cdot 1 = -a - b$, $c = 4 - a \cdot (-1)^2 - b \cdot (-1) = 4 - a + b$, $c = t - a \cdot 3^2 - b \cdot 3 = t - 9a - 3b$ ergibt $-a - b = 4 - a + b \Leftrightarrow 2b = -4 \Leftrightarrow b = -2$ und $-a - b = t - 9a - 3b \Leftrightarrow 8a = t - 2b = t + 4 \Leftrightarrow a = \frac{t+4}{8}$.
Es folgt die Rücksubstitution: $c = -a - b = - - \frac{t+4}{8} + 2 = \frac{12-t}{8}$.
Die Funktion lautet also $f(x) = \frac{t+4}{8}x^2 - 2x + \frac{12-t}{8}$.

e) $c = 0 - a \cdot t^2 - b \cdot t = -t^2 a - tb$, $c = 1 - a \cdot 2^2 - b \cdot 2 = 1 - 4a - 2b$, $c = 1 - a \cdot (-2)^2 - b \cdot (-2) = 1 - 4a + 2b$ ergibt $1 - 4a - 2b = 1 - 4a + 2b \Leftrightarrow b = 0$

und $-t^2a - tb = 1 - 4a - 2b \Leftrightarrow a(t^2-4) = -1 + (2-t)b \Leftrightarrow a = -\frac{1}{t^2-4}$. Rücksubstitution ergibt $c = -t^2a - tb = -\frac{-t^2}{t^2-4} = \frac{t^2}{t^2-4}$. Diese Rechnung ist aber nur korrekt für $t^2 \neq 4$. Es ergibt sich dann die Funktion $f(x) = -\frac{1}{t^2-4}x^2 + \frac{t^2}{t^2-4}$.
Falls $t = \pm 2$, so gibt es keine Lösung, weil der Punkt $P(\pm 2|0)$ dann zusammen mit einem der Punkte $Q(2|1)$, $R(-2|1)$ keine Bedingung für eine Funktion angibt.

Aufgabe 4.

a) $f(x) = 2x^2 - x + 7 = 2(x^2 - \frac{1}{2}x) + 7 = 2(x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{16}) + 7 - \frac{1}{8} = 2(x - \frac{1}{4})^2 + \frac{55}{8}$

b) $f(x) = x^2 - 7 = (x-0)^2 - 7$ ist bereits die Scheitelpunktform.

c) $f(x) = -3x^2 + 5x = -3(x^2 - \frac{5}{3}x) = -3(x^2 - \frac{5}{3}x + \frac{25}{36}) + \frac{25}{12} = -3(x - \frac{5}{6})^2 + \frac{25}{12}$.

d) $f(x) = x^2 - 4tx + t^2 = (x^2 - 4tx + 4t^2) - 3t^2 = (x-2t)^2 - 3t^2$

e) $f(x) = tx^2 + 2t^2x - 2t = t(x^2 + 2tx) - 2t = t(x^2 + 2tx + t^2) - 2t - t^3 = t(x+t)^2 - 2t - t^3$

Aufgabe 5.

Scheitelpunkte lassen sich direkt ablesen. Daraus oben und unten links jeweils: $f(x) = a(x-3)^2 + 2$ und unten Mitte und rechts: $f(x) = a(x-2)^2 + 3$. Öffnung nach oben bedeutet $a > 0$, Öffnung nach unten bedeutet $a < 0$. Ist $(x_0|y_0)$ der Scheitelpunkt und liegt ein weiterer Punkt der Form $(x_0 \pm 1|y_0 \pm c)$ auf dem Graphen, so gilt $|a| = |c|$. Aus den Graphen lassen sich so jeweils die Streckungsparameter ermitteln:

$-2(x-3)^2 + 2$	$2(x-3)^2 + 2$	$-(x-3)^2 + 2$
$(x-3)^2 + 2$	$-(x-2)^2 + 3$	$\frac{1}{2}(x-2)^2 + 3$

Aufgabe 6.

a) $x^2 + 8x - 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 8x = 9 \Leftrightarrow x^2 + 8x + 16 = 25 \Leftrightarrow (x+4)^2 = 25$. Lösung ist $x = -4 - 5 = -9$ und $x = -4 + 5 = 1$

b) $4x - 2 - 2x(3x-4) = 4 \Leftrightarrow -6x^2 + 12x - 6 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0$. Lösung ist $x = 1$

c) $(2x-3)^2 = (x-1)(x-4) - 9x \Leftrightarrow 4x^2 - 12x + 9 = x^2 - 14x + 4 \Leftrightarrow 3x^2 + 2x + 5 = 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{5}{3} = 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{9} = \frac{1}{9} - \frac{5}{3}$. Diese Gleichung ist nicht lösbar (Diskriminante $-\frac{14}{3} < 0$).

d) $x^2 + tx + t + \frac{5}{4} = 0 \Leftrightarrow x^2 + tx + \frac{t^2}{4} = -t + \frac{t^2}{4} - \frac{5}{4} \Leftrightarrow (x + \frac{t}{2})^2 = \frac{t^2}{4} - t - \frac{5}{4} \Leftrightarrow (x + \frac{t}{2})^2 = \frac{(t-2)^2-1}{4}$. Die Diskriminante ist also $D = \frac{}{4}$. Für

$(t-2)^2 < 1 \Leftrightarrow |t-2| < 1 \Leftrightarrow t \in]1;3[$ hat die quadratische Gleichung also keine Lösung. Für $t \in \{1,3\}$ hat die quadratische Gleichung eine Lösung $x = -\frac{t}{2}$. Anderenfalls hat sie zwei Lösungen $x = -\frac{t}{2} \pm \frac{\sqrt{(t-2)^2-1}}{2}$.

e) $-x^2+(t+2)x-(t+2) = 0 \Leftrightarrow -x^2+(t+2)x-\frac{(t+2)^2}{4} = t+2-\frac{(t+2)^2}{4} \Leftrightarrow (x-\frac{t+2}{2})^2 = \frac{(t+2)^2}{4}-(t+2) \Leftrightarrow (x-\frac{t+2}{2})^2 = \frac{t^2-4}{4}$. Für $t^2 < 4 \Leftrightarrow t \in]-2;2[$ gibt es wieder keine Lösung. Für $t \in \{-2,2\}$ gibt es eine Lösung $x = \frac{t+2}{2}$. Anderenfalls gibt es zwei Lösungen $x = \frac{t+2}{2} \pm \frac{\sqrt{t^2-4}}{2}$.

Aufgabe 7.

a) Gleichsetzen der Funktionen ergibt $\frac{1}{2}x^2+x-1 = 2x+3 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2-x-4 = 0 \Leftrightarrow x^2-2x-8 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 9$. Lösungen sind $x = -2$ und $x = 4$. Die Schnittpunkte sind also $(-2|-1)$ und $(4|11)$. Die Gerade g ist eine Sekante der Funktion f.

b) Die Funktion f ist nur für $t \neq 0$ erklärt. Daher kann man sich bei der Schnittpunktbestimmung auf diesen Fall beschränken. Gleichsetzen der Funktion ergibt $\frac{2}{t}x^2-3x+t = \frac{1}{2}x-\frac{t}{4} \Leftrightarrow \frac{2}{t}x^2-\frac{7}{2}x+\frac{5}{4}t = 0 \Leftrightarrow x^2-\frac{7}{4}tx+\frac{5}{8}t^2 = 0 \Leftrightarrow (x-\frac{7}{8}t)^2 = \frac{49}{64}t^2-\frac{5}{8}t^2 \Leftrightarrow (x-\frac{7}{8}t)^2 = \frac{9}{64}t^2 \Leftrightarrow x = \frac{7}{8}t \pm \frac{3}{8}t$. Schnittpunkte sind daher $(\frac{1}{2}t|0)$ und $(\frac{5}{4}t|\frac{3}{8}t)$. Die Gerade g ist eine Sekante von f.

Aufgabe 8.

Damit g Tangente zu f ist, dürfen f und g nur einen Schnittpunkt haben. Bestimmen Sie also die Schnittpunkte von f und g in Abhängigkeit von t. $\frac{1}{2}x^2-2x+1 = \frac{1}{4}x+t \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2-\frac{9}{4}x-t+1 = 0 \Leftrightarrow x^2-\frac{9}{2}x-2t+2 = 0 \Leftrightarrow (x-\frac{9}{4})^2 = \frac{49}{16}+2t$. Die Gleichung hat genau eine Lösung dann und nur dann, wenn $t = -\frac{49}{32}$. Der Berührpunkt ist dann $(\frac{9}{4}|\frac{23}{32})$.

Aufgabe 9.

Die gesuchte Normale hat mit $g(x)$ einen Punkt $(t|2t+3)$ gemeinsam und daher die Punkt-Steigungsform $h(x) = -\frac{1}{2}(x-t)+(2t+3) = -\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}t+3$. Außerdem ist x_0 so zu wählen, dass h eine Tangente von f ist, d.h. dass die Gleichung $h(x) = f(x)$ genau eine Lösung hat. Lösen Sie diese Gleichung auf: $\frac{1}{2}x^2+x-1 = -\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}t+3 \Leftrightarrow x^2+3x = 8+5t \Leftrightarrow x^2+3x+\frac{9}{4} = \frac{9}{4}+8+5t \Leftrightarrow (x+\frac{3}{2})^2 = \frac{41}{4}+5t$ Diese Gleichung hat genau eine Lösung in x, wenn $\frac{41}{4}+5t = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{41}{20}$. Die gesuchte lineare Funktion ist also $h(x) = -\frac{1}{2}x-\frac{17}{8}$

Aufgabe 10.

a) $(x+2)(x-4)$

b) $(x-\sqrt{7})(x+\sqrt{7})$

c) $(x-0)(x+5)$

d) $7(x+15x+56)=7(x+7)(x+8)$

e) $(x+4)(x+t)$

Aufgabe 11.

Die betrachteten Funktionen werden zunächst, falls erforderlich, in Scheitelpunktform $f(x)=a(x-x_s)^2+y_s$ überführt. Dann ist mit dem Scheitelpunkt $(x_s|y_s)$ auch der zu bestimmende Bereich $[x_s;\infty[$ gegeben. Für $a>0$ ist $f:[x_s;\infty[\to[y_s;\infty[$ streng monoton wachsend, für $a<0$ ist $f:[x_s;\infty[\to]-\infty;y_s]$ streng monoton fallend. Die Umkehrfunktion erhalten Sie wie folgt:

- Stellen Sie die Gleichung $y=a(x-x_s)^2+y_s$ auf.
- Lösen Sie die Gleichung nach x auf. Sie erhalten $x=x_s\pm\sqrt{\frac{y-y_s}{a}}$. Von den beiden Lösungen verwendet man $x=x_s+\sqrt{\frac{y-y_s}{a}}$ im Fall $a>0$ und $x=x_s-\sqrt{\frac{y-y_s}{a}}$ im Fall $a<0$.
- Vertauschen Sie x und y. Der entstehende Term in x ist der Funktionsterm der Umkehrfunktion.

a) Hier liegt die Scheitelpunktform bereits vor. Der Scheitelpunkt ist $(0|2)$, der gesuchte Wert ist $x_s=0$. Auflösen der Gleichung: $y=x^2+2\Leftrightarrow x^2=y-2\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{y-2}$. Die Parabel ist nach oben geöffnet. Die Umkehrfunktion ist $f^{-1}:[2;\infty[\to[0;\infty[,\ f^{-1}(x)=\sqrt{x-2}$

b) Scheitelpunktform: $f(x)=(x-2)^2-4\geq-4$, Scheitelpunkt ist $(2|-4)$, also wähle man $x_s=2$. Auflösen der Gleichung: $y=(x-2)^2-4\Leftrightarrow x=2\pm\sqrt{y+4}$. Die Parabel ist nach oben geöffnet. Also lautet die Umkehrfunktion $f:[-4;\infty[\to[2;\infty[,\ f^{-1}(x)=2+\sqrt{x+4}$.

c) Scheitelpunkt von f ist $(-2|4)$. Also ist $x_s=-2$. Auflösen der Gleichung: $y=-3(x+2)^2+4\Leftrightarrow x=-2\pm\sqrt{-\frac{y-4}{3}}$. Die Parabel ist nach unten geöffnet. Also lautet die Umkehrfunktion $f^{-1}:]-\infty;4]\to]-\infty;2]$, $f^{-1}(x)=-2-\sqrt{-\frac{x-4}{3}}$

d) Scheitelpunktform $f(x)=(x+\frac{t}{2})^2-(\frac{t^2}{4}+2)$. Scheitelpunkt ist $(-\frac{t}{2}|-\frac{t^2}{4}-2)$, also ist $x_s=-\frac{t}{2}$. Auflösen der Gleichung: $y=(x+\frac{t}{2})^2-(\frac{t^2}{4}+2)\Leftrightarrow x=-\frac{t}{2}\pm\sqrt{y+\frac{t^2}{4}+2}$. Die Parabel ist nach oben geöffnet. Also lautet die Umkehrfunktion $f^{-1}:[-\frac{t^2}{4}-2;\infty[\to[-\frac{t}{2};\infty[,\ f(x)=\frac{t}{2}\pm\sqrt{x+\frac{t^2}{4}+2}$.

Aufgabe 12.

Die Nachfragefunktion hat die Punkt-Steigungsform $p(x) = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0)$. Die Gewinnfunktion ist dann jeweils $g(x) = xp(x) - c_0 x$. Falls $x_1 < x_0$ und $y_1 > y_0$ (bzw. $x_1 < x_0$ und $y_1 < y_0$), so hat die Nachfragefunktion negative Steigung und die Gewinnfunktion ist eine nach unten geöffnete Parabel. Durch Ableiten der Gewinnfunktion und Nullsetzen der Ableitung erhält man den Abszissenwert x des Cournot-Punktes und daraus dann den Ordinatenwert $y = p(x)$.

a) Die Nachfragefunktion ist $p(x) = 120 + \frac{36-120}{1500-100}(x - 100) = p(x) = 126 - \frac{3}{50}x$.

   Die Gewinnfunktion ist $g(x) = x(26 - \frac{3}{50}x) - 36x = 90x - \frac{3}{50}x^2$ mit Ableitung $g'(x) = 90 - \frac{3}{25}x$.

   Nullsetzen und Auflösen nach x ergibt $90 - \frac{3}{25}x = 0 \Leftrightarrow x = 750$. Dazu ist $p(750) = 81$. Der Cournot-Punkt ist also $C(750|81)$.

b) Nachfragefunktion ist $p(x) = 64 + \frac{36-64}{1500}x = 64 - \frac{7}{375}x$.

   Gewinnfunktion ist $g(x) = x(64 - \frac{7}{375}x) - 50x = 14x - \frac{7}{375}x^2$ mit Ableitung $g'(x) = 14 - \frac{14}{375}x$.

   Nullsetzen und Auflösen nach x ergibt $14 - \frac{14}{375}x = 0 \Leftrightarrow x = 375$. Dazu ist $p(375) = 57$. Der Cournotpunkt ist also $C(750|81)$.

c) Nachfragefunktion ist $p(x) = t + \frac{c_0 - t}{20}x$

   Gewinnfunktion ist $g(x) = x(t + \frac{c-t}{20}x) - c_0 x = (t - c_0)x - \frac{t-c_0}{20}x^2$ mit Ableitung $g'(x) = t - c_0 - \frac{t-c_0}{10}x$.

   Nullsetzen und Auflösen nach x ergibt $t - c_0 - \frac{t-c_0}{10}x \Leftrightarrow x = 10$. Dazu ist $p(10) = \frac{t+c_0}{2}$. Der Cournot-Punkt ist also $C(10|\frac{t+c_0}{2})$.

Aufgabe 13.

Die Scheitelpunktform ist $p(x) = a(x-0)^2 + 160$ mit einer Zahl $a \in \mathbb{R}$, so dass $p(2000) = 30 \Leftrightarrow a \cdot 2000^2 + 160 = 30 \Leftrightarrow a = -\frac{130}{4000000}$.

Die Nachfragefunktion ist also $p(x) = 160 - \frac{130}{4000000}x^2$. Damit lautet die Gewinnfunktion $G(x) = xp(x) - K(x) = 160x - \frac{130}{4000000}x^3 - 30x - 1000 = 130x - \frac{130}{4000000}x^3 - 1000$

Aufgabe 14.

Man setze an mit einer Geraden $y = g(x) = ax + b$, die durch den Punkt P läuft, d.h. für die $f(x_0) = ax_0 + b$ gilt. Es ist dann $b = f(x_0) - ax_0$. Die Geradengleichung lautet also $g(x) = ax + (f(x_0) - ax_0)$. Nun muss noch die

Steigung a bestimmt werden und zwar so, dass die Funktion f und die Gerade genau einen Schnittpunkt (d.h. Berührpunkt) haben. Dies führt zu einer quadratischen Gleichung, die genau dann nur eine Lösung hat, wenn ihre Diskriminante D gleich Null ist. Aus dieser Bedingung an die Diskriminante ergibt sich der gesuchte Wert von a, mit dem man schließlich die Angabe von g vervollständigt. Der im folgenden jeweils berechnete Wert von a lässt sich übrigens auch mit den später noch behandelten Methoden der Differentialrechnung als Ableitung berechnen. Der hier vorgestellte Weg ist aber eine gute Übung für das Lösen parametrischer Gleichungen und Sie sollten sich hier noch nicht durch vorschnelles Anwenden des Ableitungskonzeptes um den Übungseffekt bringen.

a) $f(x) = x^2,\ f(1) = 1,\ g(x) = ax + 1 - a \cdot 1$
$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 = ax + 1 - a \Leftrightarrow x^2 - ax + (a-1) = 0$
$D = \left(\frac{a}{2}\right)^2 - a + 1 = \frac{a^2-4a+4}{4} = \frac{(a-2)^2}{4},\ D = 0 \Leftrightarrow \boxed{a = 2}$
Also $g(x) = 2x + 1 - 2 = 2x - 1$

b) $f(x) = x^2 - 4x + 7,\ f(4) = 7,\ g(x) = ax + 7 - a \cdot 4$
$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 - 4x + 7 = ax + 7 - 4a \Leftrightarrow x^2 - (a+4)x + 4a = 0$
$D = \left(\frac{a+4}{2}\right)^2 - 4a = \frac{(a+4)^2-16a}{4} = \frac{a^2-8a+16}{4} = \frac{(a-4)^2}{4},\ D = 0 \Leftrightarrow \boxed{a = 4}$
Also $g(x) = 4x + 7 - 16 = 4x - 9$

c) $f(x) = -2x^2 - 8x - 5,\ f(-3) = 1,\ g(x) = ax + 1 + 3a$
$f(x) = g(x) \Leftrightarrow -2x^2 - 8x - 5 = ax + 1 + 3a \Leftrightarrow x^2 + \frac{a+8}{2}x + \frac{3a+6}{2} = 0$
$D = \left(\frac{a+8}{4}\right)^2 - \frac{3a+6}{2} = \frac{(a+8)^2-8(6+3a))}{16} = \frac{a^2-8a+16}{16} = \frac{(a-4)^2}{16},\ D = 0 \Leftrightarrow$ $\boxed{a = 4}$
Also $g(x) = 4x + 1 + 12 = 4x + 13$

d) $f(x) = 4x^2 + tx + 2,\ f(2) = 18 + 2t,\ g(x) = ax + 18 + 2t - 2a$
$f(x) = g(x) \Leftrightarrow 4x^2 + tx + 2 = ax + 18 + 2t - 2a \Leftrightarrow x^2 - \frac{t-a}{4}x + \frac{a+t-8}{2} = 0$
$D = \left(\frac{t-a}{8}\right)^2 - \frac{a+t-8}{2} = \frac{(t-a)^2-32(a+t-8)}{64} = \frac{a^2-2(t+16)a+(t+16)^2}{64} = \frac{(a-(t+16))^2}{64}$
$D = 0 \Leftrightarrow \boxed{a = t + 16}$
Also $g(x) = (t+16)x + 18 + 2t - 2(t+16) = (t+16)x - 14$

e) $f(x) = -x^2 - x + 1,\ f(t) = -t^2 - t + 1,\ g(x) = ax - t^2 - t + 1 - a \cdot t$
$f(x) = g(x) \Leftrightarrow -x^2 - x + 1 = ax - t^2 - t + 1 - ta \Leftrightarrow x^2 + (a+1)x - t^2 - t - ta = 0$
$D = \left(\frac{a+1}{2}\right)^2 + t^2 + t + ta = \frac{(a+1)^2+4t^2+4t+4ta}{4} = \frac{a^2+2(2t+1)a+(2t+1)^2}{4} = \frac{(a+(2t+1))^2}{4}$ $D = 0 \Leftrightarrow \boxed{a = -(2t+1)}$
Also $g(x) = -(2t+1)x - t^2 - t + 1 + (2t+1)t = -(2t+1)x + t^2 + 1$

f) Obervoraussetzung: $t \neq 0$ (sonst ist f nicht quadratisch)
$f(x) = tx^2 - 2x - 5,\ f(-t) = t^3 + 2t - 5, g(x) = ax + t^3 + 2t - 5 - a \cdot (-t)$

$f(x) = g(x) \Leftrightarrow tx^2 - 2x - 5 = ax + t^3 + 2t - 5 + ta \Leftrightarrow x^2 - \frac{a+2}{t}x - t^2 - a - 2 = 0$
$D = \left(\frac{a+2}{2t}\right)^2 + t^2 + a + 2 = \frac{(a+2)^2 + 4t^2(t^2+a+2)}{4t^2} = \frac{(a+2)^2 + 4(a+2)t^2 + 4t^4}{4t^2} = \frac{(a+2+2t^2)^2}{4t^2}$ $D = 0 \Leftrightarrow \boxed{a = -2(1+t^2)}$
Also $g(x) = -2(1+t^2)x + t^3 + 2t - 5 - 2(1+t^2)t = -2(1+t^2)x - t^3 - 5$

Dieses Ergebnis stimmt übrigens auch für $t = 0$, dann stimmen f und g überein.

Aufgabe 15.

Die Aufgaben lassen sich mit der Scheitelpunktform $f(x) = a(x - x_s)^2 + y_s$ lösen.

a) Gesucht ist $y_1 = f(0)$. Mit S,P wird zunächst der Öffnungsparameter a bestimmt. Mit S ergibt sich $f(x) = a(x-2)^2 - 1$. P einsetzen: $f(1) = 1 \Leftrightarrow a(1-2)^2 - 1 = 1 \Leftrightarrow a = 2$. Also ist $f(x) = 2(x-2)^2 - 1$ und $y_1 = f(0) = 2(0-2)^2 - 1 = 7$.

b) Hier liegen P und Q symmetrisch zum Scheitelpunkt, d.h. es muss $y_2 = f(6) = f(2) = 3$ gelten. Man kann aber auch wie in a) vorgehen:
$f(x) = a(x-4)^2 + 1$, $a(2-4)^2 + 1 = 3 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$. $y_1 = f(6) = \frac{1}{2}(6-4)^2 + 1 = 3$

c) Gesucht ist y_s. Setzen Sie P und Q sowie x_s in die Scheitelpunktform ein. Sie erhalten zwei Gleichungen, aus denen Sie a eliminieren können und so schließlich y_s erhalten.
$a(0-2)^2 + y_s = 1 \Leftrightarrow a = \frac{1}{4}(1 - y_s)$ und $a(1-2)^2 + y_s = 0 \Leftrightarrow a = -y_s$.
Gleichsetzen über a ergibt $\frac{1}{4}(1 - y_s) = -y_s \Leftrightarrow y_s = -\frac{1}{3}$.

d) Gesucht ist x_s. Weil S offensichtlich keiner der beiden Punkte P, Q sein kann, kann man bei allen Rechnungen davon ausgehen, dass $x_s \notin \{0, 3\}$. Gehen Sie nun wie in c) vor, zum Schluss ergibt sich eine Gleichung in x_s.
$a(0 - x_s)^2 - 3 = 1 \Leftrightarrow a = \frac{2}{x_s^2}$ und $a(3 - x_s)^2 - 3 = 5 \Leftrightarrow a = \frac{8}{(3-x_s)^2}$.
Gleichsetzen über a ergibt $\frac{2}{x_s^2} = \frac{8}{(3-x_s)^2} \overset{(*)}{\Leftrightarrow} 2(3 - x_s)^2 = 8x_s^2$. Es gibt zwei Lösungen, $x_s = 1$ oder $x_s = -3$. Bei der Kehrwertumformung $(*)$ handelt es sich unter der Oberannahme $x_s \notin \{0, 3\}$ tatsächlich um eine Äquivalenzumformung, so dass für die Lösungen keine Probe erforderlich ist.

e) Wenn $t = 0$ oder $t = 1$, so stimmt S mit P oder mit Q überein. Im Fall $t = 0 = x_0$ folgt also $y_s = y_0 = 1$, im Fall $t = 1 = x_1$ folgt $y_s = y_1 = 0$. Wenn $t \in \mathbb{R}$, $t \notin \{0, 1\}$, geht man wie in c) vor, allerdings ist jetzt x_s variabel, $x_s = t$.

$a(0-t)^2 + y_s = 1 \Rightarrow a = \frac{1-y_s}{t^2}$ und $a(1-t)^2 + y_s = 0 \Rightarrow a = -\frac{y_s}{(1-t)^2}$. Gleichsetzen über a ergibt $\frac{1-y_s}{t^2} = -\frac{y_s}{(1-t)^2} \Leftrightarrow (1-y_s)(1-t)^2 = -y_s t^2 \Leftrightarrow (1-t)^2 - y_s(1-t)^2 = -y_s t^2 \Leftrightarrow y_s((1-t)^2 - t^2) = (1-t)^2 \Leftrightarrow y_s(1-2t) = (1-t)^2$. Für $t = \frac{1}{2}$ hat die letzte Gleichung keine Lösung, es gibt also keine quadratische Funktion f. Für $t \neq \frac{1}{2}$ ergibt sich die Lösung $y_s = \frac{(1-t)^2}{1-2t}$. Diese Formel erfasst dann sogar die Fälle $t = 0$ und $t = 1$.

f) Weil P, Q symmetrisch zur Achse $x = 4$ liegen, muss der Scheitelpunkt auf dieser Achse liegen oder das Problem ist nicht lösbar. Konkret löst man die Aufgabe wie in e) durch Gleichsetzen.
$a(2-t)^2 + y_s = 3 \Leftrightarrow a(2-t)^2 = 3 - y_s$ und $a(6-t)^2 + y_s = 3 \Leftrightarrow a(6-t)^2 = 3 - y_s$. Beim Gleichsetzen verschwindet die Variable y_s, d.h. es ergibt sich $a(2-t)^2 = a(6-t)^2$. Diese Gleichung ist wahr für $t = 4$ und falsch für $t \neq 4$. Für $t = 4$ ist also jeder Punkt $S(4|y_s)$ ein passender Scheitelpunkt, für $t \neq 4$ gibt es keine Funktion zu diesem Scheitelpunkt.

Web-Service: http://www.uvk-lucius.de/terveer

Kapitel 4

Aufgabe 1.

a) $(8a^3)(4ab^2) + (2a^2b)(-5a^2b) = 32a^4b^2 - 10a^4b^2 = 22a^4b^2$

b) $u^{-2}v^2w^4 - u^2(vw^2)^2 = u^{-2}v^2w^4 - u^2v^2w^4 = (u^{-2} - u^2)v^2w^4 = \frac{(1-u^2)v^2w^4}{u^2}$

c) $(x^{-5} + 5x)(x^{-5} - 5x) = (x^{-5})^2 + (5x)x^{-5} - x^{-5}(5x) - (5x)(5x) = x^{-10} - 25x^2$

d) $x^5(x^{-2} - x^{-1})^2 = x^5((x^{-2})^2 - 2(x^{-2})(x^{-1}) + (x^{-1})^2) = x^5(x^{-4} - 2x^{-3} + x^{-2}) = x^5x^{-4} - 2x^5x^{-3} + x^5x^{-2} = x - 2x^2 + x^3 = x(1 - 2x + x^2) = x(1-x)^2$

e) $a^{2n} - 18a^n + 81 = (a^n)^2 - 2a^n \cdot 9 + 9^2 = (a^n - 9)^2$

f) $3x^4y^2 - 6x^3y^3 + 12x^2y^4 - 24xy^5 = 3xy^2(x^3 - 2x^2y + 4xy^2 - 8y^3) = 3xy^2(x-2y)^3$

g) $ab^2(2a^2 - b)^3 - a(8(a^3b)^2 - b^5) = ab^2(8a^6 - 12a^4b + 6a^2b^2 - b^3) - 8a^7b^2 + ab^5 = 8a^7b^2 - 12a^5b^3 + 6a^3b^4 - ab^5 - 8a^7b^2 + ab^5 = -12a^5b^3 + 6a^3b^4 = 6a^3b^3(-2a^2 + b)$

Aufgabe 2.

a) $\sqrt{18} - 4\sqrt{8} = 2\sqrt{9} - 8\sqrt{2} = 6 - 8\sqrt{2}$

b) $3\sqrt{7}^3 - 2\sqrt{7}^2 + 5\sqrt{7}^5 = 3 \cdot \sqrt{7}^2\sqrt{7} - 2\sqrt{7}^2 + 5\sqrt{7}^4\sqrt{7} = 21\sqrt{7} - 14 + 245\sqrt{7} = 266\sqrt{7} - 14$

c) $\sqrt[5]{96x^{10}} = \sqrt[5]{3 \cdot 2^5(x^2)^5} = \sqrt[5]{3}\sqrt[5]{2^5}\sqrt[5]{(x^2)^5}\sqrt[5]{2^5} = 2x^2\sqrt[5]{3}$

d) $\sqrt[3]{\frac{4a}{5b}}^3 - \frac{b}{a} = \frac{4a}{5b} - \frac{b}{a} = \frac{4a^2-5b^2}{5ab}$

e) $\sqrt{u^4} - 15\sqrt{u^3v} + 75\sqrt{u^2v^2} - 125\sqrt{uv^3} = \sqrt{u}(\sqrt{u}^3 - 3 \cdot 5\sqrt{u}^2\sqrt{v} + 3 \cdot 5^2\sqrt{u}\sqrt{v^2}) - 5^3\sqrt{v}^3 = \sqrt{u}(\sqrt{u} - 5\sqrt{v})^3$

f) $\sqrt[3]{t^2}\,\sqrt[8]{t}\,\sqrt[24]{t}\,\sqrt[6]{t} = \sqrt[8]{\sqrt[3]{t^2}}^8\,\sqrt[3]{\sqrt[8]{t}}^3\,\sqrt[24]{t}\,\sqrt[4]{\sqrt[6]{t}}^4 = \sqrt[24]{t}^{16}\,\sqrt[24]{t}^3\,\sqrt[24]{t}\,\sqrt[24]{t}^4\,\sqrt[24]{t}^{16+3+1+4} = t$

Aufgabe 3.

a) $\frac{t^2-2t}{t-1}\Big|_{t=\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}^2-2\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} = 2\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} = -2$

b) $\frac{t^3-t^2}{t^2-1}\Big|_{t=\sqrt{\frac{3}{2}}} = \frac{\sqrt{\frac{3}{2}}^3-\sqrt{\frac{3}{2}}^2}{\sqrt{\frac{3}{2}}^2-1} = \frac{\frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}-\frac{3}{2}}{\frac{3}{2}-1} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\frac{3}{2}}-1\right) = 3\sqrt{\frac{3}{2}}-3$

c) $t(t^3-t)+2(a^2-a)\big|_{t=\sqrt{a}} = \sqrt{a}(\sqrt{a}^3-\sqrt{a})+2a^2-2a = \sqrt{a}^4-\sqrt{a}^2+2a^2-2a = 3a^2-3a = 3a(a-1)$

d) $\frac{t-x}{t}\Big|_{t=x(x+1)} = \frac{x(x+1)-x}{x(x+1)} = \frac{x^2+x-x}{x(x+1)} = \frac{x^2}{x(x+1)} = \frac{x}{x+1}$

e) $2\frac{y}{s}+5\frac{y}{t}\Big|_{y=\sqrt{st^2}} = 2\frac{\sqrt{st^2}}{s}+5\frac{\sqrt{st^2}}{t} = 2\frac{\sqrt{s}\sqrt{t^2}}{s}+5\frac{\sqrt{s}\sqrt{t^2}}{t} = 2\frac{t}{\sqrt{s}}+5\sqrt{s} = \frac{2t+5s}{\sqrt{s}}$

f) $\frac{1-y^4}{1-y^2}\Big|_{y=\sqrt{1-x^2}} = \frac{1-\sqrt{1-x^2}^4}{1-\sqrt{1-x^2}^2} = \frac{1-(1-x^2)^2}{1-(1-x^2)} = \frac{1-1+2x^2-x^4}{1-1+x^2} = \frac{2x^2-x^4}{x^2} = \frac{x^2}{x^2}(2-x^2) = 2-x^2$

Aufgabe 4.

a)

	-1	2	-1	7
-3	0	3	-15	48
	-1	5	-16	55

	-1	2	-1	7
-2	0	2	-8	18
	-1	4	-9	25

	-1	2	-1	7
-1	0	1	-3	4
	-1	3	-4	11

	-1	2	-1	7
0	0	0	0	0
	-1	2	-1	7

	-1	2	-1	7
1	0	-1	1	0
	-1	1	0	7

	-1	2	-1	7
2	0	-2	0	-2
	-1	0	-1	5

	-1	2	-1	7
3	0	-3	-3	-12
	-1	-1	-4	-5

b)

	3	0	-1	1	-10
-3	0	-9	27	-78	231
	3	-9	26	-77	221

	3	0	-1	1	-10
-2	0	-6	12	-22	42
	3	-6	11	-21	32

	3	0	-1	1	-10
-1	0	-3	3	-2	1
	3	-3	2	-1	-9

	3	0	-1	1	-10
0	0	0	0	0	0
	3	0	-1	1	-10

	3	0	-1	1	-10
1	0	3	3	2	3
	3	3	2	3	-7

	3	0	-1	1	-10
2	0	6	12	22	46
	3	6	11	23	36

	3	0	-1	1	-10
3	0	9	27	78	237
	3	9	26	79	227

c)

	t	0	-2	t
-3	0	$-3t$	$9t$	$6-27t$
	t	$-3t$	$-2+9t$	$6-26t$

	t	0	-2	t
-2	0	$-2t$	$4t$	$4-8t$
	t	$-2t$	$-2+4t$	$4-7t$

	t	0	-2	t
-1	0	$-t$	t	$2-t$
	t	$-t$	$-2+t$	2

	t	0	-2	t
0	0	0	0	0
	t	0	-2	t

	t	0	-2	t
1	0	t	t	$-2+t$
	t	t	$-2+t$	$-2+2t$

	t	0	-2	t
2	0	$2t$	$4t$	$-4+8t$
	t	$2t$	$-2+4t$	$-4+9t$

	t	0	-2	t
3	0	$3t$	$9t$	$-6+27t$
	t	$3t$	$-2+9t$	$-6+28t$

In c) zusätzlich

	t	0	-2	t
t	0	t^2	t^3	$-2t+t^4$
	t	t^2	$-2+t^3$	$-t+t^4$

und

	t	0	-2	t
$\frac{1}{\sqrt{t}}$	0	$\sqrt{t}$	1	$-\frac{1}{\sqrt{t}}$
	t	$\sqrt{t}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{t}}+t$

Aufgabe 5.

	1	-12	45	-54
$x+3$	0	$x+3$	$x^2-6x-27$	x^3-3x^2+54
	1	$x-9$	$x^2-6x+18$	x^3-3x^2

Also ist $h(x) = f(x+3) = x^3 - 3x^2$. Anhand der Festlegung von $h(x)$ hat h dieselben Funktionswerte wie f, allerdings zu einem jeweils um 3 Einheiten verschobenen Argument. Dies entspricht einer Linksverschiebung des Funktionsgraphen.

Die Nullstellen von f müssen demzufolge durch eine Rechtsverschiebung aus den Nullstellen von h berechnet werden. Die Nullstellen von h sind aber leicht zu berechnen: $h(x) = x^3 - 3x^2 = x^2(x-3)$ und $h(x) = 0$ für $x = 0$ und $x = 3$. Die Nullstellen von f müssen daher $x = 3$ und $x = 6$ sein. Wir machen die (eigentlich nicht notwendige) Probe mit dem Horner-Schema:

	1	-12	45	-54
3	0	3	-27	54
	1	-9	18	0

	1	-12	45	-54
6	0	6	-36	54
	1	-6	9	0

Aufgabe 6.

a) Es ist $f(7) = 9$, d.h. der genannte Punkt liegt auf dem Graphen von f. Weiter ist $g(x) = f(x+7) - 9 = 2(x+7) - 5 - 19 = 2x$. Dies ist eine ungerade Funktion. Also ist f punktsymmetrisch zum Punkt $P(7|9)$.

b) Es ist $g(x) = f(x+3) = -4(x+3) + 7 = -4x - 5$. Diese Funktion ist nicht gerade, denn das lineare Glied ist vorhanden. Die Funktion f ist also nicht symmetrisch zu $x = 3$

c) Es ist $g(x) = f(x+4) = 3(x+4)^2 - 24(x+4) - 41 = 3x^2 - 89$. Diese Funktion ist gerade, also ist f symmetrisch zur Gerade $x = 4$.

d) Gesucht ist ein Wert t, so dass $g(x) = f(x+t)$ eine gerade Funktion ist. Es wird g berechnet: $g(x) = -6(x+t)^2 - 24(x+t) - 9 = -6t^2 - 12tx - 24t - 6x^2 - 24x - 9 = -6x^2 - (12t+24)x - \left(6t^2 + 24t + 9\right)$. Diese (quadratische) Funktion ist genau dann gerade, wenn das lineare Glied verschwindet, d.h. wenn $12t + 24 = 0 \Leftrightarrow t = -2$. Die Funktion f ist also symmetrisch zu $x = -2$. Sie könnten die Symmetrieachse hier auch aus der Scheitelpunktform von f erkennen.

e) Zunächst prüft man z.B. mit dem Horner-Schema nach, dass $f(4) = 50$. Zu prüfen ist weiter, dass die Funktion $g(x) = f(x+4)-50$ eine ungerade Funktion ist. Es ist $g(x) = (x+4)^3 - 12(x+4)^2 + 50(x+4) - 22 - 50 = x^3 + 2x$ offensichtlich eine ungerade Funktion

f) Es muss zunächst einmal $b = f(a) = -a^3+6a^2-2a+7$ sein. Weiter muss $g(x) = f(x+a) - f(a)$ eine ungerade Funktion sein. Hier errechnet man $f(x+a)-f(a) = -(a+x)^3+6(a+x)^2-2(x+a)+7-(-a^3+6a^2-2a+7) = -x^3 + (6-3a)x^2 + \left(12a - 3a^2 - 2\right)x$. Diese Funktion ist ungerade genau dann, wenn $6 - 3a = 0 \Leftrightarrow a = 2$. Hierzu lautet $b = f(2) = 19$. Der gesuchte Symmetriepunkt ist also $P(2|19)$.

Aufgabe 7.

a) $f(x) + g(x) = 5x^2 - 6x + 2$

$f(x)g(x) = -\left(x - x^2\right)\left(4x^2 - 5x + 2\right) = 4x^4 - 9x^3 + 7x^2 - 2x$

b) $f(x) + g(x) = x^4 + 3x^3 - 5$

$f(x)g(x) = \left(x^4 + 2\right)\left(3x^3 - 7\right) = 3x^7 - 7x^4 + 6x^3 - 14$

c) $f(x) + g(x) = (x-2)^2(x-3) + (x-1)(x+3) = x^3 - 6x^2 + 18x - 15$

$f(x)g(x) = (x-1)(x-2)^2(x-3)(x+3) = x^5-5x^4-x^3+41x^2-72x+36$

d) $f(x) + g(x) = tx^3 - (t-x)(x+2) - 2x + 7 = tx^3 + x^2 - tx - 2t + 7$

$f(x)g(x) = -(t-x)(x+2)\left(tx^3 - 2x + 7\right) = -t^2x^4-2t^2x^3+tx^5+2tx^4+2tx^2 - 3tx - 14t - 2x^3 + 3x^2 + 14x = tx^5 + \left(2t - t^2\right)x^4 - \left(2t^2 + 2\right)x^3 + (2t+3)x^2 - (3t-14)x - 14t$

Aufgabe 8.

Die Polynomdivisionen werden hier mit dem Horner-Schema durchgeführt:

a)

	1	−3	2
5	0	5	10
	1	2	12

also ist $f_1(x)/g_1(x) = x + 2 + \frac{12}{x-5}$. g_1 ist kein Teiler von f_1.

	1	−3	2
1	0	1	−2
	1	−2	0

also ist $f_1(x)/g_2(x) = x - 2$. g_2 ist Teiler von f_1.

b)

	1	-8	17	-10
5	0	5	-15	10
	1	-3	2	0

also ist $f_2(x)/g_1(x) = x^2 - 3x + 2$. g_1 ist Teiler von f_2.

	1	-8	17	-10
1	0	1	-7	10
	1	-7	10	0

also ist $f_2(x)/g_2(x) = x^2 - 7x + 10$. g_2 ist Teiler von f_2.

	1	-8	17	-10
-5	0	0	-5	10
6	0	6	-12	0
	1	-2	0	0

also ist $f_2(x)/g_4(x) = x - 2$. g_4 ist Teiler von f_2.

c)

	1	3	-13	-39	36	108
1	0	1	4	-9	-48	-12
	1	4	-9	-48	-12	96

also ist $f_3(x)/g_2(x) = x^4 + 4x^3 - 9x^2 - 48x - 12 + \frac{96}{x-1}$. g_2 ist kein Teiler von f_3.

	1	3	-13	-39	36	108
-5	0	0	-5	-45	-180	-660
6	0	6	54	216	792	0
	1	9	36	132	648	-552

also ist $f_3(x)/g_4(x) = x^3 + 9x^2 + 36x + 132 + \frac{648x-552}{x^2-6x+5}$. g_4 ist kein Teiler von f_3.

d)

	1	-3	2
t	0	t	$(-3+t)t$
	1	$-3+t$	$2-3t+t^2$

also ist $f_1(x)/g_3(x) = x + t - 3 + \frac{t^2-3t+2}{x-t}$. g_3 ist Teiler von f_1 genau dann, wenn t Nullstelle von $f_1$ist.

	1	-8	17	-10
t	0	t	$-8t+t^2$	$17t-8t^2+t^3$
	1	$-8+t$	$17-8t+t^2$	$-10+17t-8t^2+t^3$

also ist $f_2(x)/g_3(x) = x^2 + (t-8)\,x + t\,(t-8) + 17 + \frac{t^3-8t^2+17t-10}{x-t}$.
g_3 ist Teiler von f_1 genau dann, wenn t Nullstelle von $f_1$ist.

	1	-8	17	-10
t	0	0	t	$-8t$
0	0	0	0	0
	1	-8	$17+t$	$-10-8t$

also ist $f_2(x)/g_5(x) = x - 8 + \frac{(t+17)x-8t-10}{x^2-t}$. g_5 ist kein Teiler von f_2

e)

	1	5	$4-t$	$-5t$	$-4t$
1	0	1	6	$10-t$	$10-6t$
	1	6	$10-t$	$10-6t$	$10-10t$

also ist $f_4(x)/g_2(x) = x^3 + 6x^2 - (t-10)\,x - 6t + 10 - \frac{10t-10}{x-1}$.
g_2 ist genau dann Teiler von f_4, wenn $t = 1$.

	1	5	$4-t$	$-5t$	$-4t$
t	0	0	t	$5t$	$4t$
0	0	0	0	0	0
	1	5	4	0	0

also ist $f_4(x)/g_5(x) = x^2 + 5x + 4$. g_5 ist Teiler von f_4

Aufgabe 9.

a) Nullstellen von $p(x)$ sind 2 und -4 (p-q-Formel oder Vieta). Beides sind auch Nullstellen von f, z.B. nachzurechnen mit dem Horner-Schema:

	2	4	-20	-2	44	-48
2	0	2	8	-4	-10	24
	2	8	-4	-10	24	0

	2	4	-20	-2	44	-48
-4	0	2	-4	-4	14	-12
	2	-4	-4	14	-12	0

p ist Teiler von f, was man mit dem Horner-Schema zur Polynomdivision überprüft.

	2	4	-20	-2	44	-48
8	0	0	16	0	-32	48
-2	0	-4	0	8	-12	0
	2	0	-4	6	0	0

b) $x = 3$ ist einzige Nullstelle von p. Mit dem Horner-Schema ergibt sich, dass dies auch Nullstelle von f ist.

	1	-3	-4	12
3	0	1	0	-4
	1	0	-4	0

p ist aber kein Teiler von f:

	1	-3	-4	12
-9	0	0	-9	-27
6	0	6	18	0
	1	3	5	-15

Dass p kein Teiler von f ist, liegt hier daran, weil 3 eine doppelte Nullstelle von p, aber nur eine einfache Nullstelle von f ist.

c) Nullstellen von p sind t und 0. Diese werden in f eingesetze

	1	$-t$	t	$-t^2$	0
0	0	1	$-t$	t	$-t^2$
	1	$-t$	t	$-t^2$	0

	1	$-t$	t	$-t^2$	0
t	0	1	0	t	0
	1	0	t	0	0

Beide Nullstellen sind also auch Nullstellen von f. p ist ein Teiler von f, wie Polynomdivision zeigt:

	1	$-t$	t	$-t^2$	0
0	0	0	0	0	0
t	0	t	0	t^2	0
	1	0	t	0	0

d) Eine Nullstelle von p ist $x = -1$. Mit Horner-Schema ergibt sich

	1	1	2	2
-1	0	-1	0	-2
	1	0	2	0

, also $p(x) = (x+1)(x^2+2)$.

$x = -1$ ist also die einzige Nullstelle von p.

$x = -1$ ist auch eine Nullstelle von f, sogar eine doppelte Nullstelle:

	1	2	2	2	1
-1	0	-1	-1	-1	-1
	1	1	1	1	0

Also $f(x) = (x+1)(x^3+x^2+x+1)$ und weiter

	1	1	1	1
-1	0	-1	0	-1
	1	0	1	0

. Es gilt also $f(x) = (x+1)^2(x^2+1)$ und f hat keine weiteren Nullstellen.

f und p haben also dieselben Nullstellen, p ist aber kein Teiler von f. Anderenfalls wäre auch x^2+2 ein Teiler von $(x+1)(x^2+1) = x^3+x^2+x+1$. Das allgemeine Horner-Schema zeigt aber, dass dies nicht der Fall ist:

	1	1	1	1
-2	0	0	-2	-2
0	0	0	0	0
	1	1	-1	-1

Also gilt $\frac{x^3+x^2+x+1}{x^2+2} = x+1-\frac{x+1}{x^2+2}$, d.h. bei der Division bleibt ein Rest.

Aufgabe 10.

a) Eine nichtganzzahlige Nullstelle muss hier geraten werden, z.B. $x = \frac{1}{2}$. Nach Abspalten des Faktors $(x - \frac{1}{2})$ verbleibt ein quadratischer Term, dessen Nullstellen $-\frac{1}{2}$ und $\frac{5}{2}$ mit p-q-Formel errechnet werden können. Weiter ist $5-2x-20x^2+8x^3 = (x-\frac{1}{2})(-10-16x+8x^2) = (x-\frac{1}{2})(x+\frac{1}{2})(8x-20) = 4(x-\frac{1}{2})(x+\frac{1}{2})(x-\frac{5}{2})$.

b) Hier erraten Sie die Nullstellen ± 1, 3 und -8 als Teiler des konstantes Gliedes 24.

c) Zuerst den Faktor $\frac{1}{4}$ abspalten und Nullstellen 3 und -5 erraten. $p(x) = 4(x^5 - x^4 - 18x^3 + 50x^2 - 47x + 15)$. Mit Polynomdivision erhält man $\frac{p(x)}{(x-3)(x+5)} = 4(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) = 4(x-1)^3$. Die letzte Umformung leiten Sie entweder aus der binomischen Formel ab, oder Sie erraten die Nullstelle $x = 1$ und spalten sie (wenigstens) einmal ab.

d) Die erste Nullstelle $x = 4$ lesen Sie direkt ab. Die anderen Nullstellen sind Lösung der quadratischen Gleichung $x^2 + \frac{3}{2}x - 7 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{4} \pm \sqrt{\frac{9}{16}+7} = -\frac{3}{4} \pm \frac{11}{4}$. Also sind die weiteren Nullstellen $x = -\frac{7}{2}$ und $x = 2$.

e) Faktorisiere x^3. Dann ist $5x^5 + 35x^4 - 40x^3 = x^3(5x^2 + 35x - 40) = 5x^3(x^2 + 7x - 8) = 5x^3(x-1)(x+8)$.

f) Durch Ausprobieren erhält man die Nullstelle $x = -7$. Nach Polynomdivision verbleibt $p(x)/(x+7) = 5 + 6x^2 + x^4$. Mit der Substitution $z = x^2$ ergibt sich der Restterm $z^2 + 6z + 5 = (z+1)(z+5)$. Also lautet die Faktorisierung $p(x) = (x+7)(x^2+1)(x^2+5)$. Weitere (reelle) Nullstellen hat p also nicht.

g) Substituieren Sie $z = x^3$. Dann verbleibt der Term $4z^2 - 104z - 108 = 4(z^2 - 26z - 27) = 4(z-27)(z+1) = 4(x^3-27)(x^3+1)$. Sie können jetzt die Nullstellen $x = 3$ und $x = -1$ erkennen. $x^3 - 27$ und $x^3 + 1$ lassen sich dann noch weiter faktorisieren: $x^3 - 1 = (x-3)\left(x^2+3x+9\right)$ und $(x^3+1) = (x+1)\left(x^2-x+1\right))$ (mit Polynomdivision).

h) Substitution von $z = x^2$ in $\frac{1}{2}x^4 - 2tx^2 + \frac{5}{2} = 0$ ergibt $\frac{1}{2}z^2 - 2tz + \frac{5}{2} = 0 \Leftrightarrow z^2 - 4tz + 5 = 0$. Diskriminante: $D = 4t^2 - 5$.

Falls $D < 0$, so hat diese Gleichung keine Lösung, damit hat auch die Ausgangsgleichung keine Lösung. Das ist der Fall für $t^2 < \frac{5}{4}$, also für $-\frac{\sqrt{5}}{2} < t < \frac{\sqrt{5}}{2}$.

Falls $D = 0$, d.h. für $t = \pm\frac{\sqrt{5}}{2}$ hat diese Gleichung genau die Lösung $z = 2t = \pm\sqrt{5}$. Im Fall $t = \frac{\sqrt{5}}{2}$ hat die Ausgangsgleichung dann die beiden Lösung $x = \pm\sqrt{\sqrt{5}} = \pm\sqrt[4]{5}$. Im Fall $t = -\frac{\sqrt{5}}{2}$ hat die Ausgangsgleichung dann keine Lösung.

Letzter Fall $D > 0 \Leftrightarrow t^2 > \frac{5}{4}$. Dann hat die Gleichung $z^2 - 4tz + 5 = 0$ die zwei Lösungen $z = 2t \pm \sqrt{4t^2 - 5}$. Jetzt muss für diese Lösungen noch die Gleichung $x^2 = z$ aufgelöst werden. Diese hat zwei Lösungen, wenn $z > 0$, sie hat eine Lösung, wenn $z = 0$ und sie hat keine Lösung, wenn $z < 0$.

- Fall 1: $t > \frac{\sqrt{5}}{2}$ und $z = 2t + \sqrt{4t^2 - 5}$. Dann ist $z > 0$ und die Ausgangsgleichung hat die zwei Lösungen $x = \pm\sqrt{2t + \sqrt{4t^2 - 5}}$
- Fall 2: $t > \frac{\sqrt{5}}{2}$ und $z = 2t - \sqrt{4t^2 - 5}$. Dann ist $z > 0 \Leftrightarrow 2t > \sqrt{4t^2 - 5} \Leftrightarrow 4t^2 > 4t^2 - 5 \Leftrightarrow 0 > -5$. Also hat auch dann die Ausgangsgleichung zwei Lösungen $x = \pm\sqrt{2t - \sqrt{4t^2 - 5}}$
- Fall 3: $t < -\frac{\sqrt{5}}{2}$ und $z = 2t + \sqrt{4t^2 - 5}$. Dann ist $z < 0 \Leftrightarrow -2t > \sqrt{4t^2 - 5} \Leftrightarrow 4t^2 > 4t^2 - 5 \Leftrightarrow 0 > -5$. Also hat die Ausgangsgleichung hat keine Lösung
- Fall 4: $t < -\frac{\sqrt{5}}{2}$ und $z = 2t - \sqrt{4t^2 - 5}$. Dann ist auch $z < 0$ und die Ausgangsgleichung hat keine Lösung.

Aufgabe 11.

Lagrange-Polynome für P, Q:

	P	Q
a)	$1 - x$	x
b)	$\frac{7-x}{4}$	$\frac{1}{4}(-3 + x)$
c)	$\frac{x}{t}$	$-\frac{-t+x}{t}$
d)	$\frac{1}{2}(1 + t - x)$	$\frac{1}{2}(1 - t + x)$
e)	$\frac{5-x}{3}$	$\frac{1}{3}(-2 + x)$

Lagrange-Polynome für P, Q, R:

	P	Q	R
a)	$\frac{1}{3}(1 - x)(3 - x)$	$\frac{1}{2}(3 - x)x$	$\frac{1}{6}(-1 + x)x$
b)	$\frac{1}{20}(7 - x)(2 + x)$	$\frac{1}{36}(-3 + x)(2 + x)$	$\frac{1}{45}(3 - x)(7 - x)$
c)	$\frac{(-1+x)x}{(-1+t)t}$	$-\frac{(1-x)(-t+x)}{t}$	$\frac{x(-t+x)}{1-t}$
d)	$\frac{1}{8}(1 + t - x)(3 + t - x)$	$\frac{1}{4}(3 + t - x)(1 - t + x)$	$\frac{1}{8}(-1 - t + x)(1 - t + x)$
e)	$\frac{1}{9}(5 - x)(1 + x)$	$\frac{1}{18}(-2 + x)(1 + x)$	$\frac{1}{18}(2 - x)(5 - x)$

Lagrange-Polynome für P, Q, R, S:

	P	Q	R	S
a)	$\frac{1}{6}(1-x)(2-x)(3-x)$	$\frac{1}{2}(2-x)(3-x)x$	$\frac{1}{6}(-2+x)(-1+x)x$	$\frac{1}{2}(3-x)(-1+x)x$
b)	$\frac{1}{120}(7-x)(2+x)(3+x)$	$\frac{1}{360}(-3+x)(2+x)(3+x)$	$\frac{1}{45}(3-x)(7-x)(3+x)$	$\frac{1}{60}(-2-x)(3-x)(7-x)$
c)	$\frac{(-1+x)x(1+x)}{(-1+t)t(1+t)}$	$-\frac{(1-x)(1+x)(-t+x)}{t}$	$\frac{x(1+x)(-t+x)}{2(1-t)}$	$-\frac{(1-x)x(-t+x)}{2(-1-t)}$
d)	$\frac{(1+t-x)(3+t-x)x}{8(-1+t)}$	$\frac{(3+t-x)x(1-t+x)}{4(1+t)}$	$\frac{x(-1-t+x)(1-t+x)}{8(3+t)}$	
e)	$\frac{1}{18}(5-x)x(1+x)$	$\frac{1}{90}(-2+x)x(1+x)$	$-\frac{1}{18}(2-x)(5-x)x$	

Setzt man die Lagrange-Polynome dann über die Funktionswerte an den vorgegebenen Punkten zusammen, so erhält man die gesuchten Polynome

	P, Q	P, Q, R	P, Q, R, S
a)	$5-3x$	$5-4x+x^2$	$5-13x+13x^2-3x^3$
b)	$\frac{19}{4}-\frac{x}{4}$	$\frac{23}{10}+\frac{11x}{12}-\frac{7x^2}{60}$	$\frac{23}{10}+\frac{11x}{12}-\frac{7x^2}{60}$
c)	$t-x$	$t-(1+t)x+x^2$	$t-x-tx^2+x^3$
d)	$\frac{3t-1}{2}-\frac{x}{2}$	$\frac{3t-1}{2}-\frac{x}{2}$	
e)	$\frac{7t-2}{3}+\frac{1-2t}{3}x$	$\frac{4+t}{9}+\frac{8t-4}{9}x+\frac{1-2t}{9}x^2$	

Beachten Sie, dass die Lagrange-Polynome zu n Punkten jeweils Polynome $n-1$-ten Grades sind, dass aber durch das Zusammenfassen gegebenenfalls auch Polynome geringeren Grades entstehen. Beispielsweise ist die quadratische Funktion in b) auch schon Lösung für die Anpassung an die vier Punkte P, Q, R, S.

Aufgabe 12.

a) $\frac{x+8}{x^2-5x-6} = \frac{x+8}{(x+1)(x-6)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-6} = \frac{A(x-6)+B(x+1)}{(x+1)(x-6)}$.

Einsetzen der eigentlich verbotenen Werte $x=-1$ und $x=6$ in den Zähler und Vergleich mit $x+8$ ergibt die beiden Gleichungen $A\cdot(-7) = 7 \Leftrightarrow A=-1$ und $B\cdot 7 = 14 \Leftrightarrow B=2$. Die Partialbruchzerlegung lautet also $\frac{x+8}{x^2-5x-6} = \frac{2}{x-6} - \frac{1}{x+1}$

b) $\frac{8x-16}{x^2-16} = \frac{8x-16}{(x-4)(x+4)} = \frac{A}{x-4} + \frac{B}{x+4} = \frac{A(x+4)+B(x-4)}{(x-4)(x+4)}$

Einsetzen der eigentlich verbotenen Werte $x=\pm 4$ in den Zähler und Vergleich mit $8x-16$ ergibt die beiden Gleichungen $8A = 16 \Leftrightarrow A = 2$ und $-8B = -48 \Leftrightarrow B = 6$. Die Partialbruchzerlegung lautet also $\frac{8x-16}{x^2-16} = \frac{2}{x-4} + \frac{6}{x+4}$

c) $\frac{2x-3t-3}{x^2-(t-3)x-3t} = \frac{2x-3t-3}{(x-t)(x+3)} = \frac{A}{x-t} + \frac{B}{x+3} = \frac{A(x+3)+B(x-t)}{(x-t)(x+3)}$

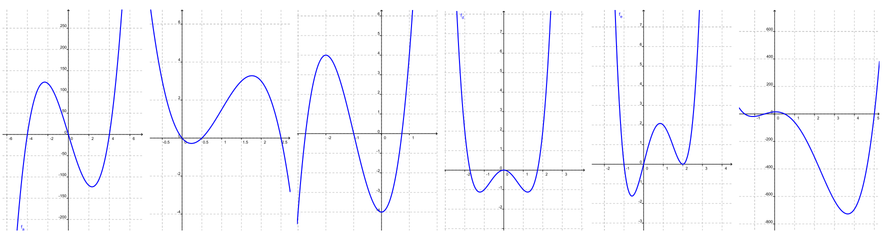
Einsetzen der eigentlich verbotenen Werte $x=t$ und $x=-3$ in den Zähler und Vergleich mit $2x-3t-3$ ergibt die beiden Gleichungen $(3+t)A = -t-3 \Leftrightarrow A=-1$ und $B(-3-t) = -3t-9 \Leftrightarrow B=3$. Die Partialbruchzerlegung lautet also: $\frac{2x-3t-3}{x^2-(t-3)x-3t} = -\frac{1}{x-t} + \frac{3}{x+3}$

d) $\frac{2x-11}{x^2-6x+9} = \frac{2x-11}{(x-3)^2} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{(x-3)^2} = \frac{A(x-3)+B}{(x-3)^2}$. Zählervergleich für $x = 0$ und $x = 3$ ergibt die Gleichungen $-3A + B = -11$ und $B = -5$, also $-3A = -6 \Leftrightarrow A = 2$. Die Partialbruchzerlegung lautet also $\frac{2x-11}{x^2-6x+9} = \frac{2}{x-3} - \frac{5}{(x-3)^2}$

e) $\frac{x^2-18x+5}{3x^3-7x^2+5x-1} = \frac{x^2-18x+5}{(3x-1)(x-1)^2} = \frac{A}{3x-1} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2}$. Als ein Bruch schreibt sich dieser Term als $\frac{A(x-1)^2+B(3x-1)(x-1)+C(3x-1)}{(3x-1)(x-1)^2}$. Zum Zählervergleich werden nun die Werte $x = \frac{1}{3}$, $x = 1$ und $x = 0$ eingesetzt. Das ergibt die drei Gleichungen $\frac{4}{9}A = -\frac{8}{9} \Leftrightarrow A = -2$ und $-12 = C \cdot 2 \Leftrightarrow C = -6$ und $5 = A + B - C \Leftrightarrow B = C + 5 - A = 1$. Die Partialbruchzerlegung lautet also $\frac{x^2-18x+5}{3x^3-7x^2+5x-1} = -\frac{2}{3x-1} + \frac{1}{x-1} - \frac{6}{(x-1)^2}$

f) Weil der Zählergrad größer oder gleich dem Nennergrad ist, muss zunächst eine Polynomdivision durchgeführt werden:
$\frac{2x^3+5x^2-9x-2}{x^2-x} = 2x + 7 - \frac{2x+2}{x^2-x} = 2x + 7 - \frac{2x+2}{x(x-1)} = 2x + 7 + \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} = 2x + 7 + \frac{A(x-1)+Bx}{x(x-1)}$. Zählervergleich für $x = 1$ und $x = 0$ ergibt $-4 = B \Leftrightarrow B = -4$ und $-2 = A \cdot (-1) \Leftrightarrow A = 2$. Die Partialbruchzerlegung lautet also $\frac{2x^3+5x^2-9x-2}{x^2-x} = 2x + 7 + \frac{2x+2}{x-x^2} = 2x + 7 + \frac{2}{x} - \frac{4}{x-1}$

Aufgabe 13.



Der Ordinatenschnittpunkt wird durch Einsetzen von $x = 0$ ausgerechnet. Die Nullstellen werden nacheinander geraten, durch Polynomdivision abgespalten und ab Grad 2 werden die Nullstellen dann mit p-q-Formel oder Vieta oder quadratischer Ergänzung bestimmt.

a) $f(x) = 5x^3 - 80x = 5x(x^2 - 16) = 5x(x - 4)(x + 4)$

b) $f(x) = -2x^3 + 6x^2 - \frac{5}{2}x = \frac{x}{2}(4x^2 + 12x - 5) = -\frac{1}{2}x\,(2x - 1)\,(2x - 5)$

c) $f(x) = 2x^3 + 6x^2 - 4 = 2\,(x + 1)\left(x^2 + 2x - 2\right) = 2(x+1)(x-\sqrt{3}+1)(x+\sqrt{3}+1)$

d) $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - \frac{3}{2}x^2 = \frac{1}{2}x^2(x^2 - 3) = \frac{1}{2}x^2(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})$

e) $f(x) = x^4 - 3x^3 + 4x = x(x^3 - 3x^2 + 4) = x\ (x + 1)\left(x^2 - 2x + 4\right) = x\ (x + 1)\,(x - 2)^2$

f) $f(x) = 8x^4 - 28x^3 - 62x^2 + 7x + 15 = (x-5)(8x^3 + 12x^2 - 2x - 3) = (x-5)(x-\frac{1}{2})(8x^2+16x+6) = (x-5)(2x-1)(4x^2+8x+3) = (x-5)(2x-1)(2x+3)(2x+1)$

Aufgabe 14.

Ansatz für die ungerade Funktion $f(x) = ax + bx^3$, Ansatz für die gerade Funktion $g(x) = a + bx^2 + cx^4$

a) Ungerade Funktion durch P, Q: $f(2) = 0$ und $f(1) = -2$, d.h.

$2a + 8b = 0$, $a + b = -2 \Leftrightarrow a = -b - 2$. Einsetzen in die erste Gleichung: $2(-b-2) + 8b = 0$, Lösung ist: $b = \frac{2}{3}$. Damit $a = -\frac{8}{3}$. Also ist $f(x) = \frac{2}{3}x - \frac{8}{3}x^3$

Gerade Funktion durch P, Q, R: $g(2) = 0$, $g(1) = -2$ und $g(-3) = 10$, d.h. $a + 4b + 16c = 0$, $a + b + c = -2$ und $a + 9b + 81c = 10$. Die zweite Gleichung wird zu $a = -b - c - 2$ umgestellt und in die erste und die dritte Gleichung eingesetzt. Das ergibt $-b - c - 2 + 4b + 16c = 0$ und $-b - c - 2 + 9b + 81c = 10$ bzw. vereinfacht $3b + 15c = 2$ und $8b + 80c = 12 \Leftrightarrow b = \frac{3}{2} - 10c$. Dies wird nun in $3b + 15c = 2$ eingesetzt: $3(\frac{3}{2} - 10c) + 15c = 2$, Lösung ist: $c = \frac{1}{6}$. Rücksubstitution: $b = \frac{3}{2} - 10 \cdot \frac{1}{6} = -\frac{1}{6}$ und $a = -b - c - 2 = \frac{1}{6} - \frac{1}{6} - 2 = -2$. Die gesuchte Funktion lautet also $g(x) = -2 - \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{6}x^4$

b) Ungerade Funktion durch P, Q: $f(2) = 0$ und $f(1) = t$, d.h. $2a + 8b = 0 \Leftrightarrow a = -4b$ und $a + b = t$, d.h. $-4b + b = t \Leftrightarrow b = -\frac{1}{3}t$. Damit ist $a = \frac{4}{3}t$. Die gesuchte Funktion lautet also $f(x) = \frac{4}{3}tx - \frac{1}{3}tx^3$

Gerade Funktion durch P, Q, R: $f(2) = 0$, $f(1) = t$ und $f(-3) = t$, d.h. $a + 4b + 16c = 0 \Leftrightarrow a = -4b - 16c$, $a + b + c = t$ und $a + 9b + 81c = t$.Setzt man die erste in die zweite und dritte Gleichung ein, so ergibt sich $-4b - 16c + b + c = t \Leftrightarrow -3b - 15c = t \Leftrightarrow b = -5c - \frac{1}{3}t$ und $-4b - 16c + 9b + 81c = t \Leftrightarrow 5b + 65c = t$. Eingesetzt erhält man $5(-5c - \frac{1}{3}t) + 65c = t$, Lösung ist: $c = \frac{1}{15}t$. Rücksubstitution $b = -5c - \frac{1}{3}t = -5(\frac{1}{15}t) - \frac{1}{3}t = -\frac{2}{3}t$ und $a = -4b - 16c = -4(-\frac{2}{3}t) - 16(\frac{1}{15}t) = \frac{8}{5}t$. Also ist $g(x) = \frac{8}{6}t - \frac{2}{3}tx^2 + \frac{1}{15}tx^4$.

Aufgabe 15.

a) Ordinatenabschnitt: $f(0) = 0$

Abszissenabschnitt(e) bekommt man durch die Nullstellen von f: $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 + x^2 - 2tx = 0 \Leftrightarrow x(x^2 + x - 2t) = 0$

Also ist auf jeden Fall $x = 0$ eine Nullstelle. Weitere Nullstellen bekommt man durch Lösen einer (parametrischen) quadratischen Gleichung: Mit $D = \frac{1}{4} + 2t$ gilt:

- $D > 0 \Leftrightarrow t > -\frac{1}{8}$: Dann hat die q.G. zwei Lösungen, nämlich $-\frac{1}{2} \pm \sqrt{2t + \frac{1}{4}}$
- $D = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{8}$: Dann hat die q.G. eine Lösung, nämlich $-\frac{1}{2}$
- $D < 0 \Leftrightarrow t < -\frac{1}{8}$: Dann hat die q.G. keine Lösung.

b) $f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^3 + x^2 - 2tx = -tx + t \Leftrightarrow x^3 + x^2 - tx - t = 0$. Eine Nullstelle errät man als $x = -1$. Der erste Schnittpunkt ist also $(-1|2t)$. Polynomdivision ergibt

$$\frac{x^3+x^2-tx-t}{x+1} = x^2 - t$$

Falls $t > 0$ so gibt es zwei weitere Nullstellen, nämlich $x = \pm\sqrt{t}$ mit den zugehörigen Schnittpunkten $(-\sqrt{t}|t(1+\sqrt{t})$ und $(\sqrt{t}|t(1-\sqrt{t})$. Falls $t = 0$, so gibt es einen weiteren Schnittpunkt, nämlich $(0|0)$. Falls $t < 0$, so gibt es keinen weiteren Schnittpunkt

Aufgabe 16.

Schreiben Sie c) als $\frac{2x}{2y-1} = \frac{x}{y-\frac{1}{2}}$, d) als $\frac{2x}{2y+1} = \frac{x}{y+\frac{1}{2}}$ und e) als $\frac{3x}{3y-1} = \frac{x}{y-\frac{1}{3}}$. Dann haben alle Ausdrücke denselben Zähler, alle Nenner und Zähler sind größer als Null, also ergibt sich die Anordnung gemäß der umgekehrten Anordnung der Nenner-Werte:

$$\frac{x}{y+1} < \frac{x}{+\frac{1}{2}} < \frac{x}{y-\frac{1}{3}} < \frac{x}{y-\frac{1}{2}} < \frac{x}{y-1}$$

Web-Service: http://www.uvk-lucius.de/terveer

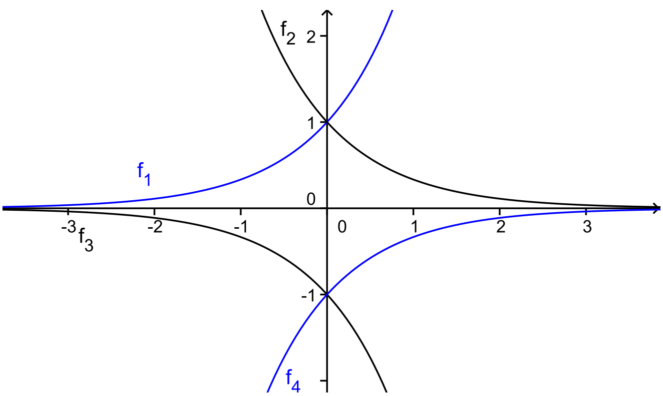
Kapitel 5

Aufgabe 1.

Die Exponentialfunktion zur Basis e ist streng monoton wachsend. Im Gegensatz hierzu ist f_1 eine streng monoton fallende Funktion. Die anderen beiden Funktionen sind ebenfalls streng monoton wachsend, wobei f_1 weniger stark und f_2 stärker ansteigt als die Exponentialfunktion. Dieses Anstiegsverhalten spiegelt sich auch in der Anordnung $\frac{1}{2} < 1 < 2 < e < 3$ wieder.

Aufgabe 2.

Das Schaubild lautet



Aufgabe 3.

a) Mit der Funktionalgleichung folgt $f(x+1) = f(x)f(1) = 2f(x)$

b) Mit der Funktionalgleichung folgt wiederum $g(x+1) = g(x)g(1) = 5g(x)$ und $h(x+1) = h(x)h(1) = 0,3h(x)$.

c) Allgemein gilt $f_a(x+1) = f_a(x)f_a(1) = af_a(x)$

Aufgabe 4.

Mit den Punkten $P(p_1|p_2)$ und $Q(q_1|q_2)$ muss jeweils gelten: $ca^{p_1} = p_2$ und $ca^{q_1} = q_2$. Es liegt also ein Gleichungssystem in zwei Unbekannten c, a vor, welches zu lösen ist.

a) $ca^1 = 6$ und $ca^0 = 2$, d.h. $c = 2$ und $2a = 6 \Leftrightarrow a = 3$

b) $ca^{\frac{1}{2}} = 1 \Leftrightarrow c^2a = 1 \Leftrightarrow a = c^{-2}$ und $ca^2 = 27$. Substitution von a ergibt $c(c^{-2})^2 = 27 \Leftrightarrow c^{-3} = 27 \Leftrightarrow c = \frac{1}{3}$.

c) $ca^2 = t$ und $ca^1 = 2$

d) $ca^s = t$ und $ca^0 = 2$

Aufgabe 5.

Mit Zinseszinsen muss sich das Endkapital als $15000 = 10000 \cdot (1 + \frac{p}{100})^5$ ergeben. Nach p aufgelöst berechnet sich daraus der Jahreszinssatz zu $p = 100(\sqrt[5]{\frac{15000}{10000}} - 1) \approx 8,45$.

Aufgabe 6.

Nutzen Sie die Ungleichung $1 + x \leq e^x$, indem Sie x durch passende Terme ersetzen:

a) Es ist $1 + 2x \leq e^{2x} = (e^2)^x = a^x$ mit $a = e^2$.

b) Es ist $1 - 2x = 1 + (-2x) \leq e^{-2x} = (e^{-2})^x = a^x$ mit $a = e^{-2}$.

Aufgabe 7.

a) $\log_3(\frac{1}{81}) = \log_3(3^{-4}) = (-4)\log_3(3) = -4$

b) $\log_2(64) = \log_2(2^6) = 6\log_2(2) = 6$

c) $\log_{0,1} 10 = \log_{0,1}(0,1^{-1}) = (-1)\log_{0,1}(0,1) = -1$

d) $\log_a(1) = 0$ für alle $a > 0$

e) $\log_9(243) = \log_9(3^5) = 5\log_9(3) = 5 \cdot \frac{1}{2}$

f) $\log_{t^3}(t^a) = \log_{t^3}(t^{3\cdot\frac{a}{3}}) = \log_{t^3}((t^3)^{\frac{a}{3}}) = \frac{a}{3}\log_{t^3}(t^3) = \frac{a}{3}$

Aufgabe 8.

Zunächst ist gemäß Rechenregel [2] des Logarithmus $\log_a(y)r = \log_a(y^r)$ und $\log_a(y)/r = \log_a(y^{1/r})$. Weiter gilt $x = \log_{a^r}(y) \Leftrightarrow (a^r)^x = y \Leftrightarrow a^{rx} = y \Leftrightarrow rx = \log_a(y) \Leftrightarrow x = \log_a(y)/r$. Also gilt $\log_{a^r}(y) = \log_a(y)/r$. Daraus folgt $\log_{a^{1/r}}(y) = \log_a(y)/(1/r) = \log_a(y)r$.

Aufgabe 9.

a) $3^x = 27 \Leftrightarrow 3^x = 3^3 \Leftrightarrow x = 3$. Die Lösung ist $x = 3 = \log_3(27)$.

b) $0,1^x = 0,0001 \Leftrightarrow 0,1^x = 0,1^4 \Leftrightarrow x = 4$. Die Lösung ist $x = 4 = \log_{0,1}(0,0001)$

c) $196^x = 14 \Leftrightarrow (14^2)^x = 14 \Leftrightarrow 14^{2x} = 14^1 \Leftrightarrow 2x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$. Die Lösung ist $x = \frac{1}{2} = \log_{196}(14)$.

d) $4^{x+7} = 256 \Leftrightarrow 4^{x+7} = 4^4 \Leftrightarrow x + 7 = 4 \Leftrightarrow x = -3$. Die Logarithmusschreibweise bekommt man z.B. durch die Umformung $4^{x+7} = 4^x 4^7$ und damit $4^x = \frac{4^4}{4^7} = 4^{-3} = \frac{1}{64} \Leftrightarrow x = \log_4(1/64)$

e) $5 \cdot 1{,}8^x = 29{,}16 \Leftrightarrow 1{,}8^x = 5{,}832 \Leftrightarrow 1{,}8^x = 1{,}8^3 \Leftrightarrow x = 3$. Die Lösung ist $x = 3 = \log_{1,8}(5{,}832)$.

Aufgabe 10.

a) Es muss gelten $\log_a(100) = 2 \Leftrightarrow a^2 = 100 \Leftrightarrow a = 10$. Die gesuchte Funktion ist $f(x) = \log_{10}(x) = \lg(x)$

b) Es muss gelten $\log_a(0{,}125) = 3 \Leftrightarrow a^3 = 0{,}125 \Leftrightarrow a = \sqrt[3]{0{,}125} = 0{,}5$. Die gesuchte Funktion ist $f(x) = \log_{0,5}(x)$.

c) Es muss gelten $\log_a(t) = t^2 \Leftrightarrow a^{t^2} = t \Leftrightarrow a = \sqrt[t^2]{t} = t^{1/t^2}$. Die gesuchte Funktion ist $f(x) = \log_{t^{1/t^2}}(x)$.

Aufgabe 11.

Man führe die jeweilige Exponentialfunktion jeweils auf e^x zurück und verwende die Ungleichung $e^x \geq 1 + x$.

a) Es ist $2^x = e^{\ln(2)x} \geq 1 + \ln(2)x$. Die Ungleichung $2^x \geq 1 + cx$ gilt also für $c = \ln(2)$.

b) $(\frac{1}{2})^x = e^{\ln(1/2)x} \geq 1 + \ln(1/2)x = 1 + (\ln(1) - \ln(2))x = 1 - \ln(2)x$. Die Ungleichung gilt also für $c = -\ln(2)$.

c) $a^x = e^{\ln(a)x} \geq 1 + \ln(a)x$. Die Ungleichung gilt also mit $c = \ln(a)$.

Aufgabe 12.

Nach x Jahren hat sich das Kapital auf $f(x) = K \cdot 1{,}025^x$ vermehrt. Wenn sich das Kapital verdoppelt hat, so gilt $2K = K \cdot 1{,}025^x$. Also (nach Division durch K) muss $1{,}025^x = 2$ gelten. Lösung ist $x = \log_{1,025}(2) = \frac{\ln(2)}{\ln(1{,}025)} = \frac{0{,}693}{0{,}0247} = 28{,}07$. Wenn man berücksichtigt, dass die Zinsen erst zum Ende eines Jahres dem Kapital zugeschlagen werden, ergibt sich, dass das Kapital nach 28 Jahren noch nicht verdoppelt ist, sondern erst am Ende des 29. Jahres.

Aufgabe 13.

a) Gesucht ist eine Cobb-Douglas-Funktion $f(x) = cx^a$ mit $c > 0$ und $a > 0$ und den Eigenschaften $f(2550) = 850$, $f(3150) = 1000$. Also gilt

$c \cdot 2550^a = 850$ und $c \cdot 3150^a = 1000$. Die Gleichungen werden jeweils nach c aufgelöst und man erhält $c = \frac{850}{2550^a} = \frac{1000}{3150^a}$. Diese letzte Gleichung wird nun nach a aufgelöst:
$\frac{850}{2550^a} = \frac{1000}{3150^a} \Leftrightarrow \frac{3150^a}{2550^a} = \frac{1000}{850} \Leftrightarrow \left(\frac{3150}{2550}\right)^x = \frac{1000}{850} \Leftrightarrow \left(\frac{21}{17}\right)^a = \frac{20}{17}$
Es ergibt sich

$a = \log_{21/17}(20/10) = \frac{\ln(20/17)}{\ln(21/17)} = \frac{\ln(20)-\ln(17)}{\ln(21)-\ln(17)} \approx 0,7691$

Diese Lösung wird zur Berechnung von c verwendet:

$c = \frac{850}{2550^a} = \frac{850}{2500^{\frac{\ln(20)-\ln(17)}{\ln(21)-\ln(17)}}} \approx 2,0391$

Die Funktion lautet also $f(x) = 2,0391 \cdot x^{0,7691}$.

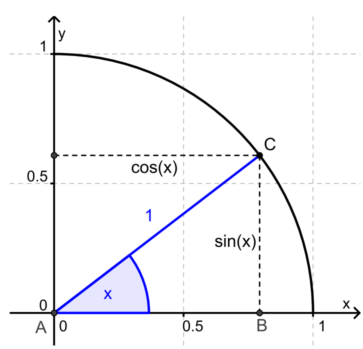
b) Zunächst muss eine lineare Funktion $f(x) = cx$ bestimmt werden, für die $f(2550) = 850$ gilt, d.h. die Gleichung $c \cdot 2550 = 850$ ist zu lösen. Es ergibt sich $c = \frac{850}{2550} = \frac{1}{3}$. Die Produktionsfunktion lautet dann $f(x) = \frac{1}{3}x$.
Bei Erhöhung des Rohstoffeinsatzes um 600 Einheiten werden dann $f(3150) = \frac{1}{3} \cdot 3150 = 1050$ Einheiten hergestellt, das sind 200 Einheiten mehr als beim genannten geringeren Rohstoffeinsatz von 2550 Einheiten.

Aufgabe 14.

Für $x = \frac{\pi}{6}$ gilt $\frac{\pi}{2} - x = \frac{\pi}{3}$ und daher $\sin(\frac{\pi}{6}) = \cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$ und $\cos(\frac{\pi}{6}) = \sin(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
Für $x = \frac{5\pi}{6}$ gilt $\frac{\pi}{2} - x = -\frac{\pi}{3}$ und daher $\sin(\frac{5\pi}{6}) = \cos(-\frac{\pi}{3}) = \cos(\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ und $\cos(\frac{5\pi}{6}) = \sin(-\frac{\pi}{3}) = -\sin(\frac{\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
Für $x = \frac{7\pi}{6}$ gilt $\frac{\pi}{2} - x = -\frac{2\pi}{3}$ und daher $\sin(\frac{7\pi}{6}) = \cos(-\frac{2\pi}{3}) = \cos(\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$ und $\cos(\frac{7\pi}{6}) = \sin(-\frac{2\pi}{3}) = -\sin(\frac{2\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
Für $x = \frac{11\pi}{6}$ gilt $\frac{\pi}{2} - x = -\frac{4\pi}{3}$ und daher $\sin(\frac{11\pi}{6}) = \cos(-\frac{4\pi}{3}) = \cos(\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2}$ und $\cos(\frac{11\pi}{6}) = \sin(-\frac{4\pi}{3}) = -\sin(\frac{4\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Aufgabe 15.

Es ist völlig ausreichend, sich die Gültigkeit des Additionstheorems für Winkel-Argumente $x \in [0; \frac{\pi}{2}[$ anhand einer Skizze im Einheitskreis zu überlegen.
Das Dreieck ΔABC ist ein rechtwinkliges Dreieck mit Hypotenusenlänge 1 (Radius des Einheitskreises) und Kathetenlängen $\sin(x)$ und $\cos(x)$ (laut Definition der beiden trigonometrischen Funktionen).



Nach dem Satz des Pythagoras gilt dann $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$.

In den anderen drei Quadranten, d.h. für $x \in [\frac{\pi}{2}; 2\pi[$ lässt sich das Additionstheorem auf genau die gleiche Weise herleiten. Für $x > 2\pi$ bzw. $x < 0$ kann man aufgrund der Periodizität der trigonometrischen Funktionen das Additionstheorem auf den Einheitskreis zurückführen.

Aufgabe 16.

a) Setzen Sie $y = \sin(x)$, so erhalten Sie die quadratische Gleichung $-y^2 + y - \frac{1}{4} = 0 \Leftrightarrow -(y - \frac{1}{2})^2 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}$. Es muss also gelten $\sin(x) = \frac{1}{2}$. Anhand der in der vorletzten Aufgabe gewonnenen Funktionswerte ⇨ vgl. S. 246 folgt $x = \frac{\pi}{6}$ oder $x = \frac{5\pi}{6}$. Weitere Lösungen hat die Gleichung nicht.

b) Die Gleichung $\sin^2(x) - \cos^2(x) = \sin(x)$ wird durch Substition der Gleichung $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1 \Leftrightarrow \cos^2(x) = 1 - \sin^2(x)$ (Additionstheorem, vgl. vorangegangene Aufgabe) zur Gleichung $2\sin^2(x) - \sin(x) - 1 = 0$. Jetzt substituiert man $y = \sin(x)$ und erhält die quadratische Gleichung $2y^2 - y - 1 = 0$. Diese hat die beiden Lösungen $y = 1$ und $y = -\frac{1}{2}$. Die Gleichung $\sin(x) = 1$ hat im Intervall $[0; 2\pi[$ nur die Lösung $x = \frac{\pi}{2}$. Die Gleichung $\sin(x) = -\frac{1}{2}$ hat im Intervall $[0; 2\pi[$ (unter Rückgriff auf die Funktionswerttabelle der vorletzten Aufgabe) genau die Lösungen $x = \frac{7\pi}{6}$ und $x = \frac{11\pi}{6}$.

c) Quadrieren Sie die Gleichung $1 - \sin(x) = \cos(x)$. Das ergibt die Gleichung $1 - 2\sin(x) + \sin^2(x) = \cos^2(x) \Leftrightarrow 1 - 2\sin(x) + \sin^2(x) = 1 - \sin^2(x) \Leftrightarrow 2\sin^2(x) - 2\sin(x) = 0 \Leftrightarrow \sin(x)(\sin(x) - 1) = 0$. Also gilt $\sin(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{0, \pi\}$ oder $\sin(x) = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}$.

Weil die Lösungen durch Quadrieren der Ausgangsgleichung gewonnen wurden, wodurch sich die Lösungsmenge einer Gleichung vergrößern kann, muss man alle drei Werte noch der Probe durch Einsetzen in die Ausgangsgleichung unterziehen.

– $1 - \sin(0) = 1 = \cos(0)$
– $1 - \sin(\pi) = 1 \neq -1 = \cos(\pi)$
– $1 - \sin(\frac{\pi}{2}) = 1 - 1 = 0 = \cos(\frac{\pi}{2})$

Also sind $x = 0$ und $x = \frac{\pi}{2}$ die einzigen Lösungen der Gleichung.

Aufgabe 17.

a) Man liest aus dem Graphen von f folgende Informationen ab:

– Wertebereich ist $[-\frac{1}{4}; \frac{3}{4}]$. Im Vergleich zu einer Sinusfunktion, die gleichen Ausschlag nach unten und oben hat, ist der Graph um $\frac{1}{4}$ nach oben verschoben worden. Es gilt also $d = \frac{1}{4}$.

- Die Amplitude a der Funktion ist die Hälfte der Intervalllänge des Wertebereichs, also $a = \frac{\frac{3}{4}-(-\frac{1}{4})}{2} = \frac{1}{2}$.
- Die Funktion ist offensichtlich π-periodisch. Es muss daher gelten: $\frac{2\pi}{b} = \pi \Leftrightarrow b = 2$.
- Gegenüber dem Graphen einer Sinusfunktion ist der vorliegende Graph um $\frac{\pi}{4}$ Einheiten nach rechts verschoben, es gilt also $c = -\frac{\pi}{4}$.

Insgesamt lautet die Funktion $f(x) = \frac{1}{2}\sin(2x - \frac{\pi}{4}) + \frac{1}{4}$.

b) Wie in der vorangegangenen Aufgabe erhält man die Parameter wie folgt:

- Um Symmetrie zur Abszisse zu erreichen, muss der Graph um 1 Einheit nach unten verschoben werden, also $d = 1$.
- Amplitude ist $a = \frac{\frac{5}{4}-\frac{3}{4}}{2} = \frac{1}{4}$.
- Die Funktion ist 2π-periodisch, es ist $b = 1$.
- Vergleicht man mit dem Ordinatendurchlauf der Cosinusfunktion, so ist der Graph der vorliegenden Funktion um $\frac{\pi}{2}$ Einheiten nach links verschoben. Es gilt also $c = \frac{\pi}{2}$.

Insgesamt lautet die Funktion $g(x) = \frac{1}{4}\cos(x + \frac{\pi}{2}) + 1$.

Aufgabe 18.

Weil $\sin(\pi) = \sin(2\pi) = 0$, ergeben sich aus den gegebenen Punkten die Gleichungen

- $a + b\frac{\pi}{2} + \sin(2\frac{\pi}{2}) = \pi \Leftrightarrow a + b\frac{\pi}{2} = \pi \Leftrightarrow a = \pi - b\frac{\pi}{2}$
- $a + b\pi + \sin(2\pi) = 4\pi \Leftrightarrow a = 4\pi - b\pi$.

Gleichsetzen über a ergibt $\pi - b\frac{\pi}{2} = 4\pi - b\pi \Leftrightarrow b\frac{\pi}{2} = 3\pi \Leftrightarrow b = 6$.

Rücksubstitution ergibt $a = 4\pi - b\pi = -2\pi$. Die Funktion lautet also $f(x) = -2\pi + 6x + \sin(2x)$.

Aufgabe 19. Bei der Modellierung ist zu beachten, dass die tatsächlich zurückgelegte Strecke immer auf volle km aufgerundet wird. Dies kann man mit der „Aufrundungsfunktion $h(x) = \lceil x \rceil$ darstellen, welche jedem $x \in \mathbb{R}$ die nächst größere ganze Zahl $\lceil x \rceil$ zuordnet.

a) Bei dem Taxitarif in Münster handelt es sich um eine lineare Kostenfunktion auf Grundlage der Aufrundungsvorschrift mit variablen (km-)Kosten 1,6 und fixien Kosten 2,5. Die Funktion ist daher $f(x) = 1,6\lceil x \rceil + 2,5$.

   Beim Taxitarif in Dortmund handelt es sich um eine zusammengesetzte Funktion. Für $x > 1$ werden $\lceil x - 1 \rceil$ Kilometer mit dem Tarif 1,45 berücksichtigt zuzüglich der Beförderungspauschale und den Kosten des ersten Kilometers. Die Kosten sind dann $g(x) = 1,45\lceil x-1\rceil + 1,75+3 = 1,45\lceil x-1\rceil + 4,75 = 1,45\lceil x\rceil + 3,3$. Diese Formel ist auch für $0 < x \leq 1$ korrekt.

b) Die Beförderung auf einer Strecke von x Kilometer ist in Münster günstiger genau dann, wenn gilt $1,6\lceil x\rceil + 2,5 < 1,45\lceil x\rceil + 3,3 \Leftrightarrow 0,15\lceil x\rceil < 0,8 \Leftrightarrow \lceil x\rceil < \frac{16}{3} \Leftrightarrow \lceil x\rceil \leq 5$ Bis fünf Kilometer ist also die Beförderung in Münster günstiger, ab fünf Kilometer ist die Beförderung in Dortmund günstiger.

Aufgabe 20.

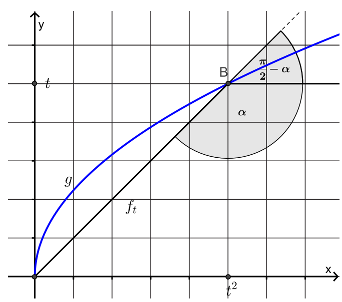
a) Falls $x > t^2$, so ist $\sqrt{x} > t = f_t(x)$.

Falls $x \leq t^2$, so ist $\sqrt{x} \leq t$, also $\frac{1}{t} \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$, also $f_t(x) = \frac{x}{t} \leq \frac{x}{\sqrt{x}} = \sqrt{x}$.

b) Für $x > t^2$ gilt $f(x) = t < \sqrt{x}$. Für $0 \leq x \leq t^2$ gilt $f(x) = \sqrt{x} \Leftrightarrow \frac{x}{t} = \sqrt{x}$. Das ist genau dann der Fall, wenn $x = 0$ oder $x \neq 0$ und (jetzt darf man durch $\sqrt{x}$ dividieren) $\frac{\sqrt{x}}{t} = 1 \Leftrightarrow x = t^2$. f_t hat also genau in $(0|0)$ und $(t^2|t)$ Schnittpunkte mit der Quadratwurzelfunktion.

c) Rechts sehen Sie eine Planskizze zur Aufgabe.

Der Winkel α zwischen den beiden Teilabschnitten beträgt laut Problemstellung $\alpha = \frac{3\pi}{4}$.
Die Steigung des linken Abschnitts der Funktion errechnet sich aus dem Tangens des Winkels im Steigungsdreieck. Dieser Winkel stimmt aber mit dem Komplementärwinkel zu α überein. Die Steigung ist also $\tan(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \tan(\frac{\pi}{4}) = 1$.



Über das Steigungsdreieck mit den Koordinaten $(0|0)$ und $(t^2|t)$ lautet die Steigung $1 = \frac{t}{t^2} = \frac{1}{t}$. Es ergibt sich $t = 1$.

Aufgabe 21.

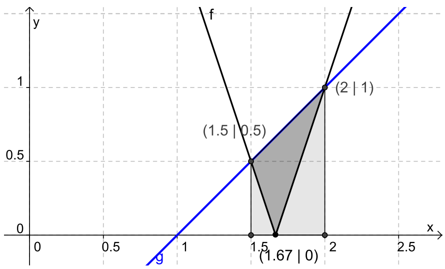
a) $f(x) = |x+3| = \begin{cases} x+3 & \text{falls } x+3 \geq 0 \\ -x-3 & \text{falls } x+3 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x+3 & \text{falls } x \geq -3 \\ -x-3 & \text{falls } x < -3 \end{cases}$

b) $g(x) = |x| + 3 = \begin{cases} x & \text{falls } x \geq 0 \\ -x & \text{falls } x < 0 \end{cases} + 3 = \begin{cases} x+3 & \text{falls } x \geq 0 \\ -x+3 & \text{falls } x < 0 \end{cases}$

c) $h(x) = |x| + x = \begin{cases} x & \text{falls } x \geq 0 \\ -x & \text{falls } x < 0 \end{cases} + x = \begin{cases} 2x & \text{falls } x \geq 0 \\ 0 & \text{falls } x < 0 \end{cases}$

Aufgabe 22.

Machen Sie sich zunächst ein Schaubild der Funktionen (z.B. mit DGS-Programm).



[1] Auflösung des Betrags: Für $x \geq 5/3$ ist $f(x) = 3x - 5$. Für $x < 5/3$ ist $f(x) = 5 - 3x$

[2] Schnittpunkte von f und g: Für den ersten Fall der Betragsauflösung: $3x - 5 = x - 1 \Leftrightarrow x = 2$ Der Schnittpunkt ist $(2|1)$. Für den zweiten Fall der Betragsauflösung $5 - 3x = x - 1 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$. Der zweite Schnittpunkt ist also $(\frac{3}{2}|\frac{1}{2})$.

[3] Die Fläche, die von g, der Abszisse und den Vertikalen durch die beiden Schnittpunkte begrenzt wird, Trapez mit dem Flächeninhalt $\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1)(2-\frac{3}{2}) = \frac{3}{8}$.

[4] Der Graph von f hat die einzige Nullstelle für $x_0 = \frac{5}{3}$.

[5] Vom Trapezinhalt sind jetzt noch die Flächeninhalte der Dreiecke $\Delta((\frac{3}{2}|0), (\frac{3}{2}|\frac{1}{2}), (\frac{5}{3}|0))$ (Wert: $\frac{1}{2}\frac{1}{2}(\frac{5}{3} - \frac{3}{2}) = \frac{1}{24}$) und $\Delta((\frac{5}{3}|0), (2|1), (2|0))$ (Wert: $\frac{1}{6}$) zu subtrahieren.

[6] Der gesuchte Flächeninhalt ist also $\frac{3}{8} - \frac{1}{24} - \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$

Aufgabe 23.

Der Nachweis kann mit Hilfe einer so genannten Wahrheitstafel erfolgen, bei der alle Kombinationen, in welcher Menge/welchen Mengen x liegt, untersucht werden. Wenn die Ausdrücke $1_A(x)1_B(x)$ und $1_{A\cap B}(x)$ in jeder Zeile der Tabelle übereinstimmen, stimmen auch die Funktionen überein:

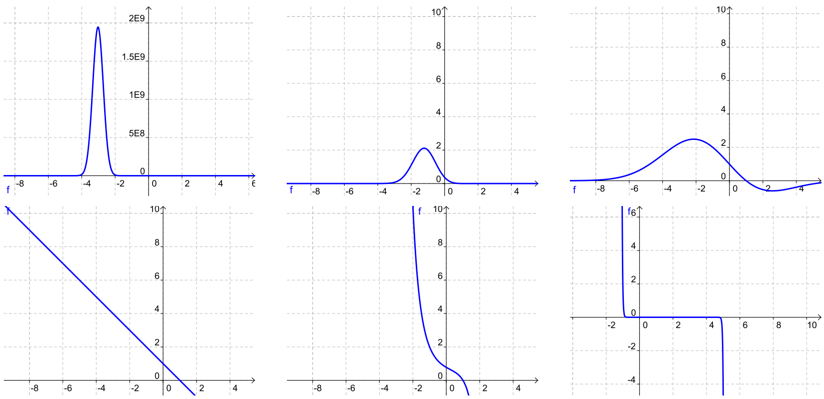
$x \in A$	$y \in B$	$1_A(x)$	$1_B(x)$	$1_A(x)1_B(x)$	$x \in A \cap B$	$1_{A\cap B}(x)$
j	j	1	1	1	j	1
j	n	1	0	0	n	0
n	j	0	1	0	n	0
n	n	0	0	0	n	0

Aufgabe 24.

a) Abszissenschnittpunkt ist jeweils $(1|0)$, denn $f_t(1) = 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$ und weitere Nullstellen hat f_t nicht.

Ordinatenschnittpunkt ist $(0|e^{-t^2})$.

b) Mit den ausgewählten Graphen wird deutlich, wie unterschiedlich die Funktionen sind, obwohl sie zur selben Funktionenschar gehören.



c) Man prüft, welche Punkte die Graphen G_0 und G_t mit $t \neq 0$ gemeinsam haben. Jeder derartige Punkt, der von t unabhängigen ist, stellt dann eine Lösung dar. Man setzt also $f_t(x) = f_0(x)$ und löst die Gleichung nach x. Wenn die Lösung von t unabhängig ist, führt dies zu einem gemeinsamen Punkt auf allen Graphen G_t. Es sei also $t \neq 0$:

$f_t(x) = f_0(x) \Leftrightarrow (1-x)e^{tx^2+t(1-t)x-t^2} = (1-x) \Leftrightarrow (1-x)(e^{tx^2+t(1-t)x-t^2} - 1) = 0$

Lösung ist also $x = 1$ (mit dem ersten von t unabhängigen Punkt $(1|0)$ bzw. jede Lösung von $e^{tx^2+t(1-t)x-t^2} - 1 = 0 \Leftrightarrow e^{tx^2+t(1-t)x-t^2} = 1 \Leftrightarrow tx^2 + t(1-t)x - t^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 + (1-t)x - t = 0$.

Die Lösungen sind $x = \frac{1-t}{2} \pm \sqrt{\frac{(1-t)^2}{4} + t} = \frac{1-t}{2} \pm \sqrt{\frac{(1+t)^2}{4}} = \frac{(1-t)\pm\sqrt{(1-t)^2}}{2} = \frac{(1-t)\pm|1+t|}{2}$.

Der Betrag im letzten Ausdruck wird je nach Vorzeichen von $(1-t)$ durch $\pm(1+t)$ ersetzt. Es ergibt sich daher $x = \frac{(1-t)\pm(1+t)}{2} \in \{-1, -t\}$. Als weiteren gemeinsamen Punkt aller Graphen findet man $(-1|2)$.

Aufgabe 25.

a) Schnittpunkte von f_t und f_{-t} werden durch Gleichsetzen der Funktionsterme und Auflösen nach x bestimmt: $f_t(x) = f_{-t}(x) \Leftrightarrow t\sin(x) - t^2 =$

$-t\sin(x) - (-t)^2 \Leftrightarrow \sin(x) = -\sin(x) \Leftrightarrow \sin(x) = 0$. Lösung sind also alle Nullstellen der Sinusfunktion, also $x = k\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$.

b) Es gilt $f_s(x) = f_t(x) \Leftrightarrow s\sin(x) - s^2 = t\sin(x) - t^2 \Leftrightarrow (s-t)\sin(x) = s^2 - t^2 = (s-t)(s+t)$. Weil $s \neq t$, darf man durch $(s-t)$ dividieren und es ergibt sich $y = \sin(x) = s + t$

Aufgabe 26.

Sie können die Kontrollergebnisse verwenden, um wie in der früheren Aufgabe zur Darstellung der Schnittmengen-Indikatorfunktion jeweils eine Wahrheitstabelle aufzustellen. In den letzten beiden Teilaufgaben sollten Sie aber auch versuchen, diese Regeln durch Umformungen herzuleiten:

a)

$x \in A$	$1 - 1_A(x)$	$1_{A^c}(x)$
ja	0	0
n	1	1

b)

$x \in A$	$x \in B$	$x \in A \cup B$	$1_A(x)$	$1_B(x)$	$\max(1_A(x), 1_B(x))$ bzw. $1_A(x) + 1_B(x) - 1_A(x)1_B(x)$	$1_{A\cup B}(x)$
ja	ja	ja	1	1	1	1
ja	n	ja	1	0	1	1
n	ja	ja	0	1	1	1
n	n	n	0	0	0	0

c) Mit den bisher ermittelten Rechenregeln gilt $1_{A\setminus B}(x) = 1_{A\cap B^c}(x) = 1_A(x)1_{B^c}(x) = 1_A(x)(1 - 1_B(x)) = 1_A(x) - 1_A(x)1_B(x)$.

d) $1_{A\Delta B}(x) = 1_{(A\cup B)\setminus(A\cap B)}(x) = 1_{A\cup B}(x)(1 - 1_A(x)1_B(x)) = (1_A(x) + 1_B(x) - 1_A(x)1_B(x))(1 - 1_A(x)1_B(x))$. Wenn man jetzt die Klammern ausmultipliziert und dabei berücksichtigt, dass $1_A(x)^2 = 1_A(x)$ und $1_B(x)^2 = 1_B(x)$, so ergibt sich der Ausdruck.

$1_A(x) + 1_B(x) - 1_A(x)1_B(x) - 1_A(x)1_B(x) - 1_B(x)1_A(x) + 1_A(x)1_B(x) = 1_A(x) + 1_B(x) - 2 \cdot 1_A(c)1_B(x)$

Kapitel 6

Aufgabe 1.

	a_n	b_n	$\frac{a_n+b_n}{2}$	$\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right)^k$	$b_n - a_n$
1	1	2	$\frac{3}{2}$	3.375	1
2	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{4}$	1.95313	$\frac{1}{2}$
3	$\frac{5}{4}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{11}{8}$	2.59961	$\frac{1}{4}$
4	$\frac{5}{4}$	$\frac{11}{8}$	$\frac{21}{16}$	2.26099	$\frac{1}{8}$
5	$\frac{5}{4}$	$\frac{21}{16}$	$\frac{41}{32}$	2.1033	$\frac{1}{16}$
6	$\frac{5}{4}$	$\frac{41}{32}$	$\frac{81}{64}$	2.02729	$\frac{1}{32}$
7	$\frac{5}{4}$	$\frac{81}{64}$	$\frac{161}{128}$	1.98998	$\frac{1}{64}$
8	$\frac{161}{128}$	$\frac{81}{64}$	$\frac{323}{256}$	2.00857	$\frac{1}{128}$

Aufgabe 2.

a) Es sei $I =]a;b[$ ein Intervall mit $0 \in I$ (d.h. es gilt $a < 0 < b$). Es ist zu begründen, dass $(\frac{1}{2})^n \notin I$ für höchstens endlich viele $n \in \mathbb{N}$ gilt. Weil das Intervall dabei klein sein soll, dürfen Sie ohne weiteres annehmen, dass $b < 1$.

Dann ist $(\frac{1}{2})^n \in I \Leftrightarrow a < (\frac{1}{2})^n < b \Leftrightarrow (\frac{1}{2})^n < b \Leftrightarrow n > \log_{\frac{1}{2}}(b) = \frac{\ln(b)}{\ln(\frac{1}{2})} = \frac{\ln(1/b)}{\ln(2)}$

Also liegt $(\frac{1}{2})^n$ in I genau dann, wenn $n > \frac{\ln(1/b)}{\ln(2)}$. Das ist also nur für höchstens endlich viele Werte von n nicht der Fall.

b) Wie in der vorangegangenen Teilaufgabe prüft man die Ungleichung $p^n < b \Leftrightarrow \ln(p^n) < \ln(b) \Leftrightarrow n\ln(p) < \ln(b)$. Diese Ungleichung löst sich nur für $0 < p < 1$ in der richtigen Form $n > \frac{\ln(b)}{\ln(p)}$ auf. Für $p < 1$ ist $n \mapsto p^n$ also eine gegen Null konvergente Folge.

Aufgabe 3.

a) Weil 1 keine Nullstelle des Nenner ist, darf man den Grenzwert hier durch Einsetzen ermitteln: $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x+3}{x-2} = \frac{3}{-2} = -\frac{3}{2}$

b) Für $x \neq 2$ gilt (Polynomdivision) $\frac{x^3-8}{x-2} = x^2 + 2x + 4$. Der Grenzwert darf in dieser Form durch Einsetzen berechnet werden:
$\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^3-8}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2}(x^2 + 2x + 4) = 12$

c) Der angegebene Bruch kann im Zähler und im Nenner mit Linearfaktoren dargestellt werden:

$\frac{x^2+(t-2)x-2t}{x^2+x-12} = \frac{(x-2)(x+t)}{(x-3)(x+4)}$

Für $t = -3$ kann man den Bruch kürzen und der Grenzwert kann durch Einsetzen ermittelt werden: $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x-2}{x+4} = \frac{1}{7}$

Für $t \neq -3$ liegt in $x = 3$ eine Polstelle mit Vorzeichenwechsel vor, der Grenzwert existiert also nicht.

$\lim\limits_{x\to 3} \frac{x^2+(t-2)x-2t}{x^2+x-12}$

d) Falls $s \neq 0$, so liegt keine Nullstelle des Nenners vor, der Grenzwert ergibt sich durch Einsetzen als 0. Falls $s = 0$, so faktorisiert der Bruch für $x \neq 0$ zu $\frac{x^2+x}{x^2+rx} = \frac{x(x+1)}{x(x+r)} = \frac{x+1}{x+r}$. Falls nun $r = 0$, so liegt eine Polstelle mit Vorzeichenwechsel vor, der Grenzwert existiert nicht. Falls aber $r \neq 0$, wird der Nenner beim Grenzübergang nicht Null, daher errechnet sich der Grenzwert durch Einsetzen von $x = 0$ zu $\frac{1}{r}$.

e) Der Bruch wird umgeschrieben. Für $x \neq 0$ gilt

$\frac{e^x-e^{2x}}{e^x-1} = \frac{e^x-(e^x)^2}{e^x-1} = \frac{e^x(1-e^x)}{e^x-1} = -e^x.$

Hier kann man zur Grenzwertbestimmung $x = 0$ einsetzen, es ergibt sich der Grenzwert -1.

Aufgabe 4.

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3x^2+7}{-x+2} = -\infty$, denn Zählergrad ist größer als Nennergrad und Quotient der Leitkoeffizienten ist negativ.

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^7-1}{2x^7-x^6+x-1} = \frac{1}{7}$, denn Zählergrad ist gleich Nennergrad und der Grenzwert ist Quotient der Leitkoeffizienten.

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x+1}{x^4+2} = 0$, denn Zählergrad ist kleiner als Nennergrad.

d) Es muss nach den möglichen Werten für r, t unterschieden werden:

– Fall $r \neq 0, rt \geq 0$: Zählergrad größer als der Nennergrad, der Grenzwert ist also ∞
– Fall $r \neq 0, rt < 0$: Zählergrad größer als der Nennergrad, der Grenzwert ist also $-\infty$
– Fall $r = 0, st \neq 0$: Zählergrad gleich Nennergrad, der Grenzwert ist $\frac{s}{t}$
– Fall $r = 0, s = 0, t = 0$: Zählergrad 1, Nennergrad 0, Grenzwert ist ∞;
– Fall $r = 0, s = 0, t \neq 0$: Zählergrad 1, Nennergrad 3, Grenzwert ist 0;
– Fall $r = 0, s > 0, t = 0$: Zählergrad 2, Nennergrad 0, Grenzwert ∞;
– Fall $r = 0, s < 0, t = 0$: Zählergrad 2, Nennergrad 0, Grenzwert $-\infty$

e) $\frac{4e^{nx}-2e^{x}+5}{3e^{2x}-2} = \frac{4(e^{-x})^{n-2}e^{-x}-2(e^{-x})^{2}}{3-x(e^{-x})^{2}}$

Für $n > 2$ ist der Grenzwert ∞. Für $n = 2$ ist der Grenzwert 4. Für $n = 1$ ist der Grenzwert 0.

Aufgabe 5.

Es wird jeweils eine Polynomdivision durchgeführt. Der ganzrationale Teil stellt die Asymptote dar.

Zur vorletzten Aufgabe:

a) $\frac{x+3}{x-2} = 1 + \frac{5}{x-2}$

b) $\frac{x^3-8}{x-2} = x^2 + 2x + 4$

c) $\frac{x^2+(t-2)x-2t}{x^2+x-12} = 1 + \frac{(t-3)x+12-2t}{x^2+x-12}$

d) $\frac{x^2+x}{x^2+rx+s} = 1 + \frac{(1-r)x+s}{x^2+rx-s}$

e) ist keine gebrochen-rationale Funktion

Zur letzten Aufgabe:

a) $\frac{3x^2+7}{-x+2} = -3x - 6 + \frac{19}{-x+2}$

b) $\frac{x^7-1}{2x^7-x^6+x-1} = \frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{2}x^6-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}}{2x^7-x^6+x-1}$

c) $\frac{x+1}{x^4+2}$ hat Zählergrad < Nennergrad. Asymptote ist dann Null.

d) Für $t = 0$ ist der Nenner konstant, es liegt also bereits eine ganz-rationale Funktion vor, die dann auch ihre eigene Asymptote ist. Für $t \neq 0$ betrachtet man folgende Fälle:

- Für $r \neq 0$ ist $\frac{rx^3+sx^2+x-2}{tx^2+2} = \frac{r}{t}x + \frac{s}{t} + \frac{+\left(1-\frac{2r}{t}\right)x-2-\frac{2s}{t}}{tx^2+2}$.
- Für $r = 0, s \neq 0$ ist $\frac{sx^2+x-2}{tx^2+2} = \frac{s}{t} + \frac{x-2-\frac{2s}{t}}{tx^2+2}$
- Für $r = 0, s = 0$ ist $\frac{x-2}{tx^2+2} = 0 + \frac{x-2}{tx^2+2}$ bereits das Ergebnis der Polynomdivision.

e) Hier liegt keine gebrochen-rationale Funktion vor.

Aufgabe 6.

Es ist jeweils die stetige Ergänzbarkeit in den Nullstellen des Nennerpolynoms zu prüfen. Dazu sind Zähler- und Nennerpolynom zunächst zu faktorisieren:

a) Für $x \neq 5$ ist $f(x) = \frac{x^2-25}{x-5} = \frac{(x-5)(x+5)}{x-5)} = x+5$. Für $x = 5$ ist also $x + 5 = 10$ die stetige Ergänzung.

b) Es ist $f(x) = \frac{x^3+x^2-x-1}{x^2+2x+1} = \frac{(x+1)^2(x-1)}{(x+1)^2} = x - 1$, falls $x \neq 1$. Für $x = -1$ ist also $x - 1 = -2$ die stetige Ergänzung.

c) $f(x) = \frac{3x^3+3x^2-3x+3}{x^2+2x+1} = \frac{3(x+1)(x^2+1)}{(x+1)^2} = \frac{3(x^2+1)}{x+1}$ für $x \neq -1$. Hier ist keine stetige Ergänzung möglich.

d) $f(x) = \frac{+x^3+2x^2-24x}{+x^3+(2t-3)x^2-6tx} = \frac{3x(x-8)}{x(x-2)(x+2t)}$. Stetige Ergänzung ist in $x = 0$, $x = 2$ und $x = -2t$ zu prüfen.

- Prüfung für $x = 0$:
  Falls $t \neq 0$, so ist für $x \neq 0$ der Ausdruck gleich $\frac{3(x-8)}{(x-2)(x+2t)}$. Der Ausdruck ist für $x = 0$ dann stetig ergänzbar zu $\frac{-24}{-2(2t)} = \frac{6}{t}$.
  Falls $t = 0$, so ist für $x \neq 0$ der Ausdruck gleich $\frac{3(x-8)}{x(x-2)}$ und somit in $x = 0$ nicht stetig ergänzbar.
- Prüfung für $x = 2$: Der Ausdruck ist nicht stetig ergänzbar.
- Prüfung für $x = -2t$: Falls $t = -4$ (Ergänzung in $x = 8$) so ist der Ausdruck für $x \neq 8$ gleich $\frac{3x}{x-2}$ und damit stetig ergänzbar zu $\frac{24}{6} = 4$.
  Falls $t \neq -4$, ist der Ausdruck nicht stetig ergänzbar.

Aufgabe 7.

$\sqrt[3]{2}$ ist Nullstelle der Funktion $f(x) = x^3 - 2$. Hierfür wird die Regula falsi ausgeführt:

	a_n	b_n	$x_n = a_n - f(a_n)\frac{b_n - a_n}{f(b_n)-f(a_n)}$	$f(x_n)$	$b_n - a_n$
1	1.0000000	2.0000000	1.1428571	−0.50728863	1.0000000
2	1.1428571	2.0000000	1.2096774	−0.22985549	0.85714286
3	1.2096774	2.0000000	1.2388370	−0.098735647	0.79032258
4	1.2388370	2.0000000	1.2511599	−0.041433057	0.76116300
5	1.2511599	2.0000000	1.2562955	−0.017215830	0.74884013
6	1.2562955	2.0000000	1.2584233	−0.0071239280	0.74370447
7	1.2584233	2.0000000	1.2593028	−0.0029428600	0.74157666
8	1.2593028	2.0000000	1.2596659	−0.0012148235	0.74069722

Aufgabe 8.

Bei allen Grenzwertübergängen darf man davon ausgehen, dass $x \neq 0$ und x so nahe bei 0 liegt, dass $x > -1$.

a) Für alle $x \neq 0$ ist $e^x \geq 1 + x \Leftrightarrow (e^x)^{\frac{1}{x}} \geq (1+x)^{\frac{1}{x}} \Leftrightarrow e \geq (1+x)^{\frac{1}{x}}$. Für alle $x > -1$ gilt weiter $e^{-\frac{x}{x+1}} \geq 1 - \frac{x}{x+1} = \frac{1}{x+1}$. Daraus folgt $1 + x \geq e^{\frac{x}{x+1}} \Leftrightarrow e \leq (1+x)^{\frac{1+x}{x}} = (1+x)(1+x)^{\frac{1}{x}}$. Das bedeutet $(1+x)^{\frac{1}{x}} \geq \frac{e}{1+x}$. Insgesamt bekommt man die Abschätzung $\frac{e}{1+x} \leq (1+x)^{\frac{1}{x}} \leq e$, womit man den gesuchten Grenzwertübergang erhält.

b) Weil der Logarithmus eine stetige Funktion ist, so ist auch die Verkettung $x \mapsto \ln((1+x)^{\frac{1}{x}})$ eine stetige Funktion, und der Grenzwert für $x \to 0$ ergibt sich nach Satz 6.10 ⇨ vgl. S. 143 als
$\lim\limits_{x\to 0} \ln((1+x)^{\frac{1}{x}}) = \ln(\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}) = \ln(e) = 1.$

Mit der Logarithmusregel [2] folgt zudem $\ln((1+x)^{\frac{1}{x}}) = \frac{1}{x}\ln(1+x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$, woraus sich der Grenzwert $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\ln((1+x)^{\frac{1}{x}}) = 1$ ergibt.

Web-Service: http://www.uvk-lucius.de/terveer

Kapitel 7

Aufgabe 1.

Die gesuchte Tangente läuft durch den Punkt $(2|\frac{1}{2})$, sie hat also die Form $g(x) = m(x-2)+\frac{1}{2}$. Ihre Steigung m ist so zu bestimmen, dass f und g genau einen gemeinsamen Punkt haben. Also werden die Terme gleich gesetzt und die Gleichung nach x gelöst bzw. ein Kriterium gesucht, dass diese Gleichung genau eine Lösung hat.

$f(x) = g(x) \Leftrightarrow \frac{1}{x} = m(x-2)+\frac{1}{2} \Leftrightarrow mx(x-2)+\frac{1}{2}x = 1 \Leftrightarrow mx^2-(2m-\frac{1}{2})x = 1 \Leftrightarrow x^2 - \frac{2m-\frac{1}{2}}{m}x = \frac{1}{m}$

Diese quadratische Gleichung ist genau dann eindeutig lösbar, wenn ihre Diskriminante D gleich Null ist, also für $0 = D = \frac{1}{m}+\frac{(2m-\frac{1}{2})^2}{(2m)^2} = \frac{4m+(2m-\frac{1}{2})^2}{4m^2} = \frac{4m+4m^2-2m+\frac{1}{4}}{4m^2} = \frac{4m^2+2m+\frac{1}{4}}{4m^2} = \frac{m^2+\frac{1}{2}m+\frac{1}{16}}{m^2} = \frac{(m+\frac{1}{4})^2}{m^2}$. Die Diskriminante wird genau für $m = -\frac{1}{4}$ Null.

Die gesuchte Tangente ist also $g(x) = -\frac{1}{4}(x-2)+\frac{1}{2} = -\frac{1}{4}x+1$

Aufgabe 2.

Für $x \neq x_0$ ist $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{ax+b-(ax_0+b)}{x-x_0} = \frac{ax-ax_0}{x-x0} = \frac{a(x-x_0)}{x-x_0} = a$.

Der Wert ist also unabhängig von x. Also gilt $f'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = a$.

Aufgabe 3.

Die Funktion ist in $x = 1$ differenzierbar genau dann, wenn sich für den Differenzenquotienten linksseitig und rechtsseitig derselbe Grenzwert ergibt.

Für $x \geq 1$ lautet in $x_0 = 1$ der Differenzenquotient: $\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{tx+(1-t)-1}{x-1} = \frac{tx-t}{x-1} = t$. Der Grenzwert für $x \to 1$ muss also t sein.

Für $x < 1$ lautet in $x_0 = 1$ der Differenzenquotient $\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x+1$. Der Grenzwert für $x \to 1$ muss also $1+1 = 2$ sein.

Insgesamt ergibt sich nur dann ein (einheitlicher) Grenzwert, wenn $t = 2$.

Aufgabe 4.

a) $\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{\frac{h}{h^2+1}-0}{h} = \frac{\frac{h}{h^2+1}}{h} = \frac{1}{h^2+1}$. Der Grenzwert ist 1.

b) $\frac{f(-2+h)-f(-2)}{h} = \frac{\frac{-2+h+1}{-2+h-2}-\frac{-2+1}{-2-2}}{h} = \frac{\frac{h-1}{h-4}-\frac{1}{4}}{h} = \frac{3h}{4h(h-4)} = \frac{3}{4(h-4)}$. Grenzwert für $h \to 0$ ist $-\frac{3}{16}$.

c) $\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{\sqrt{1+h}-1}{h} = \frac{(\sqrt{1+h}-1)(\sqrt{1+h}+1)}{h(\sqrt{1+h}+1)} = \frac{1+h-1}{h(\sqrt{1+h}+1)} = \frac{1}{\sqrt{1+h}+1}$.
Grenzwert ist $\frac{1}{2}$. Für allgemeines $x > 0$ ist
$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} = \frac{(\sqrt{x+h}-\sqrt{x})(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} = \frac{h}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} = \frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}$.
Grenzwert für $h \to 0$ ist dann $\frac{1}{2\sqrt{x}}$

d) $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\frac{x+h}{x+h+1}-\frac{x}{x+1}}{h} = \frac{(x+h)(x+1)-x(x+h+1)}{h(x+1)(x+h+1)} = \frac{x^2+hx+x+h-x^2-hx-x}{h(x+1)(x+h+1)} = \frac{1}{(x+1)(x+h+1)}$. Grenzwert für $h \to 0$ ist $\frac{1}{(x+1)^2}$.

Aufgabe 5.

a) $\frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \frac{4(2+h)^3-(2+h)^2-(4\cdot 2^3-2^2)}{h} = \frac{32+48h+24h^2+h^3-4-4h-h^2-32+4}{h} = 44+23h+h^2$. Also $f'(2) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = 44$.

Zudem ist $f(2) = 28$. Die Tangentengleichung lautet daher $g(x) = 44(x-2)+28 = 44x-60$.

b) $\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{\frac{1+h}{1+(1+h)^2}-\frac{1}{2}}{h} = \frac{2(1+h)-(1+(1+h)^2)}{2h(1+(1+h)^2)} = \frac{2+2h-1-1-2h-h^2}{2h(1+(1+h)^2)} = \frac{h}{2(1+(1+h)^2)}$. Also $f'(1) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = 0$.

Die Tangentengleichung ist also $g(x) = f(1) = \frac{1}{2}$.

c) $\frac{f(\ln 2+h)-f(\ln 2)}{h} = \frac{e^{\ln 2+h}-e^{\ln 2}}{h} = e^{\ln 2}\frac{e^h-1}{h}$. Also ist der Grenzwert $f'(\ln 2) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(\ln 2+h)-f(\ln 2)}{h} = e^{\ln 2} = 2$. Die Tangentengleichung ist also $g(x) = 2(x-\ln(2))+2 = 2x+2-2\ln 2 = 2x+2-\ln 4$

Aufgabe 6.

Zunächst ist für $x \in]x_1; x_2[$ die Funktion f differenzierbar mit $f'(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$ (vgl. die Lösung zur vorletzten Aufgabe). Es ist nun jeweils der Differenzenquotient $m = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ zu berechnen und dann eine Stelle $x \in]x_1; x_2[$ zu finden, für die $f'(x) = \frac{1}{(1+x)^2} = m$.

a) $m = \frac{\frac{2}{3}-\frac{1}{2}}{2-1} = \frac{1}{6}$. Damit ist $\frac{1}{(1+x)^2)} = \frac{1}{6} \Leftrightarrow (x+1)^2 = 6 \Leftrightarrow x = -1\pm\sqrt{6}$. Da der gesuchte Wert zwischen 1 und 2 liegen soll, folgt $x = \sqrt{6}-1 \approx 1,449$.

b) $m = \frac{\frac{1+t}{1+t+1} - \frac{1}{2}}{1+t-1} = \frac{1}{2(t+2)}$. Damit ist $\frac{1}{(1+x)^2} = \frac{1}{2(t+2)} \Leftrightarrow (x+1)^2 = 2(t+2) \Leftrightarrow$ $x = -1 \pm \sqrt{2t+4}$. Da der gesuchte Wert zwischen 1 und $1+t$ liegen soll, bleibt nur der Wert $x = \sqrt{2t+4} - 1$.

Aufgabe 7.

Wenn die Funktion f konstant ist, so ist $f'(x) = 0$ für alle $x \in]a;b[$, denn schon alle Differenzenquotienten $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ sind Null.

Wenn umgekehrt die Ableitungsfunktion f' die Nullfunktion ist, so gibt es für beliebige $x_1, x_2 \in]a;b[$ mit $x_1 < x_2$ nach dem Mittelwertsatz ein $x_0 \in]x_1;x_2[$, so dass $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1)} = f'(x_0)$. Weil aber $f'(x_0) = 0$, folgt $f(x_1) - f(x_2) = 0$. Die Funktion ist also konstant.

Aufgabe 8.

Bereits in einer früheren Aufgabe wurde berechnet, dass $f'(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$. Es wird nun die zweite Ableitung mit dem Differenzenquotienten auf Basis von $f'(x)$ mit der h-Methode bestimmt.

$$\begin{aligned} \frac{\frac{1}{(1+x+h)^2} - \frac{1}{(1+x)^2}}{h} &= \frac{(1+x)^2-(1+x+h)^2}{h(1+x)^2(1+x+h)^2} \\ &= \frac{(1+x)^2-(1+x)^2-2h(1+x)-h^2}{h(1+x)^2(1+x+h)^2} = \frac{-2(1+x)-h}{(1+x)^2(1+x+h)^2} \end{aligned}$$

Der Grenzwertübergang $h \to 0$ darf nunmehr durch Einsetzen von $h = 0$ bewerkstelligt werden. Das ergibt die zweite Ableitung $f''(x) = \frac{-2(1+x)}{(1+x)^4} = -\frac{2}{(1+x)^3}$.

Aufgabe 9.

a) $f'(x) = 4x^2 - 3$,

$f''(x) = 8x$

b)
$$\begin{aligned} f'(x) &= 2(2(x+1)^2-5)(4(x+1)) = 8(x+1)(2x^2+4x-3)\ , \\ &= 8(2x^3+4x^2-3x+2x^2+4x-3) \\ &= 8(2x^3+6x^2+x-3) \end{aligned}$$

$f''(x) = 8(6x^2+12x+1)$

c) $f'(x) = anx^{n-1} - (a-1)(n-1)x^{n-2} = x^{n-2}(anx - (a-1)(n-1)))$

$$\begin{aligned} f''(x) &= an(n-1)x^{n-2} - (a-1)(n-1)(n-2)x^{n-3} \\ &= (n-1)x^{n-3}(anx - (a-1)(n-2)) \end{aligned}$$

d) $f'(x) = \frac{(3x^2(x-1)-(x^3-1)}{(x-1)^2} = \frac{2x^3-3x^2+1}{(x-1)^2}$

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{(6x^2-6x)(x-1)^2-(2x^3-3x^2+1)}{(x-1)^4} = \frac{(6x^2-6x)(x-1)-(2x^3-3x^2+1)}{(x-1)^3} \\ &= \frac{2(x^3-3x^2+3x-1)}{(x-1)^3} = 2 \quad \text{(binomische Formel)} \end{aligned}$$

Danach lässt sich vermuten, dass man auch $f'(x)$ vereinfachen kann. In der Tat ergibt sich durch Polynomdivision $f'(x) = 2x+1$. Auch $f(x)$ lässt sich schon (durch Polynomdivision) vereinfachen zu $f(x) = x^2 + x + 1$ und dann sind die Ableitungen sehr einfach zu berechnen.

e) $f'(x) = nx^{n-1}e^x + x^n e^x = x^{n-1}e^x(x+n)$

$$\begin{aligned} f''(x) &= (n(n-1)x^{n-2}e^x + nx^{n-1}e^x) + (nx^{n-1}e^x + x^n e^x) \\ &= x^{n-2}e^x(x^2 + 2nx + n(n-1)) \end{aligned}$$

f) $f'(x) = e^{a\ln(x)}\frac{a}{x} = a^x\frac{a}{x} = ax^{a-1}$

Mit Anwendung dieser Ableitungsformel auf x^{a-1} erhält man $f''(x) = a(a-1)x^{a-2}$

g) $f'(x) = e^{x\ln(x)}(\ln(x) + x\cdot\frac{1}{x}) = x^x(\ln(x)+1)$

$f''(x) = (x^x(\ln(x)+1))(\ln(x)+1) + x^x\cdot\frac{1}{x} = x^x((\ln(x)+1)^2 + \frac{1}{x})$

h)
$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos(x)\cos(x)^2 + \sin(x)2\cos(x)(-\sin(x)) \\ &= \cos(x)^3 - 2\cos(x)\sin^2(x) \\ &= \cos(x)^3 - 2\cos(x)(1-\cos(x)^2) \\ &= 3\cos(x)^3 - 2\cos(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= 9\cos(x)^2(-\sin(x)) + 2\sin(x) \\ &= 9(1-\sin(x)^2)(-\sin(x)) + 2\sin(x) \\ &= 9\sin(x)^3 - 7\sin(x) \end{aligned}$$

i)
$$\begin{aligned} f'(x) &= (a-1)x^{a-2}e^{-x} + x^{a-1}(-e^{-x}) \\ &= (a-1)x^{a-2}e^{-x} - x^{a-1}e^{-x} \\ &= x^{a-2}e^{-x}(a-1-x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= (a-1)(a-2)x^{a-3}e^{-x} - (a-1)x^{a-2}e^{-x} \\ &\quad -((a-1)x^{a-2}e^{-x} - x^{a-1}e^{-x}) \\ &= x^{a-3}e^{-x}((a-1)(a-2) - 2(a-1)x + x^2) \end{aligned}$$

j) $f'(x) = \frac{\frac{1}{2}(x+3)^{-\frac{1}{2}}x - (x+3)^{\frac{1}{2}}}{x^2} = \frac{1}{2}(x+3)^{-\frac{1}{2}}\frac{x-2(x+3)}{x^2} = -\frac{1}{2}(x+3)^{\frac{1}{2}}\frac{x+6}{x^2}$

$$\begin{aligned} f''(x) &= \tfrac{1}{4}(x+3)^{-\frac{3}{2}}\tfrac{x+6}{x^2} - \tfrac{1}{2}(x+3)^{\frac{1}{2}}\tfrac{x^2-2x(x+6)}{x^4} \\ &= \tfrac{1}{4}(x+3)^{-\frac{3}{2}}\tfrac{x+6}{x^2} + \tfrac{1}{2}(x+3)^{-\frac{1}{2}}\tfrac{x+12}{x^3} \\ &= \tfrac{1}{4}(x+3)^{-\frac{3}{2}}\tfrac{x(x+6)+2(x+3)(x+12}{x^3} \\ &= \tfrac{3}{4}(x+3)^{-\frac{3}{2}}\tfrac{x^2+12x+24}{x^3} \end{aligned}$$

k) $f'(x) = e^{-x^3}(-3x^2)$

$f''(x) = e^{-x^3}(-3x^2)(-3x^2) + e^{-x^3}(-6x) = e^{-x^3}(9x^4 - 6x)$

l) $f'(x) = e^{1-e^{-x}}(e^{-x}) = e^{1-x-e^{-x}}$

$f''(x) = e^{1-x-e^{-x}}(e^{-x} - 1)$

m) $f'(x) = \frac{e^x x - e^x}{x^2} = e^x \frac{x-1}{x^2}$

$$\begin{aligned} f''(x) &= e^x \tfrac{x-1}{x^2} + e^x \tfrac{x^2-(x-1)2x}{x^4} \\ &= e^x \tfrac{x-1}{x^2} + e^x \tfrac{2-x}{x^3} \\ &= e^x \tfrac{x(x-1)+2-x}{x^3} \\ &= e^x \tfrac{x^2-3x+2}{x} \end{aligned}$$

n) $f'(x) = -\frac{1}{(1+e^{-x})^2}(-e^{-x}) = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}$

$$\begin{aligned} f''(x) &= \tfrac{-e^{-x}(1+e^{-x})^2 - e^{-x}2(1+e^{-x})(-e^{-x})}{(1+e^{-x})^4} \\ &= \tfrac{-e^{-x}(1+e^{-x})+2(e^{-x})^2}{(1+e^{-x})^3} \\ &= \tfrac{(e^{-x})^2 - e^{-x}}{(1+e^{-x})^3} \\ &= \tfrac{e^{-x}(e^{-x}-1)}{(1+e^{-x})^3} \end{aligned}$$

o) $f'(x) = \frac{1}{x^2+1}(2x) = \frac{2x}{x^2+1}$

$f''(x) = \frac{2(x^2+1)-2x(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$

p) $f(x) = \ln((xr^2)(xs^2)) = \ln(r^2 s^2 x^2)$

$f'(x) = \frac{1}{r^2 s^2 x^2} 2r^2 s^2 x = \frac{2r^2 s^2 x}{r^2 s^2 x^2} = \frac{2}{x}$

$f''(x) = -\frac{2}{x^2}$

Aufgabe 10.

a) $f(x) = g(x) = x$, $f(x)/g(x) = 1$ hat Ableitung 0, aber der Quotient der Ableitungen $f'(x) = g'(x) = 1$ ist 1

b) $f(x) = x, g(x) = x^2$, dann $f(g(x)) = x^2$ hat Ableitung $2x$, aber $f'(x) = 1$, also auch $f'(g'(x)) = 1$.

Aufgabe 11.

a) Die Aussage ist falsch: $f(x) = 0$, $g(x) = 1$ haben die gleiche Ableitung, sind aber verschieden. Richtig wäre, dass die Funktionen bis auf eine additive Konstante übereinstimmen.

b) Die Aussage ist richtig.

Wenn f ein Polynom ist, so ist auch f' ein Polynom, wie bei der Summenregel erläutert wurde.

Wenn f' ein Polynom ist, etwa $f'(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, so ist $p(x) = \frac{a_n}{n+1}x^{n+1} + \frac{a_{n-1}}{n}x^n + \cdots \frac{a_1}{2}x^2 + \frac{a_0}{x}$ ein Polynom, dessen Ableitung mit $f'(x)$ übereinstimmt. Also ist $f'(x) - p'(x) = 0$. Das bedeutet (vgl. Aufgabe 7 des vorangegangenen Abschnitts), dass $f(x) - p(x)$ konstant ist. Dann muss auch $f(x)$ ein Polynom sein.

c) Die Aussage ist falsch, beispielsweise hat die Logarithmusfunktion $f(x) = \ln(x)$ die Ableitung $f'(x) = \frac{1}{x}$. Der Logarithmus ist aber keine gebrochen-rationale Funktion.

d) Die Aussage ist richtig: Wenn q ein Teiler von p ist, so ist $f(x) = p(x)/q(x)$ ein Polynom, dann ist auch die Ableitung $f'(x)$ ein Polynom. Wenn umgekeht $f'(x)$ ein Polynom ist, so auch $f(x)$ (siehe vorletzte Teilaufgabe). Das bedeutet aber, dass $q(x)$ ein Teiler von $p(x)$ ist.

Aufgabe 12.

In allen Fällen wird beim Grenzübergang $x \to x_0$ der Zähler und der Nenner gleichzeitig Null. Wenn die Grenzwerte der Quotienten von Zähler- und Nennerableitung existieren, so stimmen diese mit dem gesuchten Grenzwert überein.

a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos(x)}{1} = \cos(0) = 1$

b) $\lim\limits_{x\to \pi} \frac{\cos(x)+1}{\sin(x)} = \lim\limits_{x\to \pi} \frac{-\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{-\sin(0)}{\cos(0)} = 0$

c) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln(2x^2-1)}{\ln(3x^2+2x-4)} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{\frac{4x}{2x^2-1}}{\frac{6x+2}{3x^2+2x-4}} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{4x(3x^2+2x-4)}{(2x^2-1)(6x+2)} = \frac{4\cdot(3+2-4)}{(2-1)(6+2)} = \frac{1}{2}$

d) todo

Aufgabe 13.

Es gilt $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1})(x)} = \frac{1}{\cos(f^{-1}(x))} = \frac{1}{\sqrt{1-(\sin(f^{-1}(x)))^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, wobei im vorletzten Schritt das Additionstheorem $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ ausgenutzt wurde, vgl. Aufgabe 15 ⇨ vgl. S. 121. Die Arcussinusfunktion hat also – überraschenderweise – eine verhältnismäßig einfache Ableitung.

Aufgabe 14.

Man berechnet eine Nullstelle der Funktion $f(x) = x^2 - 2$. Mit dem Startwert $x_0 = 2$ gilt:

	x	$f(x)$	$f'(x)$	$y = x - f(x)/f'(x)$
1	2	2	4	$\frac{3}{2}$
2	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{4}$	3	$\frac{17}{12}$
3	$\frac{17}{12}$	$\frac{1}{144}$	$\frac{17}{6}$	$\frac{577}{408}$

Der nach drei Schritten gewonnene Wert $x_4 = \frac{577}{408} \approx 1,4142$ ist bereits so genau wie die mit dem Intervallhalbierungsverfahren bzw. der Regula falsi erst nach etwa 8 Schritten gefundenen Näherungen.

Aufgabe 15.

[1] Definitionsbereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$.

[2] Symmetrieverhalten: f ist weder gerade noch ungerade.

[3] Ableitungen: $f'(x) =) - 6x^2 + 6x - 1$, $f''(x) = -12x + 6$, $f'''(x) = -12$

[4] Randverhalten: Als Polynom dritten Grades mit negativem Leitkoeffizienten Funktionsgrenzwerte $f(x) \to \infty$ für $x \to -\infty$ und $f(x) \to -\infty$ für $x \to \infty$. f hat keine lineare Asymptote.

[5] Polstellen: keine

[6] Nullstellen von f: $f(x) = x(-2x^2 + 3x - 1)$. Also $f(x) = 0$ für $x = 0$ und für Lösung von $-2x^2 + 3x - 1 = 0$. Diese quadratische Gleichung hat die Lösungen $x = \frac{1}{2}$ und $x = 1$.

[7] Nullstellen von f' und Monotonieverhalten: $f'(x) = -6x^2 + 6x - 1 = -6(x^2 - x + \frac{1}{6})$ hat Nullstellen $x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{6}} = \frac{-1 \pm \sqrt{1/3}}{2}$. Da die Ableitung eine nach unten geöffnete Parabel ist, liegt um die Nullstellen folgendes Vorzeichenverhalten von f' vor: $-/+/-$. Die Funktion f ist also links von der kleinsten Nullstelle $\frac{-1-\sqrt{1/3}}{2}$ und rechts von der größten Nullstelle $\frac{-1+\sqrt{1/3}}{2}$ streng monoton fallend und dazwischen streng monoton wachsend.

[8] Nullstellen von f'' und Krümmungsverhalten: $f''(x)$ verschwindet genau für $x = \frac{1}{2}$. Das Vorzeichenwechselverhalten von f'' an dieser Stelle ist $+/-$. Links von $\frac{1}{2}$ ist f konvex , rechts von $\frac{1}{2}$ konkav.

[9] Lokale und globale Extrema:

$f'(\frac{-1-\sqrt{1/3}}{2}) = 0$ und $f''(\frac{-1-\sqrt{1/3}}{2}) > 0$, also lokales Minimum in $x = \frac{-1-\sqrt{1/3}}{2}$.

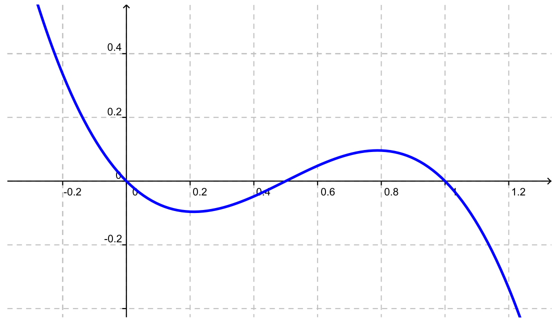
$f'(\frac{-1+\sqrt{1/3}}{2}) = 0$ und $f''(\frac{-1+\sqrt{1/3}}{2}) < 0$, also lokales Maximum in $x = \frac{-1-\sqrt{1/3}}{2}$.

Globale Extrema hat f aufgrund seines Randverhaltens nicht.

[10] Wendestellen: $f''(\frac{1}{2}) = 0$ und $f'''(\frac{1}{2}) \neq 0$, also Wendestelle (mit Wechsel von Links- nach Rechtskrümmung, s.o.) in $x = \frac{1}{2}$

[11] Wertetabelle und Graph:

x	$f(x)$
$-0,2$	$0,336$
$-0,1$	$0,132$
0	0
$0,211325$	$-0,096225$
$0,4$	$-0,048$
$0,5$	0
$0,6$	$0,048$
$0,788675$	$0,096225$
1	0
$1,2$	$-0,336$



Aufgabe 16.

[1] Definitionsbereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$

[2] Symmetrieverhalten: f ist achsensymmetrisch

[3] Ableitungen:

$$f'(x) = -2xe^{-x^2},\ f''(x) = 2e^{-x^2}\left(2x^2-1\right),\ f'''(x) = -4e^{-x^2}x\left(2x^2-3\right)$$

[4] Randverhalten: $f(x) \to 0$ für $x \to \pm\infty$

[5] Polstellen: keine

[6] Nullstellen von f: keine, weil die Exponentialfunktion keine Nullstellen hat.

[7] Nullstellen von f' und Monotonieverhalten: $x = 0$. Vorzeichenwechselverhalten von f' um die Nullstelle gemäß Vorzeichenwechselverhalten von $-x$: $+/-$. Für $x \le 0$ ist f streng monoton wachsend, für $x \ge 0$ ist f streng monoton fallend.

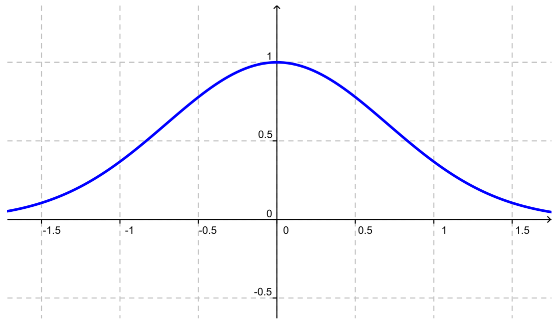
[8] Nullstellen von f'' und Krümmungsverhalten: $f''(x) = 0$ für $x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$. Vorzeichenwechselverhalten von f'' um die Nullstellen gemäß Vorzeichenwechselverhalten von $2x^2 - 1$: $+/-/+$. f ist also in $[-\sqrt{\frac{1}{2}}; \sqrt{\frac{1}{2}}]$ konkav und links sowie rechts dieses Intervalls konvex.

[9] Lokale und globale Extrema: $f'(0) = 0$, $f''(0) = -2 < 0$. In $x = 0$ liegt das einzige lokale Extremum (Maximum) vor, welches schon ein globales Maximum ist (Randverhalten s.o.)

[10] Wendestellen: $f'(\pm\sqrt{\frac{1}{2}}) = 0$ $f''(\pm\sqrt{\frac{1}{2}} \neq 0$, also liegt jeweils Wendestelle vor. Wechsel der Krümmung an diesen Stellen s.o.

[11] Wertetabelle und Graph:

x	$f(x)$
0	1
$0,1$	$0,99005$
$0,2$	$0,960789$
$0,4$	$0,852144$
$0,6$	$0,697676$
$0,707107$	$0,606531$
$0,8$	$0,527292$
1	$0,367879$
$1,25$	$0,209611$
$1,5$	$0,105399$



Aufgabe 17.

[1] Definitionsbereich: stimmt mit Definitionsbereich des Logarithmus überein: $\mathbb{D} =]0; \infty[$.

[2] Symmetrieverhalten: aufgrund des Definitionsbereiches: keine Symmetrieeigenschaften

[3] Ableitungen: $f'(x) = -\frac{\ln(x)-1}{x^2}$, $f''(x) = \frac{2\ln(x)-3}{x^3}$, $f'''(x) = -\frac{6\ln(x)-11}{x^4}$

[4] Randverhalten: Für $x \to 0$ folgt $f(x) \to -\infty$ aus dem Randverhalten von $\ln(x)$ und $\frac{1}{x}$. Für $x \to \infty$ kann man mit der Regel von L'Hospital schließen: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$.

[5] Polstellen: keine

[6] Nullstellen von f: sind Nullstellen des Logarithmus, also nur $x = 1$.

[7] Nullstellen von f' und Monotonieverhalten: gemäß Darstellung oben $f'(x) = 0$ für $x = e$ mit Vorzeichenwechselverhalten $+/-$. f ist also für $x \leq e$ streng monoton wachsend und für $x \geq e$ streng monoton fallend.

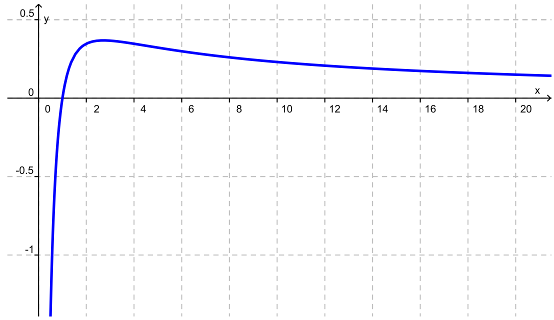
[8] Nullstellen von f'' und Krümmungsverhalten: gemäß Darstellung oben $f''(x) = 0$ für $x = e^{\frac{3}{2}}$ mit Vorzeichenwechselverhalten $-/+$. f ist also für $x \leq e^{\frac{3}{2}}$ konkav und für $x > e^{\frac{3}{2}}$ konvex.

[9] Lokale und globale Extrema: gemäß Monotonieverhalten liegt ein lokales und globales Maximum in $x = e$ vor.

[10] Wendestellen: Gemäß Krümmungsverhalten liegt eine Wendestelle mit Rechts-Links-Krümmungswechsel in $x = e^{\frac{3}{2}}$ vor.

[11] Wertetabelle und Graph:

x	$f(x)$
$0,1$	$-23,0259$
$0,2$	$-8,04719$
$0,5$	$-1,38629$
$0,8$	$-0,278929$
1	0
$1,25$	$0,178515$
$1,5$	$0,27031$
$2,71828$	$0,367879$
$4,48169$	$0,334695$
10	$0,230259$



Aufgabe 18.

[1] Definitionsbereich: Weil $a > 0$ ist, hat der Nenner keine Nullstelle, daher ist der (maximale) Definitionsbereich $\mathbb{D} = \mathbb{R}$.

[2] Symmetrieverhalten: Die Funktion ist weder achsen- noch punktsymmetrisch, denn weder die Gleichung $f_(x) = f_a(-x)$ noch die Gleichung $f_a(-x) = -f_a(x)$ ist jeweils für alle x gültig.

Für die Funktion f_1 lässt sich allerdings nachrechnen, dass sie symmetrisch zum Punkt $P(0|\frac{1}{2})$ ist (vgl. auch Aufgabe 6 aus Kapitel 4 ⇨ vgl. S. 75), denn $g(x) = f(x) - \frac{1}{2} = \frac{e^x-1}{2(e^x+1)}$ ist eine ungerade Funktion: $g(-x) = \frac{e^{-x}-1}{2(e^{-x}+1)} = \frac{e^x(e^{-x}-1)}{e^x 2(e^{-x}+1)} = \frac{1-e^x}{2(1+e^x)} = -g(x)$.

Aus der Umformung $f_a(x) = \frac{ae^x}{1+ae^x} = \frac{e^{x+\ln(a)}}{1+e^{x+\ln(a)}} = f_1(x+\ln(a))$ ergibt sich dann: f_a ist eine zum Punkt $P(-\ln(a)|\frac{1}{2})$ symmetrische Funktion.

[3] Ableitungen:

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{ae^x(1+ae^x)-ae^x(ae^x)}{(1+ae^x)^2} \\
&= \frac{ae^x}{(1+ae^x)^2} \\
f''(x) &= \frac{ae^x(1+ae^x)^2-ae^x 2(1+ae^x)ae^x}{(1+ae^x)^4} \\
&= \frac{ae^x(1+ae^x)-2a^2e^{2x}}{(1+ae^x)^3} \\
&= \frac{ae^x-a^2e^{2x}}{(1+ae^x)^3} \\
&= \frac{ae^x(1-ae^x)}{(1+ae^x)^3} \\
f'''(x) &= \frac{(ae^x-2a^2e^{2x})(1+ae^x)^3-(ae^x-a^2e^{2x})3(a+ae^x)^2ae^x}{(1+ae^x)^6} \\
&= \frac{(ae^x-2a^2e^{2x})(1+ae^x)-3(ae^x-a^2e^{2x})ae^x}{(1+ae^x)^4} \\
&= \frac{ae^x-2a^2e^{2x}+a^2e^{2x}-2a^3e^{3x}-3a^2e^{2x}+3a^3e^{3x}}{(1+ae^x)^4} \\
&= \frac{ae^x(1-4ae^x+a^2e^{2x})}{(1+ae^x)^4}
\end{aligned}
$$

[4] Randverhalten: Es ist $f_a = g_a \circ \exp$ mit $g_a(x) = \frac{ax}{1+ax}$. Da $\lim\limits_{x\to\infty} e^x = \infty$ und $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$, stimmen die Grenzwerte $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f_a(x)$ mit den

Grenzwerten $\lim\limits_{x\to\infty} g_a(x)$ bzw. $\lim\limits_{x\to 0} g_a(x)$ überein. Für $a > 0$ ist g_a eine gebrochen-rationale Funktion mit $\lim\limits_{x\to\infty} g_a(x) = 1$ und $\lim\limits_{x\to 0} g_a(x) = 0$. Daraus ergeben sich die Grenzwerte $\lim\limits_{x\to\infty} f_a(x) = 1$ und $\lim\limits_{x\to -\infty} f_a(x) = 0$.

[5] Polstellen: Da f_a keine Definitionslücken hat, liegen auch keine Polstellen vor.

[6] Nullstellen von f_a: Die Funktion hat keine Nullstellen, denn die Exponentialfunktion im Zähler ist nullstellenfrei.

[7] Nullstellen von f_a' und Monotonieverhalten von f_a: Auch f_a' hat keine Nullstellen, es gilt stets $f_a'(x) > 0$. Also ist f_a streng monoton wachsend.

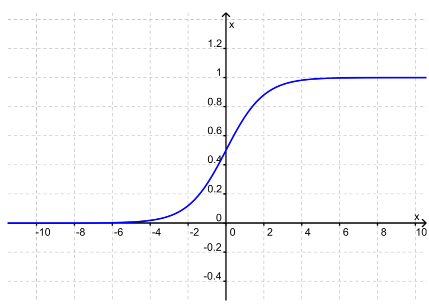
[8] Nullstellen von f_a'' und Krümmungsverhalten von f_a: Nullstellen von f_a'' ergeben sich aus der Gleichung $1 - ae^x = 0 \Leftrightarrow ae^x = 1 \Leftrightarrow x = -\ln(a)$. Auch das Vorzeichen von $f_a''(x)$ stimmt mit dem Vorzeichen von $1 - ae^x$ überein. Für $x < -\ln(a)$ ist also $f_a''(x) > 0$, für $x > -\ln(a)$ ist $f_a''(x) < 0$, also ist f_a auf $]-\infty; -\ln(a)]$ streng konvex, auf $[-\ln(a); \infty[$ streng konkav.

[9] Lokale und globale Extrema: Aufgrund der strengen Monotonie von f_a hat die Funktion weder lokale noch globale Extrema.

[10] Wendestellen: Für $x = -\ln(a)$ liegt eine Wendestelle mit Wechsel von Links- zu Rechtskrümmung vor.

[11] Wertetabelle und Graph: Da $f_a(x) = f_1(x + \ln(a))$, ist das Werteverhalten von f_1 exemplarisch für das Werteverhalten jeder andern Funktion f_a. Es reicht also, eine Wertetabelle für f_1 anzugeben:

x	$f_1(x)$
0	$0,5$
$0,1$	$0,524979$
$0,2$	$0,549834$
$0,5$	$0,622459$
$0,8$	$0,689974$
1	$0,731059$
$1,25$	$0,7773$
$1,5$	$0,817574$
10	$0,999955$



Abschließende Bemerkung: Für $a = 1$ ist f die Umkehrfunktion der sogenannten Logit-Transformation $x \mapsto \ln(\frac{x}{1-x})$. Mit dieser Funktion lässt sich in der Statistik jede Wahrscheinlichkeit aus dem Intervall $]0; 1[$ einer Zahl aus $\mathbb{R}$ zuordnen und umgekehrt; man macht sie Wahrscheinlichkeiten so statistischen Techniken zugänglich, welche die Beschränkung auf $]0; 1[$ nicht vertragen (z.B. Regressionsrechnungen). Die Ergebnis der Analyse logit-transformierter Wahrscheinlichkeiten bzw. Häufigkeiten werden anschließend mit Hilfe der Funktion f wieder nach $]0;1[$ zurücktransformiert und dort interpretiert.

Aufgabe 19.

Diese eigentlich harmlos anmutende Schar gebrochen-rationaler Funktionen hat es in sich, denn je nach Wert von a haben die f_a recht unterschiedliche Eigenschaften. Mit Hilfe einer dynamischen Geometrie-Software sieht man sehr schön, wie die Polstelle von f_a „durchgereicht wird“ und die verschiedenen Ausprägungen von f_a erzeugt. Die Rechnungen sind wegen der vielen verschiedenen Fälle dementsprechend ziemlich umfangreich, wenn auch meist nicht schwierig:

[1] Definitionsbereich: Die Nullstellen des Nennerpolynoms sind Definitionslücken, d.h. $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{a\}$.

[2] Symmetrieverhalten: Aufgrund der (für $a \neq 0$ nicht hebbaren, s.u.) Definitionslücke a liegt weder Achsen- noch Punktsymmetrie im strengen Sinne vor. Wenn man allerdings den Begriff der Punktsymmetrie geeignet auf Funktionen mit Definitionslücke überträgt, so lässt sich (nur!) für die Funktion f_{-1} nachrechnen, dass sie symmetrisch zum Punkt $P(-1|-2)$ ist (vgl. auch Aufgabe 6 aus Kapitel 4 ⇨ vgl. S. 75), denn $g(x) = f_{-1}(x-1) + 2 = \frac{(x-1)^3+(x-1)^2}{(x+1)^2} + 2 = \frac{1+x^2}{x}$ ist eine zu $(0|0)$ punktsymmetrische Funktion.

[3] Ableitungen:
$$\begin{aligned}
f_a'(x) &= \frac{(3x^2+2x)(x-a)^2-(x^3+x^2)2(x-a)}{(x-a)^4}\\
&= \frac{(3x^2+2x)(x-a)-2(x^3+x^2)}{(x-a)^3}\\
&= \frac{3x^3+2x^2-3ax^2-2ax-2x^3-2x^2}{(x-a)^3}\\
&= \frac{x^3-3ax^2-2ax}{(x-a)^3}\\
&= \frac{x(x^2-3ax-2a)}{(x-a)^3}\\
f_a''(x) &= \frac{(3x^2-6ax-2a)(x-a)^3-(x^3-3ax^2-2ax)3(x-a)^2}{(x-a)^6}\\
&= \frac{(3x^2-6ax-2a)(x-a)-3(x^3-3ax^2-2ax)}{(x-a)^4}\\
&= \frac{3x^3-6ax^2-2ax-3ax^2+6a^2x+2a^2-3x^3+9ax^2+6ax}{(x-a)^4}\\
&= \frac{(6a^2+4a)x+2a^2}{(x-a)^4}\\
f_a'''(x) &= \frac{(6a^2+4a)(x-a)^4-((6a^2+4a)x+2a^2)4(x-a)^3}{(x-a)^8}\\
&= \frac{(6a^2+4a)(x-a)-((24a^2+16a)x+8a^2)}{(x-a)^5}\\
&= \frac{(6a^2+4a)x-6a^3-4a^2-(24a^2+16a)x-8a^2}{(x-a)^5}\\
&= \frac{(-18a^2-12a)x-6a^3-12a^2}{(x-a)^5}
\end{aligned}$$

[4] Randverhalten: $f_a(x) = \frac{x^3+x^2}{x^2-2ax+a^2}$ ist eine gebrochen-rationale Funktion, deren Zählergrad um 1 höher als der Nennergrad ist. f_a hat eine lineare Asymptote, die durch Polynomdivision erhalten wird. Das zugehörige Horner-Schema lautet:

	1	1	0	0
$-a^2$	0	0	$-a^2$	$-a^2-2a^3$
$2a$	0	$2a$	$2a+4a^2$	0
	1	$1+2a$	$2a+3a^2$	$-a^2-2a^3$

Es ist also $f_a(x) = x + 2a + 1 + \frac{(3a^2+2a)x-2a^3-a^2}{(x-a)^2}$, und die Asymptote lautet $g_a(x) = x + 2a$, sie hat das gleiche Grenzwertverhalten wie f_a. Es gilt also $\lim\limits_{x\to\infty} f_a(x) = \infty$ und $\lim\limits_{x\to-\infty} f_a(x) = -\infty$.

[5] Polstellen: Nur die Definitionslücke $x_p = a$ ist eine Polstelle von $f_a(x) = \frac{x^2(x+1)}{(x-a)^2}$. Für $a \notin \{0, -1\}$ liegt jeweils eine Polstelle ohne Vorzeichenwechsel vor. Für $a = 0$ ist die Nullstellenordnung von $x = 0$ im Zähler 2 und im Nenner ebenfalls 2. Die Polstelle ist dann hebbar. Durch Kürzen ergibt sich die stetige Fortsetzung $f_0(x) = x + 1$. Für $a = -1$. ist die Nullstellenordnung von $x = -1$ im Zähler 1 und im Nenner 2. Es liegt dann eine Polstelle mit Vorzeichenwechsel vor.

[6] Nullstellen von f_a: Diese sind Nullstellen des Zählerpolynoms x^3+x^2, also die Stellen $x = 0$ und $x = -1$. Funktionen f_a für $a = 0$ und $a = -1$ stellen dabei Sonderfälle dar. Für $a = -1$ lautet die (gekürzte) Darstellung $f_{-1}(x) = \frac{x^2}{x+1}$ und hat nur die Nullstelle $x = 0$. Für $a = 0$ lautet die stetige Fortsetzung $f_0(x) = x + 1$ und hat nur die Nullstelle $x = -1$.

[7] Nullstellen von f_a' und Monotonieverhalten von f_a: Nullstellen von f_a' ergeben sich aus den Nullstellen des Zählerpolynoms von f_a' d.h. aus $x(x^2 - 3ax - 2a) = 0$. Sie sind also $x_0 = 0$ und die Nullstellen von $x^2 - 3ax - 2a$, also $x_1 = \frac{3a-\sqrt{9a^2+8a}}{2}$ und $x_2 = \frac{3a+\sqrt{9a^2+8a}}{2}$, wobei die tatsächliche Anzahl der Lösungen von a abhängt (s.u.). Die erste Ableitung hat mit diesen Nullstellen die faktorisierte Darstellung $f_a'(x) = \frac{x(x-x_1)(x-x_2)}{(x-a)^2}$.

Zusammen mit der Polstelle $x_p = a$ zerlegen die Stellen $x_0 = 0$, x_1 und x_2 den Definitionsbereich in Intervalle mit einheitlichem Monotonieverhalten. Es ist noch zu beachten, dass

- für $a = 0$ und $a = -\frac{8}{9}$ die beiden Nullstellen x_1 und x_2 zusammenfallen, für $a = 0$ zudem noch mit der hebbaren Definitionslücke $x_p = 0$,

- für $a = -1$ die Nullstelle $x_2 = -1$ mit der Polstelle $x_p = -1$ von f_{-1} zusammenfällt,
- für $a \in]-\frac{8}{9}; 0[$ nur $x = 0$ eine Nullstelle des Zählers ist.

Die Intervallzerlegung beginnt bei $-\infty$ und endet bei $+\infty$ jeweils mit einem uneigentlichen Intervall. In diesen beiden Intervallen ist f_a streng monoton wachsend, die Funktion „erbt" in diesen Randintervallen das Monotonieverhalten der Asymptote $g_a(x) = x + 2a + 1$.

Bei aneinander angrenzenden Teilintervallen wechselt das Monotonieverhalten, wenn die Intervallgrenze als Nullstelle der Ableitung eine ungerade Ordnung hat und es verändert sich nicht, wenn die Nullstelle der Ableitung eine gerade Ordnung hat.

Mit diesen Überlegungen lässt sich nun das Monotonieverhalten zusammenfassend für verschiedene Werte von a in sieben Fällen beschreiben: Sofern nicht ausdrücklich anders dargestellt, sind alle auftretenden Nullstellen von f'_a hier einfach, führen also zu einem Wechsel im Monotonieverhalten.

[a] Fall $a < -1$: Die Nullstellen von f'_a liegen hier wie folgt: $-\infty < x_1 < x_p < x_2 < x_0 < \infty$.

Links von der Polstelle ist f_a auf $]-\infty; x_1]$ streng monoton wachsend und auf $[x_1; x_p[$ streng monoton fallend.

Rechts von der Polstelle ist f_a auf $]x_p; x_2]$ streng monoton wachsend, auf $[x_2; x_0]$ streng monoton fallend und auf $[x_0; \infty[$ streng monoton wachsend.

[b] Fall $a = -1$: Die Nullstellen von f'_{-1} liegen hier wie folgt: $-\infty < x_1 < x_p < x_0 < \infty$.

Links von der Polstelle ist f_{-1} auf $]-\infty; x_1]$ streng monoton wachsend und auf $[x_1; x_p[$ streng monoton fallend.

Rechts von der Polstelle ist f_a auf $]x_p; x_0]$ streng monoton fallend und auf $[x_0; \infty[$ streng monoton wachsend.

[c] Fall $-1 < a < -\frac{8}{9}$: Die Nullstellen von f'_a liegen hier wie folgt: $-\infty < x_1 < x_2 < x_p < x_0 < \infty$.

Links von der Polstelle ist f_a auf $]-\infty; x_1]$ streng monoton wachsend, auf $[x_1; x_2]$ streng monoton fallend und auf $[x_2; x_p[$ streng monoton wachsend.

Rechts von der Polstelle ist f_a auf $]x_p; x_0]$ streng monoton fallend und auf $[x_0; \infty[$ streng monoton wachsend.

[d] Fall $a = -\frac{8}{9}$: Die Nullstellen von $f_{-\frac{8}{9}}$ liegen hier wie folgt: $-\infty < x_1 = x_2 < x_p < x_0 < \infty$. $x_1 = x_2 = -\frac{4}{3}$ ist eine doppelte Nullstelle von f'_a, in der sich das Monotonieverhalten nicht ändert.

Links von der Polstelle ist f_a auf $]-\infty; x_p]$ streng monoton wachsend.

Rechts von der Polstelle ist f_a auf $]x_p; x_0]$ streng monoton fallend und auf $[x_0; \infty[$ streng monoton wachsend.

[e] Fall $-\frac{8}{9} < a < 0$: Die Nullstellen von f_a liegen hier wie folgt: $-\infty < x_p < x_0 < \infty$.

Links von der Polstelle ist f_a auf $]-\infty; x_p]$ streng monoton wachsend.

Rechts von der Polstelle ist f_a auf $]x_p; x_0]$ streng monoton fallend und auf $[x_0; \infty[$ streng monoton wachsend.

[f] Fall $a = 0$: $f_0(x) = x + 1$ ist streng monoton wachsend.

[g] Fall $a > 0$: Die Nullstellen von f_a liegen hier wie folgt: $-\infty < x_1 < x_0 < x_p < x_2 < \infty$.

Links von der Polstelle ist f_a auf $]-\infty; x_1]$ streng monoton wachsend, auf $[x_1; x_0]$ streng monoton fallend und auf $[x_0; x_p[$ streng monoton wachsend.

Rechts von der Polstelle ist f_a auf $]x_p; x_2]$ streng monoton fallend und auf $[x_2; \infty[$ streng monoton wachsend.

[8] Nullstellen von f''_a und Krümmungsverhalten: Nullstellen von $f''_a(x) = \frac{(6a^2+4a)x+2a^2}{(x-a)^4}$ sind Nullstellen des Zählers von $f''_a(x)$ d.h. Lösungen von $(6a^2 + 4a)x + 2a^2 = 0 \Leftrightarrow 2a((3a + 2)x + a) = 0$. Falls $a = 0$, so ist $f''_a(x) = 0$, wir hatten bereits gesehen, dass in diesem Fall $f_0(x) = x + 1$ eine lineare Funktion ist. Falls $a = -\frac{2}{3}$, so hat $f''_{-\frac{2}{3}}$ keine Nullstelle. In allen anderen Fällen ergibt sich die Nullstelle $x_3 = -\frac{a}{3a+2} \neq a = x_p$ und f''_a hat die Faktorisierung $f''_a(x) = \frac{(2a(3a+2))(x+\frac{a}{3a+2})}{(x-a)^4}$.

Der Faktor $6a^2 + 4a = 2a(3a + 2)$ legt das Vorzeichenwechselverhalten des Zählers von f''_a und damit das Vorzeichenwechselverhalten von f''_a fest. Der genannte Faktor ist positiv für $a < -\frac{2}{3}$ und $a > 0$ sowie negativ für $-\frac{2}{3} < a < 0$. Damit erhält man das Krümmungsverhalten von f_a aus dem Vorzeichenwechselverhalten von f''_a wie folgt:

[a] Für $a < -\frac{2}{3}$ ist $-\infty < -\frac{a}{3a+2} < a < \infty$. Der Faktor $6a^2 + 4a = 2a(3a + 2)$ ist positiv, die zweite Ableitung hat in x_3 also einen Vorzeichenwechsel von $-$ nach $+$.

Also ist $f_a''(x) < 0$ für alle $x \in]-\infty; x_3[$ und > 0 auf $]x_3; \infty[$. Auf $]-\infty; x_p$ ist $f_a''(x) > 0$. Die Funktion f_a ist daher auf $]-\infty; x_3]$ streng konkav und auf $[x_3; x_p[$ sowie auf $]x_p; \infty[$ streng konvex

[b] Für $a = -\frac{2}{3}$ hat $f''_{-\frac{2}{3}}(x) = \frac{\frac{8}{9}}{(x+\frac{2}{3})^4}$ einheitlich positives Vorzeichen Vorzeichen. Die Funktion $f_{-\frac{2}{3}}$ ist also auf $]-\infty; x_p[$ und $[x_p; \infty[$ streng konvex.

[c] Für $-\frac{2}{3} < a < 0$ ist $-\infty < a < -\frac{a}{3a+2} < \infty$. Der Faktor $6a^2 + 4a = 2a(3a+2)$ ist negativ, die zweite Ableitung hat in x_3 also einen Vorzeichenwechsel von $+$ nach $-$.

Also ist $f_a''(x) > 0$ für alle $x \in]-\infty; a[$ und alle $x \in]a; x_3[$. Für $x > x_3$ ist $f_a''(x) < 0$. Die Funktion f_a ist daher auf $]-\infty; x_p[$ und auf $]x_p; x_3]$ streng konvex und auf $[x_3; \infty[$ streng konkav.

[d] Für $a = 0$ ist $f_0(x) = x + 1$ linear, also sowohl konvex als auch konkav.

[e] Für $a > 0$ ist $-\infty < x_3 < a < \infty$. Der Faktor $6a^2 + 4a = 2a(3a+2)$ ist positiv, die zweite Ableitung hat in x_3 also einen Vorzeichenwechsel von $-$ nach $+$.

Also ist $f_a''(x) < 0$ für alle $x \in]-\infty; x_3[$. Für $x > x_3$ ist $f_a''(x) > 0$. Die Funktion f_a ist daher auf $]-\infty; x_3]$ streng konkav, auf $[x_3; x_p[$ streng konvex, und auf $]x_p; \infty[$ streng konvex.

[9] Lokale und globale Extrema: Wegen der Asymptote $g_a(x) = x+2a+1$ hat die Funktion f_a keine globalen Extrema. Mit dem Monotonieverhalten von f_a erhält man folgende lokale Extrema in den Stellen $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{3a-\sqrt{9a^2+8a}}{2}$ und $x_2 = \frac{3a+\sqrt{9a^2+8a}}{2}$:

[a] Fall $a < -1$: f_a hat lokale Maxima in x_1 und in x_2 und ein lokales Minimum in x_0.

[b] Fall $a = -1$: f_a hat ein lokales Maximum in x_1, und ein lokales Minimum in x_0.

[c] Fall $-1 < a < -\frac{8}{9}$: f_a hat ein lokales Maximum in x_1 und lokale Minima in x_0, x_2.

[d] Fall $-\frac{8}{9} \leq a < 0$: f_a hat ein lokales Minimum in x_0.

[e] Fall $a = 0$: f_a hat keine lokalen Extrema.

[f] Fall $a > 0$: f_a hat ein lokales Maximum in x_1 und lokale Minima in $0, x_2$.

[10] Wendestellen: $x_3 = -\frac{a}{3a+2}$ ist eine Wendestelle mit Wechsel von Links- nach Rechtskrümmung für $a \in]-\frac{2}{3};0[$ und Wechsel von Rechts- nach Linkskrümmung für $a < -1$ und $-1 < a < -\frac{2}{3}$ und $a > 0$.

[11] Wertetabelle und Graph: Aufgrund der Vielzahl von möglichen Funktionsverläufen abhängig vom Scharparameter a macht eine Wertetabelle hier nur wenig Sinn. Ähnliches gilt für die graphische Darstellung, die zur Verdeutlichung des Schar-Prinzips in einem Koordinatensystem erfolgen sollte. Sie finden eine Repräsentation mit der dynamischen Geometrie-Software Geogebra über den Web-Service.

Aufgabe 20.

[1] Allgemeiner Funktionsterm mit Ableitungen: f ist ungerades Polynom 3. Grades $f(x) = ax^3 + bx$. Die Ableitungen lauten $f'(x) = 3ax^2 + b$, $f''(x) = 6ax$.

[2] Gleichungen in f, f', f'':

[a] „verläuft durch $P(1|-1)$“: $f(1) = -1$, also $a \cdot 1^3 + b \cdot 1 = -1$

[b] „hat in $x = 2$ ein Extremum“: $f'(2) = 0$, also $3a \cdot 2^2 + b = 0$

[3] Gleichungssystem: $a + b = -1$, $12a + b = 0$

[4] Lösung des Gleichungssystems: $b = -1 - a = -12a$. Daraus $a = \frac{1}{11}$ und $b = -\frac{12}{11}$

[5] Prüfung des Funktionsterms $f(x) = \frac{1}{11}x^3 - \frac{12}{11}x$: Es muss noch $f''(2) \neq 0$ aus der hinreichenden Bedingung für ein lokales Extremum in $x = 2$ geprüft werden. $f''(x) = \frac{6}{11}x$ und damit $f''(2) = \frac{12}{11} \neq 0$.

Aufgabe 21.

[1] Allgemeiner Funktionsterm mit Ableitungen: $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ hat die Ableitungen $f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$, $f''(x) = 12ax^2 + 6bx + 2c$, $f'''(x) = 24ax + 6b$

[2] Gleichungen in f, f', f'':

[a] „berührt Abszisse in $x = 2$“: Dies sind zwei Gleichungen. Zum einen ist $x = 2$ eine Nullstelle von f, also $f(2) = 0$, also $a \cdot 2^3 + b \cdot 2^3 + c \cdot 2^2 + d\dot{2} + e = 0$. Zum anderen hat f in $x = 2$ die gleiche Steigung wie die Abszisse(ngerade) $x \mapsto 0$, also $f'(2) = 0$, also $4a \cdot 2^3 + 3b \cdot 2^2 + 2c \cdot 2 + d = 0$.

[b] „hat in $x = 0$ den lokal maximalen Anstieg 1“: Dies sind ebenfalls zwei Bedingungen. Zum einen ist $f'(0) = 1$, also $4a \cdot 0^3 + 3b \cdot 0^2 + 2c \cdot 0 + d = 1$, zum anderen hat die Ableitungsfunktion f' in $x = 0$ ein lokales Maximum, also $f''(0) = 0$, also $12a \cdot 0^2 + 6b \cdot 0 + 2c = 0$.

[c] „hat in $x = \frac{3}{2}$ eine Wendestelle“: $f''(\frac{3}{2}) = 0$, also $12a \cdot (\frac{3}{2})^2 + 6b \cdot \frac{3}{2} + 2c = 0$.

[3] Gleichungssystem: Die Werte von c, d werden sofort abgelesen und in die anderen Gleichungen eingesetzt:

$$\left.\begin{array}{rcl} 16a+8b+4c+2d+e &=& 0 \\ 32a+12b+4c+d &=& 0 \\ d &=& 1 \\ 2c &=& 0 \\ 27a+9b+2c &=& 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 16a+8b+e &=& 2 \\ 32a+12b &=& -1 \\ d &=& 1 \\ c &=& 0 \\ 27a+9b &=& 0 \end{array}\right.$$

[4] Lösung des Gleichungssystems: $32a+12b = -1, 27a+9b = 0 \Leftrightarrow 8a+3b = -\frac{1}{4}, 3a+b = 0 \Leftrightarrow 8a+3(-3a) = -\frac{1}{4}, b = -3a \Leftrightarrow a = \frac{1}{4}, b = -\frac{3}{4}$. Eingesetzt in die erste Gleichung ergibt sich $e = -2 - 16a - 8b = -2 - 16 \cdot \frac{1}{4} - 8 \cdot (-\frac{3}{4}) = 0$.

[5] Prüfung des Funktionsterms $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{4}x^3 + x$. Es sind noch $f'''(0) < 0$ und $f'''(\frac{3}{2}) \neq 0$ aus den hinreichenden Bedingungen für ein lokales Maximum von f' in $x = 0$ und eine Wendestelle von f in $x = \frac{3}{2}$ zu prüfen: $f'''(x) = 6x - \frac{9}{2}$, also $f'''(0) = -\frac{9}{2} < 0$ und $f'''(\frac{3}{2}) = \frac{9}{2} \neq 0$.

Aufgabe 22.

a) f ist gerade $\Leftrightarrow$ f' ist ungerade. Diese Aussage ist richtig. Wenn nämlich f gerade ist, so gilt für die Ableitung mit der h-Methode

$$f'(-x) \;=\; \lim_{h\to 0} \frac{f(-x+h)-f(-x)}{h} = -\lim_{h\to 0} \frac{f(x+(-h)-f(x)}{-h} = -f'(-x)$$

Wenn umgekehrt f' ungerade ist, so hat die Funktion $h(x) = f(x) - f(-x)$ die Ableitungsfunktion 0, denn $f'(x) = f'(x) - (-f'(-x)) = f'(x) + f'(-x) = 0$. h ist also eine konstante Funktion mit $h(x) = h(0) = f(0) - f(0) = 0$.

Die entsprechende Aussage, bei der „gerade“ und „ungerade“ vertauscht sind, ist falsch. Zwar kann man daraus, dass f ungerade ist, genau wie oben noch folgern, dass f' gerade ist. Umgekehrt ist aber beispielsweise $f(x) = x^3 + 1$ eine nicht ungerade Funktion, deren Ableitung $f'(x) = 3x^2$ gerade ist.

b) Die Aussage ist richtig. Eine Funktion $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ mit $a \neq 0$ hat einen Wendepunkt in $x = -\frac{b}{3a}$, die Funktion $h(x) = f(x - \frac{b}{3a}) + f(-\frac{b}{3a})$ ist eine ungerade Funktion. Ersteres ergibt sich sofort über die zweite und dritte Ableitung, $f''(x) = 6ax + 2b$, $f'''(x) = 6a \neq 0$. Letzteres ist mit der genannten Wendestelle etwas mühsam zu berechnen.

Die Rechnung vereinfacht sich, wenn das Polynom in der Form in der Form $f(x) = \frac{1}{3}ax^3 - abx^2 + cx + d$ mit geeigneten $a, b \in \mathbb{R}$ vorliegt (durch den Übergang $(a|b) \mapsto (\tilde{a}|\tilde{b}) = (3a| - \frac{b}{3a})$ kann dies für jedes allgemeine Polynom $ax^3 + bx^2 + cx + d$ erreicht werden). Dann hat f nämlich die Wendestelle $x = b$ und die Funktion $h(x) = f(x+b) - f(b)$ ist ungerade, denn

$$\begin{aligned} h(x) = {} & f(x+b) - f(b) \\ = {} & \tfrac{1}{3}a(x+b)^3 - ab(x+b)^2 + c(x+b) + d - (\tfrac{1}{3}ab^3 - abb^2 + cb + d) \\ = {} & \tfrac{1}{3}ax^3 + abx^2 + ab^2x + \tfrac{1}{3}ab^3 - abx^2 - 2ab^2x - ab^2 + cx + cb + d \\ & -\tfrac{1}{3}ab^3 - ab^3 - cb - d \\ = {} & \tfrac{1}{3}ax^3 + (c - ab^2)x \end{aligned}$$

c) Die Aussage ist falsch. Beispielsweise hat die Funktion $f(x) = x^4 - 4x$ mit den Ableitungen $f'(x) = 4x^3 - 4$, $f''(x) = 12x^2$ in $x = 1$ ihr einziges lokales Extremum. Die Funktion $h(x) = f(x+1) - f(1) = (x+1)^4 - 4(x+1) + 3 = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 4 - 4x - 4 + 3 = x^4 + 4x^3 + 3$ ist aber nicht gerade. f ist also nicht achsensymmetrisch zu seiner Extremstelle.

Aufgabe 23.

a) Die logarithmische Ableitung von $h(x) = \ln(f(x))$ wird mit der Kettenregel bestimmt. Äußere Funktion ist die Logarithmusfunktion mit Ableitung $\frac{1}{x}$, innere Funktion ist die Funktion $f(x)$. Die Ableitung lautet nach der Kettenregel $h'(x) = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$.

b) Für $h(x) = \ln(f(x)g(x))$ lautet die Ableitung nach der Ketten- und Produktregel: $h'(x) = \frac{f'(x)g(x)+f(x)g'(x)}{f(x)g(x)} = \frac{f'(x)g(x)}{f(x)g(x)} + \frac{f(x)g'(x)}{f(x)g(x)} = \frac{f'(x)}{f(x)} + \frac{g'(x)}{g(x)}$. Die logarithmische Ableitung eines Produktes zweier Funktionen ist also die Summe der logarithmischen Ableitungen beider Funktionen.

c) Die zweite Ableitung von $h(x) = \ln(f(x))$ ist die erste Ableitung von $h'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$, also $h''(x) = \frac{f''(x)f(x)-f'(x)^2}{f(x)^2}$. In einem Wendepunkt von h gilt $h''(x) = 0$, also $f''(x)f(x) - f'(x)^2 = 0$, also $f''(x)f(x) = f'(x)^2$, also $\frac{f''(x)}{f'(x)} = \frac{f'(x)}{f(x)}$. In einem Wendepunkt von h stimmen also die logarithmischen Ableitungen von f und f' überein.

Aufgabe 24.

a) $f(p) = ap^2 + bp + c$ mit $f(\frac{1}{4}) = 1800$, $f(1) = 0$ und $f'(1) = 0$ ergibt $f(p) = 3200p^2 - 6400p + 3200 = 3200(p-1)^2$

b) $E(p) = pf(p) = 3200p^3 - 6400p^2 + 3200p$, $K(p) = 100 + \frac{1}{4}f(p) = 800p^2 - 1600p + 900$, $G(p) = E(p) - K(p) = 3200p^3 - 7200p^2 + 4800p - 900$

c) Mit dem Newton-Verfahren ergibt sich als Näherung mit Startwert $p = 0,9$

	p_0	$g(p)$	$g'(p)$	$p_1 = p_0 - g(p)/g'(p)$
1	$0,9$	$-79,2$	-384	$0,69375$
2	$0,69375$	$33,1805$	$-569,625$	$0,752$
3	$0,752$	$-1,19978$	$-599,962$	$0,75$
4	$0,75$	$0,000051178$	-600	$0,75$

Man rät die Nullstelle $p = \frac{3}{4}$. Mit Polynomdivision (Horner-Schema) folgt $g(p) = (p - \frac{3}{4})(3200p^2 - 4800p + 1200)$. Die weiteren Nullstellen sind $\frac{3\pm\sqrt{3}}{4}$ von denen nur die kleinere im Definitionsbereich liegt. Mit Wertevergleich sieht man $g[p] \geq 0$ für $p \in [\frac{3\pm\sqrt{3}}{4}; \frac{3}{4}]$. Dieses Intervall ist also die Gewinnzone. Für $0,32 < p < 0,75$ (näherungsweise) erzielt der Campingplatzbesitzer positiven Gewinn.

d) Die Gewinnfunktion hat die Ableitungen $G'(p) = 9600p^2 - 14400p + 4800 = 4800(2p^2 - 3p + 1)$ und $G''(p) = 19200p - 14400 = 4800(4p - 3)$. Notwendig für ein lokales Gewinnmaximum ist $G'(p) = 0$, also $2p^2 - 3p + 1 = 0 \Leftrightarrow p^2 - \frac{3}{2}p + \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow p = \frac{3}{4} \pm \sqrt{\frac{9}{16} - \frac{1}{2}} = \frac{3}{4} \pm \frac{1}{4}$. Kandidaten sind also $p = \frac{1}{2}$ und $p = 1$. Letzterer Wert ist ein Randpunkt des ökonomischen Definitionsbereichs, also im Rahmen des Randwertvergleichs zu prüfen. Hinreichend für ein lokales Maximum ist $G'(p) = 0$ und $G''(p) < 0$. Für $p = \frac{1}{2}$ gilt $G'(\frac{1}{2}) = 0$ (s.o.) und $G''(\frac{1}{2}) = 4800(4 \cdot \frac{1}{2} - 4) = -12000 < 0$. Also liegt in $p = \frac{1}{2}$ ein lokales Maximum vor. Dieses lokale Maximum wird nun durch einen Randwertvergleich mit den Stellen $p = 0$ und $p = 1$ auf globales Maximum überprüft. Es ist $G(0) = -900$, $G(1) = -100$ und $G(\frac{1}{2}) = 100$. Es liegt also in $p = \frac{1}{2}$ ein globales Gewinnmaximum vor. Das Gewinnmaximum beträgt 100 und es werden $f(\frac{1}{2}) = 800$ Flaschen abgesetzt.

Aufgabe 25.

Brötchenbeispiel:
Schreiben Sie den Preis p als lineare Funktion der abgesetzten Menge x, $p(x) = ax + b$ mit $p(0) = \frac{8}{5}$, $p(200) = \frac{3}{5}$. Aus diesem Steckbrief erhalten Sie $p(x) = -\frac{1}{200}x + \frac{8}{5}$.
Die Kostenfunktion ist $K(x) = \frac{3}{5}x + 15$, die Erlösfunktion lautet $E(x) = x \cdot p(x) = \frac{8}{5}x - \frac{1}{200}x^2$. Als Gewinnfunktion erhält man $G : [0; 200] \to \mathbb{R}$, $G(x) = E(x) - K(x) = -\frac{1}{200}x^2 + x - 15$.
Diese nach unten geöffnete Parabel hat ihren Scheitelpunkt (Maximallösung) in $x = 100$. Der zugehörige Preis ist $p(x) = \frac{11}{10}$. Der maximale Gewinn beträgt $G(100) = 35$.

Weil die Funktion $p(x)$ Umkehrfunktion der im Haupttext gewonnenen Nachfragefunktion $f(p) = 320 - 200p$ ist, ergibt sich die selbe Lösung wie dort.

Mineralwasserbeispiel:
In Analogie zur preisabhängigen Modellierung aus der vorangegangenen Aufgabe sei auch hier eine quadratische Nachfragefunktion $p(x) = ax^2 + b$ mit Scheitelpunkt in $P(0|1)$ und $p(1800) = \frac{1}{4}$ angenommen (man könnte den Scheitelpunkt auch in $Q(1800|\frac{1}{4})$ ansetzen, dann erhält man eine andere gewinnoptimale Lösung). Es ergibt sich $p(x) = 1 - \frac{3}{4}\frac{x^2}{1800^2}$.
Die Gewinnfunktion lautet $G(x) = E(x) - K(x) = xp(x) - (\frac{1}{4}x + 100) = \frac{3}{4}x - \frac{3}{4}\frac{x^3}{1800^2} - 100$. Ihre Ableitungen sind $G'(x) = \frac{3}{4} - \frac{9}{4}\frac{x^2}{1800^2}$, $G''(x) = -\frac{9}{2}\frac{x}{1800^2}$. Notwendig und hinreichend für ein lokales Gewinnmaximum ist $G'(x) = 0$ und $G''(x) < 0$. $G'(x) = 0$ löst sich zu $x^2 = \frac{1}{3}1800^2 \Leftrightarrow x = \frac{1800}{\sqrt{3}} = 600\sqrt{3} \approx 1039,23$. Weil auch $G''(600\sqrt{3}) < 0$, ist ein lokales Gewinnmaximum gefunden. Der Randwertvergleich ergibt $G(0) = G(1800) = -100 < 0$ und $G(600\sqrt{3}) \approx 419,615 > 0$, ist auch das globale Maximum gefunden. Der gewinnoptimale Preis beträgt $f(600\sqrt{3}) = \frac{3}{4}$.
Die Lösung unterscheidet sich von derjenigen in der vorangegangenen Aufgabe, weil die Nachfragefunktion, die den Steckbrief modelliert, nicht die Umkehrfunktion der Nachfragefunktion dort ist.

Aufgabe 26.

a) $\epsilon_f(x) = x \cdot \frac{-15}{120-15x} = \frac{-15x}{120-15x}$.

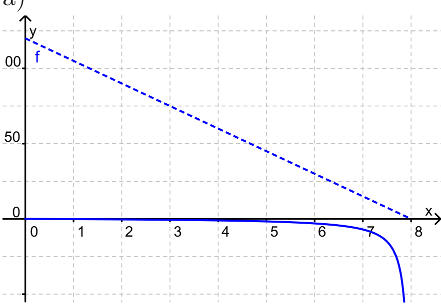
b) $\epsilon_f(x) = x \cdot \frac{-3x^2+3x+1}{-x^3+\frac{3}{2}x^2+x} = \frac{-3x^2+3x+1}{-x^2+\frac{3}{2}x+1} = \frac{2(3x^2-3x-1)}{(x-2)(2x+1)}$

c) $\epsilon_f(x) = x \cdot \frac{cax^{a-1}}{cx^a} = \frac{ax^a}{x^a} = a$

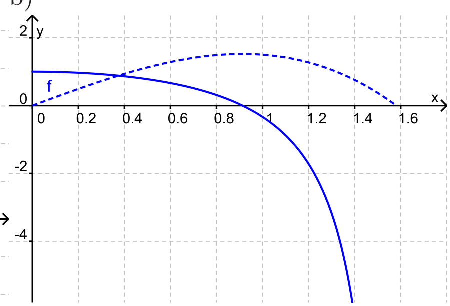
d) $\epsilon_f(x) = x \cdot \frac{\frac{1}{x}}{\ln(x)} = \frac{1}{\ln(x)}$

Graphen:

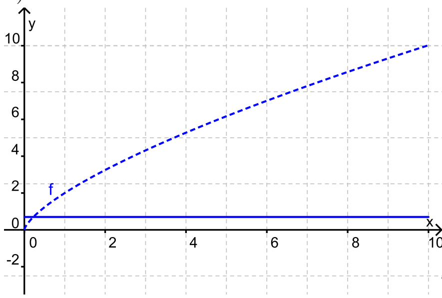
a)



b)



c)



d)

Aufgabe 27. Kurvendiskussion des Deckungsbeitrags nach dem 11-Punkte-Programm. Dabei jeweils ökonomische Interpretationen:

[1] Ökonomischer Definitionsbereich $[0; \infty[$

[2] Die Funktion weist keine Symmetrien auf.

[3] G ist differenzierbar für $x > 0$. Die Ableitungen lauten:

- $G'(x) = tdx^{t-1} - c = \frac{td}{x^{1-t}} - c$
- $G''(x) = t(t-1)dx^{t-2}$

[4] $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{G(x)}{-cx} = \lim\limits_{x\to\infty} (1 - \frac{d}{cx^{1-t}}) = 1$, also ist $g(x) = -cx$ Asymptote von G. Damit gilt auch $\lim\limits_{x\to\infty} G(x) = \lim\limits_{x\to\infty} (-cx) = -\infty$. Für große Faktoreinsatzmengen hat der Erlös also keinen wesentlichen Einfluss auf den (dann negativen) Deckungsbeitrag.

[5] Die Funktion hat keine Polstellen

[6] Nullstellen von G: $G(x) = x(dx^{t-1} - c) = 0$ für $x = 0$ oder $x = x_0 = \sqrt[1-t]{\frac{d}{c}}$. Die Gewinnzone ist $[0; \sqrt[1-t]{\frac{d}{c}}]$. Mit zunehmendem Stückerlös (Stückkosten) vergrößert (verkleinert) sich die Gewinnzone. Die Gewinngrenze liegt in Abhängigkeit von $t \in]0; 1]$ zwischen 1 und $\frac{d}{c}$, denn $\lim\limits_{t\to 1} (\frac{d}{c})^{\frac{1}{1-t}} = 1$

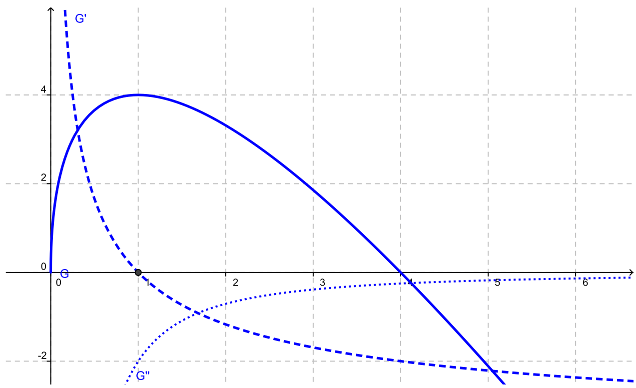
[7] Nullstellen von G' und Monotonieverhalten von G: $G'(x) = 0 \Leftrightarrow x = x_1 = \sqrt[1-t]{t\frac{d}{c}}$. Wegen $G''(x) < 0$ ist G streng monoton fallend, daher hat G' in $x = x_1$ einen Vorzeichenwechsel von + nach −, also ist G in $[0; x_1]$ streng monoton wachsend und in $[x_1; \infty[$ streng monoton fallend.

[8] Nullstellen von G'' und Krümmungsverhalten von G: Wegen $G''(x) < 0$ auf ganz $\mathbb{D}$ ist G streng konkav.

[9] In $x = x_1$ hat G ein globales Maximum. Das Gewinnmaximum liegt immer in der Gewinnzone; der gewinnmaximale Faktoreinsatz steigt (fällt) mit dem Stückerlös d (den Stückkosten c).

[10] G hat keine Wendestellen.

[11] Die Graphen von G, G', G'' sind exemplarisch für $c = 4$, $d = 8$ und $t = \frac{1}{2}$ skizziert.



Durchschnittlicher Deckungsbeitrag je produziertem Stück: $f(x) = \frac{dx^t - cx}{x^t} = d - cx^{1-t}$. Kurvendiskussion nach dem 11-Punkte-Programm:

[1] Definitionsbereich $\mathbb{D} =]0; \infty[$, die Definitionslücke $x = 0$ ist hebbar.

[2] keine Symmetrieeigenschaften

[3] Ableitungen:

- $f'(x) = c(t-1)x^{-t} < 0$
- $f''(x) = -ct(t-1)x^{-t-1} = \frac{ct(1-t)}{x^{1+t}} > 0$

[4] Verhalten im Unendlichen: $\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$

[5] Polstellen: keine

[6] Nullstellen von f: $d - cx^{1-t} = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt[1-t]{\frac{d}{c}}$.

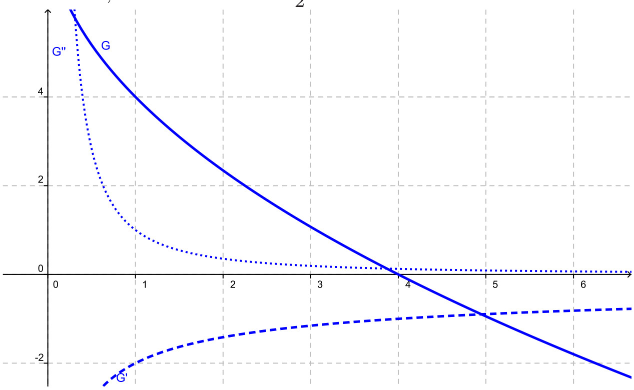
[7] f' hat keine Nullstelle, $f'(x) < 0$, f ist streng monoton fallend.

[8] f'' hat keine Nullstelle, $f'(x) > 0$, f ist streng konvex.

[9] f hat in $x = 0$ ein globales Maximum.

[10] f hat keine Wendestelle. Die Graphen von f, f', f'' sind exemplarisch

für $c = 4$, $d = 8$ und $t = \frac{1}{2}$ skizziert:



Aufgabe 28. Es ist $f(x) = \frac{a}{x} + bx^{t-1} + c$. Kurvendiskussion von f nach dem 11-Punkte-Programm.

[1] Ökonomischer Definitionsbereich $]0; \infty[$

[2] Die Funktion weist keine Symmetrien auf.

[3] f ist differenzierbar für $x > 0$. Die Ableitungen lauten:

- $f'(x) = -\frac{a}{x^2} + b(t-1)x^{t-2} = \frac{b(t-1)x^t - a}{x^2}$
- $f''(x) = \frac{2a}{x^3} + b(t-1)(t-2)x^{t-3} = \frac{2a - b(t-1)(2-t)x^t}{x^3}$

[4] Verhalten im Unendlichen/am Rand: $\lim\limits_{x \to 0} = +\infty = \lim\limits_{x \to \infty} f(x)$, eine (polynomiale) Asymptote hat f nicht, allenfalls könnte die Potenzfunktion $g(x) = bx^{t-1}$ als Asymptote „herhalten“.

[5] Polstellen: Da f keine gebrochen-rationale Funktion ist, kann man in $x = 0$ auch nicht von einer Polstelle im strengen Sinne sprechen.

[6] Nullstellen von f: Da alle drei Summanden von f strikt positiv sind, hat f keine Nullstellen.

[7] Nullstellen von f' und Monotonieverhalten von f: Aus der Darstellung von f' folgt sofort: f' hat in $x_1 = \sqrt[t]{\frac{a}{(t-1)b}}$ eine Nullstelle mit Vorzeichenwechsel von $-$ nach $+$. Also ist f in $]0; x_1]$ streng monoton fallend und in $[x_1; \infty[$ streng monoton wachsend.

[8] Nullstellen von f'' und Krümmungsverhalten von f: Aus der Darstellung von f'' folgt sofort:

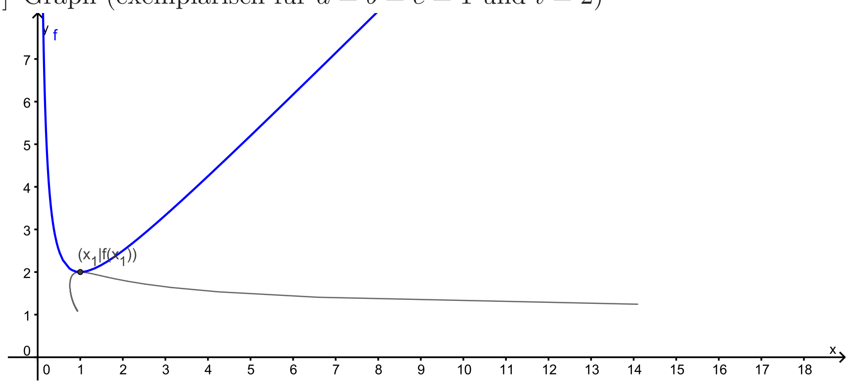
[a] Für $t \geq 2$ hat f'' keine Nullstelle und es ist $f''(x) > 0$ für alle $x > 0$. Also ist f in $\mathbb{D}$ konvex.

[b] Für $1 < t < 2$ hat f'' in $x_2 = \sqrt[t]{\frac{a}{(t-1)(2-t)b}}$ eine Nullstelle und einen Vorzeichenwechsel von $+$ nach $-$. Also ist f auf $]0; x_2]$ streng konvex und auf $[x_2; \infty[$ streng konkav.

[9] Extrema von f: Aufgrund des Monotonieverhaltens von f hat f in $x_1 = (\frac{a}{(t-1)b})^{\frac{1}{t}}$ ein globales Minimum, dieses stellt also das Betriebsoptimum dar. Die minimalen durchschnittlichen Kosten betragen $f(x_1) = \frac{a}{x_1} + bx_1^{t-1} + c = \frac{a+bx_1^t}{x_1} + c = \frac{a(1+\frac{1}{t-1})}{\sqrt[t]{\frac{a}{(t-1)b}}} + c$.

[10] Wendestellen von f: Für $t \geq 2$ hat f keine Wendestelle. Für $1 < t < 2$ hat f in x_2 eine Wendestelle mit Wechsel von Links- nach Rechtskrümmung.

[11] Graph (exemplarisch für $a = b = c = 1$ und $t = 2$)



Zusätzlich (grau) in den Graph eingetragen, ist die Lage des Extrempunktes mit variierendem Scharparameter t. Sie erkennen eine Kurve, die aber keine Funktion darstellt (warum?).

Im Rahmen der Marginalanalyse muss das Betriebsoptimum diskutiert werden. Beispielhaft sei hier die Frage besprochen, wie hoch die minimalen durchschnittlichen Kosten in Abhängigkeit vom Parameter $t > 1$ höchstens werden können (d.h. wo auf der grau markierten Kurve im obigen Graphen der höchste Ordinatenwert erreicht wird). Diese Frage ist insofern von Bedeutung, weil der Parameter t in der Modellierung oft nur durch statistische oder Plausibilitätsüberlegungen festgelegt wird und somit auch fehlerhaft gewählt sein kann.

Man bestimmt das Maximum der minimalen Durchschnittskosten $h(t) = \frac{a(1+\frac{1}{t-1})}{\sqrt[t]{\frac{a}{(t-1)b}}} + c = \frac{a\frac{t}{t-1}}{e^{-\frac{1}{t}\ln(\frac{b(t-1)}{a})}} + c$ durch Berechnung der Ableitung $h'(t)$, wobei uns alle Ableitungsoperatoren noch einmal begegnen.

$$
\begin{aligned}
h'(t) =& \frac{-\frac{a}{(t-1)^2}\left(\frac{a}{b(t-1)}\right)^{1/t} - a(1+\frac{1}{t-1})\left(\frac{a}{b(t-1)}\right)^{1/t}\left(\frac{1}{t^2}\ln(\frac{b(t-1)}{a}) - \frac{1}{t(t-1)}\right)}{\left(\frac{a}{b(t-1)}\right)^{2/t}} \\
=& \frac{-\frac{a}{(t-1)^2} - a(1+\frac{1}{t-1})\left(\frac{1}{t^2}\ln(\frac{b(t-1)}{a}) - \frac{1}{t(t-1)}\right)}{\left(\frac{a}{b(t-1)}\right)^{1/t}} \\
=& -\frac{\frac{a}{t(t-1)}\ln(\frac{b(t-1)}{a})}{\left(\frac{a}{b(t-1)}\right)^{1/t}}
\end{aligned}
$$

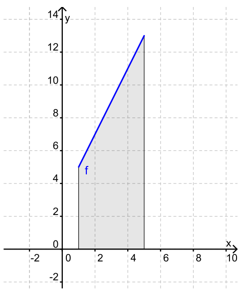
Diese Ableitung ist genau dann Null, wenn $\ln(b(t-1)/a) = 0$, also wenn $t = \frac{a+b}{b}$. Es gibt also genau einen kritischen Punkt. Zudem hat die Ableitung von h an dieser Stelle einen Vorzeichenwechsel von $+$ nach $-$, also liegt ein globales Maximum von h in $t = \frac{a+b}{b}$ vor. Im obigen Graphen ist dieses Szenario für $a = b = 1$ und $t = \frac{a+b}{b} = 2$ dargestellt.

Die Minimalstelle von f ist in diesem Fall $x_1 = \left(\frac{a}{b(\frac{a+b}{b}-1)}\right)^{\frac{1}{\frac{a+b}{b}}} = 1$ und die Minimalkosten betragen $f(1) = a + b + c$. Im „worst-case“-Szenario haben also alle Kostenkoeffizienten a, b, c den gleichen Beitrag an den minimalen Durchschnittskosten.

Kapitel 8

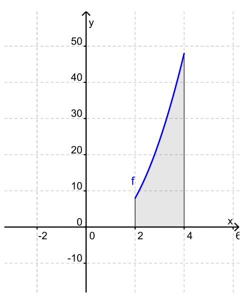
Aufgabe 1.

a)



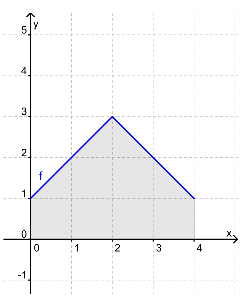
Zu bestimmen ist $\int_1^5 (2x+3)dx$:
$F(x) = x^2 + 3x$ ist Stammfunktion zu $f(x) = 2x + 3$, denn $F'(x) = f(x)$.
Auf $[1;5]$ ist $f(x) \geq 0$. Nach dem Hauptsatz ist die gesuchte Fläche daher gleich $F(5) - F(1) = 5^2 + 3 \cdot 5 - (1^2 + 3 \cdot 1) = 36$.

b)



Zu bestimmen ist $\int_2^4 (4x^2 - 4x)dx$:
$F(x) = \frac{4}{3}x^3 - 2x^2$ ist Stammfunktion zu $f(x) = 4x^2 - 4x$, denn $F'(x) = f(x)$.
Auf $[2;4]$ ist $f(x) \geq 0$. Nach dem Hauptsatz ist die gesuchte Fläche daher gleich $F(4) - F(2) = (\frac{4}{3} \cdot 4^3 - 2 \cdot 4^2) - (\frac{4}{3} \cdot 2^3 - 2 \cdot 2^2) = \frac{152}{3}$

c)



Zu bestimmen ist $\int_0^4 (3 - |x-2|)dx$:
Für $x \leq 2$ ist $f(x) = 3 - |x-2| = 1 + x$. Stammfunktion zu f ist dann $F_1(x) = \frac{1}{2}x^2 + x$. Für $x \geq 2$ ist $f(x) = 3 - |x-2| = 5 - x$. Stammfunktion zu f ist dann $F_2(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 5x$. Auf $[0;4]$ ist $f(x) \geq 0$. Die gesuchte Fläche ist Summe der Teilflächen $\int_0^2 f(x)dx + \int_2^4 f(x)dx$ und nach dem Hauptsatz daher gleich $(F_1(2) - F_1(0)) + (F_2(4) - F_2(2)) = ((\frac{1}{2} \cdot 2^2 + 2) - (\frac{1}{2} \cdot 0^2 + 0)) + ((-\frac{1}{2} \cdot 4^2 + 5 \cdot 4) - (-\frac{1}{2} \cdot 2^2 + 5 \cdot 2)) = 8$.

Aufgabe 2.

Die umschlossene Fläche liegt jeweils zwischen Graph und Abszisse, wobei die Nullstellen von f den Bereich begrenzen. Es müssen also zunächst alle Nullstellen von f berechnet werden. Bei mehr als zwei Nullstellen gibt es entsprechend mehrere Teilflächen. Das betreffende Integral ist bei negativem Vorzeichen von f entsprechend zu negieren, um die Teilfläche zu erhalten.

a) $f(x) = x - x^2 = x(1-x) = 0$ ergibt $x_1 = 0$, $x_2 = 1$.

Es ist $f(x) \geq 0$ für $x \in [0;1]$. Also ist die gesuchte Fläche gleich $\int_0^1 (x - x^2)dx$. Stammfunktion zu f ist $F(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3$. Die gesuchte Fläche ist also $F(1) - F(0) = F(1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$.

b) $f(x) = ax + x^2 - x^3 = x(a + x - x^2) = 0$ ergibt drei Nullstellen $x_1 < x_2 < x_3$ mit $x_1 = \frac{1-\sqrt{4a+1}}{2}$, $x_2 = 0$, $x_3 = \frac{1+\sqrt{4a+1}}{2}$.

Auf $[x_1;0]$ ist $f(x) \leq 0$, auf $[0;x_2]$ ist $f(x) \geq 0$. Die gesuchte Fläche ist also $-\int_{x_1}^0 f(x)dx + \int_0^{x_3} f(x)dx$.

Eine Stammfunktion von f ist $F(x) = \frac{a}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4$. Die gesuchte Fläche ist also nach dem Hauptsatz gleich $F(x_3) - F(0) - (F(0) - F(x_1) = F(x_3) + F(x_1)$, also gleich

$$
\begin{aligned}
&\frac{a}{2}x_1^2 + \frac{1}{3}x_1^3 - \frac{1}{4}x_1^4 + \frac{a}{2}x_2^2 + \frac{1}{3}x_2^3 - \frac{1}{4}x_2^4 \\
=&\frac{a}{2}(x_1^2 + x_3^2) + \frac{1}{3}(x_1^3 + x_3^3) - \frac{1}{4}(x_1^4 + x_3^4) \\
=&\frac{a}{2}\left(\left(\frac{1+\sqrt{4a+1}}{2}\right)^2 + ((\left(\frac{1-\sqrt{4a+1}}{2}\right)^2\right) \\
&+\frac{1}{3}\left(\left(\frac{1+\sqrt{4a+1}}{2}\right)^3 + ((\left(\frac{1-\sqrt{4a+1}}{2}\right)^3\right) \\
&-\frac{1}{4}\left(\left(\frac{1+\sqrt{4a+1}}{2}\right)^4 + ((\left(\frac{1-\sqrt{4a+1}}{2}\right)^4\right) \\
=&\frac{a}{8}\left((1+\sqrt{4a+1})^2 + (1-\sqrt{4a+1})^2\right) \\
&+\frac{1}{24}\left((1+\sqrt{4a+1})^3 + (1-\sqrt{4a+1})^3\right) \\
&-\frac{1}{64}\left((1+\sqrt{4a+1})^4 - (1-\sqrt{4a+1})^4\right) \\
=&\frac{a}{8}(8a+4) + \frac{1}{24}(6(4a+1)+2) - \frac{1}{64}(2(4a+1)^2 + 12(4a+1)+2) \\
=&\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}a + \frac{1}{12}
\end{aligned}
$$

Erläuterung des vierten Umformungsschrittes: Es ist jeweils nach der binomischen Formel

$$
\begin{aligned}
(1 \pm \sqrt{4a+1})^2 &= 1 \pm 2\sqrt{4a+1} + (4a+1) \\
(1 \pm \sqrt{4a+1})^3 &= 1 \pm 3\sqrt{4a+1} + 3(4a+1) \pm \sqrt{4a+1}^3 \\
(1 \pm \sqrt{4a+1})^4 &= 1 \pm 4\sqrt{4a+1} + 6(4a+1) \pm 4\sqrt{4a+1} + (4a+1)^2
\end{aligned}
$$

Dann heben sich in den drei Hauptklammern jeweils die Ausdrücke mit $\sqrt{4a+1}$ und $\sqrt{4a+1}^3$ weg, so dass der „wurzelfreie" Ausdruck stehen bleibt.

Aufgabe 3.

Die angegebene Funktion F hat nach der Quotientenregel die Ableitung

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{2(x-1)(x^2+1)-(x-1)^2(2x)}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{2(x-1)(x^2+1-(x-1)x)}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{2(x-1)(x+1)}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{2(x^2-1)}{(x^2+1)^2} \\ &= f(x) \end{aligned}$$

F ist also Stammfunktion zu f. Nullstellen von f sind Nullstellen der Zählerfunktion, also Lösungen von $x^2-1=0$, also $x_1=-1$, $x_2=+1$. Auf $[-1;1]$ ist $f(x)\leq 0$, also ist die gesuchte Fläche gleich

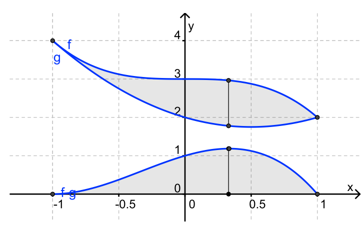
$$-\int_{-1}^{1} f(x)dx = -(F(1)-F(-1)) = -(\frac{(1-1)^2}{(1^2+1)^2} - \frac{((-1)-1)^2}{((-1)^2+1)^2}) = 2$$

Aufgabe 4.

Hier und in den folgenden Aufgaben, in denen Schnittflächen zwischen Graphen berechnet werden, müssen Sie sich folgenden Sachverhalt zunutze machen.

> Wenn f und g stetige Funktionen auf $[a;b]$ sind, so ist die Fläche, die von den Graphen zwischen f und g über $[a;b]$ begrenzt wird, gleich dem Integral $\int_a^b |f(x)-g(x)|dx$.

Im rechts stehenden Bild sind daher z.B. die beiden dargestellten Flächen inhaltsgleich.
Denn die untere Fläche hat als Begrenzungskurve die Funktion $f-g$, wobei f, g die obere Fläche begrenzen.



Machen Sie sich den Sachverhalt an folgendem Spezialfall klar: Wenn $f(x)\geq g(x)\geq 0$, so kann man den Flächeninhalt zwischen den Graphen berechnen, indem man erst die Fläche $\int_a^b f(x)dx$ zwischen Graph von f und Abszisse bestimmt und von dieser dann die (Teil-)Fläche zwischen Graph von g und Abszisse, also $\int_a^b g(x)dx$ subtrahiert. Man bestimmt also $\int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \int_a^b (f(x)-g(x))dx = \int_a^b |f(x)-g(x)|dx$.

Für zwei benachbarte Schnittpunkte $x_0 < x_1$ der beiden Graphen von f und g hat die von f und g umschlossene Fläche dann den Inhalt $\int_{x_1}^{x_2} |f(x) - g(x)| dx$. In konkreten Anwendungen ist der Absolutbetrag aufzulösen: Falls auf dem betreffenden Intervall $[x_1; x_2]$ stets $f(x) \geq g(x)$ gilt, so ist der Flächeninhalt $\int_{x_1}^{x_2} (f(x) - g(x)) dx$. Diese Überlegungen gelten übrigens auch für die uneigentlichen Integrale der Übungsaufgaben im übernächsten Abschnitt.

a) Schnittpunkte von f und g erhält man durch Gleichsetzen der Funktionsterme und Auflösen nach x: $f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 = x^4 \Leftrightarrow x^2(1 - x^2) = 0$. Lösungen sind $x_1 = -1$, $x_2 = 0$ und $x_3 = 1$.

   Auf $[-1; 1]$ ist aber $f(x) \geq g(x)$, also ist die gesuchte Fläche gleich $\int_{-1}^{1} (f(x) - g(x)) dx = \int_{-1}^{1} (x^2 - x^4) dx$ (d.h. man darf über die mittlere Nullstelle hinweg integrieren, weil $f(x) - g(x)$ in $x = 0$ keinen Vorzeichenwechsel hat.

   Eine Stammfunktion zum Integranden ist die ungerade Funktion $F(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{5}x^5$, also ist die gesuchte Fläche gleich $F(1) - F(-1) = 2F(1) = 2 \cdot (\frac{1}{3} - \frac{1}{5})) = \frac{4}{15}$.

b) Wieder sind die Schnittpunkte von f und g durch Gleichsetzen der Funktionsterme zu bestimmen: $f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 - x = 1 - x^3 \Leftrightarrow x^3 + x^2 - x - 1 = 0$. Die Nullstelle $x = 1$ rät man, Polynomdivision ergibt $x^3 + x^2 - x - 1 = (x - 1)(x^2 + 2x + 1) = (x - 1)(x + 1)^2$. Nullstellen sind also ± 1 und zwischen diesen Nullstellen hat $f(x) - g(x)$ einheitliches Vorzeichenverhalten.

   Speziell gilt $f(0) = 0 < 1 = g(0)$, also gilt $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in [-1; 1]$. Die gesuchte Fläche ist also gleich $\int_{-1}^{1} (g(x) - f(x)) dx = \int_{-1}^{1} (-x^3 - x^2 + x + 1) dx$.

   Eine Stammfunktion zum Integranden ist $F(x) = -\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x$. Die gesuchte Fläche ist nach dem Hauptsatz $F(1) - F(-1) = \frac{4}{3}$.

Aufgabe 5.

Es genügt, den Wert $a > 0$ zu betrachten, da sich im Falle $a < 0$ dasselbe Ergebnis wie für $-a > 0$ ergibt.

f und g haben Schnittpunkte für $x = 0$ und $x = \pm 1$ und es gilt $f(x) \geq g(x) \geq 0$ für $x \geq 0$ sowie $f(x) \leq g(x) \leq 0$ für $x \leq 0$. Die Fläche ist daher

$\int_{-1}^{0} (g(x) - f(x)) dx + \int_{0}^{1} (f(x) - g(x)) dx = \int_{-1}^{0} (ax^3 - ax) dx + \int_{0}^{1} (ax - ax^3) dx = F_1(0) - F_1(-1) + (F_2(1) - F_2(0))$ mit den Stammfunktionen $F_1(x) = \frac{a}{4}x^4 - \frac{a}{2}x^2$, $F_2(x) = \frac{a}{2}x^2 - \frac{a}{4}x^4$. Die Fläche ist daher $-F_1(-1) + F_2(1) = -(\frac{a}{4} - \frac{a}{2}) + (\frac{a}{2} - \frac{a}{4}) = \frac{a}{2}$. Der Flächeninhalt ist also 1 für $a = 2$. Entsprechend ergibt sich auch für $a = -2$ der Flächeninhalt 2.

Aufgabe 6.

Eine nach unten geöffnete achsensymmetrische Parabel hat die Form $f(x) = -ax^2+c$ mit $a > 0$, $c \in \mathbb{R}$. Liegt $P(1|1)$ auf der Parabel, so gilt $1 = -a+c \Leftrightarrow c = 1+a$. Die Parabel hat also die Form $f(x) = -ax^2 + 1 + a$ mit $a > 0$.

Die Nullstellen von f sind $x_1 = -\sqrt{\frac{1+a}{a}}$ und $x_2 = \sqrt{\frac{1+a}{a}}$.

Die von Graph und Abszisse umschlossene Fläche hat dann den Inhalt

$\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = 2\int_0^{\sqrt{\frac{1+a}{a}}}(-ax^2+1+a)dx = 2(-\frac{a}{3}\sqrt{\frac{a+1}{a}}^3 + (a+1)\sqrt{\frac{a+1}{a}}) = \frac{4}{3}(a+1)\sqrt{\frac{a+1}{a}}$. Die minimale Fläche ergibt sich durch eine Extremwertdiskussion der Funktion $g(x) = \frac{4}{3}(x+1)\sqrt{\frac{x+1}{x}} = \frac{4}{3}\sqrt{\frac{(x+1)^3}{x}}$ für $x > 0$.

Es ist $g'(x) = \frac{4}{3}\frac{1}{2\sqrt{\frac{(x+1)^3}{x}}}\frac{3(x+1)^2x-(1+x)^3}{x^2} = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{x+1}{x^3}}(2x-1)$. Die Funktion g ist monoton fallend für $x \leq \frac{1}{2}$ und monoton wachsend für $x \geq \frac{1}{2}$. Sie nimmt also ihr Minimum für $x = \frac{1}{2}$ an.

Der Flächeninhalt wird also für $a = \frac{1}{2}$ minimal. Er beträgt $g(\frac{1}{2}) = 2\sqrt{3}$.

Aufgabe 7.

Mit der Funktion $f(x) = \frac{3}{4}x^2$ ist die Rechtecks-Obersumme $\frac{1}{n}f(x_1)+\cdots\frac{1}{n}f(x_n) = \frac{1}{n}(f(x_1)+\cdots+f(x_n))$ über die Intervalle $[1+\frac{1}{n};1+\frac{2}{n}]$, $[1+\frac{2}{n};1+\frac{3}{n}]$, …, $[1+\frac{n-1}{n};2]$ zu berechnen. Dabei sind für den Einschluss der gesuchten Fläche durch eine Obersumme jeweils die Stellen x_i größten Funktionswertes zu verwenden. Weil f monoton wachsend auf $[1;2]$ ist, handelt es sich hier um die rechten Intervallgrenzen $x_1 = 1+\frac{1}{n}, x_2 = 1+\frac{2}{n}, \ldots, x_n = 1+\frac{n}{n} = 2$. Die gesuchte Obersumme ist also

$$
\begin{aligned}
& \frac{3}{4n}((1+\frac{1}{n})^2+\cdots+(1+\frac{n}{n})^2) \\
= & \frac{3}{4n}\frac{(n+1)^2+(n+3)^2+\cdots(n+n)^2}{n^2} \\
= & \frac{3}{4n^3}((1^2+\cdots+(2n))^2-(1^2+\cdots+n^2) \\
= & \frac{3}{4n^3}(\frac{(2n)(2n+1)(2(2n)+1)}{6}-\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}) \\
= & \frac{3}{24n^2}((4n+2)(4n+1)-(n+1)(2n+1)) \\
= & \frac{1}{8n^2}(16n^2+12n+2-(2n^2+3n+1))) \\
= & \frac{14n^2+9n+1}{8n^2}
\end{aligned}
$$

Der Grenzwert dieses in n gebrochen-rationalen Ausdrucks ist Quotient der Leitkoeffizienten 14 und 8 (Zählergrad gleich Nennergrad), also ist die gesuchte Fläche $\frac{7}{4}$.

Aufgabe 8.

Für den Ausdruck $f(n) = 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3$ ergibt sich ein Wert zwischen n^3und $n{\cdot}n^3 = n^4$, daher wird ein ein Polynom vom Grad 4 in n angesetzt. Für dieses werden folgende Stützwerte verwendet: $f(0) = 0, f(1) = 1^3, f(2) = 1^3 + 2^3 = 9, f(3) = 1^3 + 2^3 + 3^3 = 36, f(4) = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 100.$

Zu jeder Stützstelle wird nun ein Lagrange-Polynom bestimmt, d.h. ein Term der Form $\frac{(n-0)(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{(n_0-0)(n_0-1)(n_0-2)(n_0-3)(n_0-4)}$,aus dem nacheinander jeweils

- der erste, zweite, ... Faktor aus Zähler und Nenner entfernt wird
- in das Ergebnis für n_0 die erste, zweite, ... Stützstelle eingesetzt wird.

$$
\begin{aligned}
n &= 0: \tfrac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{(0-1)(0-2)(0-3)(0-4)} = \tfrac{1}{24}n^4 - \tfrac{5}{12}n^3 + \tfrac{35}{24}n^2 - \tfrac{25}{12}n + 1\\
n &= 1: \tfrac{n(n-2)(n-3)(n-4)}{(1-0)(1-2)(1-3)(1-4)} = -\tfrac{1}{6}n^4 + \tfrac{3}{2}n^3 - \tfrac{13}{3}n^2 + 4n\\
n &= 2: \tfrac{n(n-1)(n-3)(n-4)}{(2-0)(2-1)(2-3)(2-4)} = \tfrac{1}{4}n^4 - 2n^3 + \tfrac{19}{4}n^2 - 3n\\
n &= 3: \tfrac{n(n-1)(n-2)(n-4)}{(3-0)(3-1)(3-2)(3-4)} = -\tfrac{1}{6}n^4 + \tfrac{7}{6}n^3 - \tfrac{7}{3}n^2 + \tfrac{4}{3}n\\
n &= 4: \tfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{(4-0)(4-1)(4-2)(4-3)} = \tfrac{1}{24}n^4 - \tfrac{1}{4}n^3 + \tfrac{11}{24}n^2 - \tfrac{1}{4}n
\end{aligned}
$$

Die Lagrange-Polynome werden nun mit den Funktionswerten an den Stützstellen multipliziert. Ergebnis ist:

$$
\begin{aligned}
n &= 0: 0\\
n &= 1: -\tfrac{1}{6}n^4 + \tfrac{3}{2}n^3 - \tfrac{13}{3}n^2 + 4n\\
n &= 2: 9\cdot(\tfrac{1}{4}n^4 - 2n^3 + \tfrac{19}{4}n^2 - 3n) = \tfrac{9}{4}n^4 - 18n^3 + \tfrac{171}{4}n^2 - 27n\\
n &= 3: 36\cdot(-\tfrac{1}{6}n^4 + \tfrac{7}{6}n^3 - \tfrac{7}{3}n^2 + \tfrac{4}{3}n) = -6n^4 + 42n^3 - 84n^2 + 48n\\
n &= 4: 100\cdot(\tfrac{1}{24}n^4 - \tfrac{1}{4}n^3 + \tfrac{11}{24}n^2 - \tfrac{1}{4}n) = \tfrac{25}{6}n^4 - 25n^3 + \tfrac{275}{6}n^2 - 25n
\end{aligned}
$$

Die Summe ist dann

$$
\begin{aligned}
1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = {} & (-\tfrac{1}{6} + \tfrac{9}{4} - 6 + \tfrac{25}{6})n^4 + (\tfrac{3}{2} - 18 + 42 - 25)n^3\\
& +(-\tfrac{13}{3} + \tfrac{171}{4} - 84 + \tfrac{275}{6})n^2 + (4 - 27 + 48 - 25)n\\
= {} & \tfrac{1}{4}n^4 + \tfrac{1}{2}n^3 + \tfrac{1}{4}n^2 = \tfrac{n^2(n^2+2n+1)}{4} = \tfrac{n^2(n+1)^2}{4}
\end{aligned}
$$

Mit dieser Summenformel begeben Sie sich nun an die Berechnung von $\int_0^2 x^3dx$ mittels Untersummen. Bei Aufteilung von $[0;2]$ in n gleich große Teilintervalle der Breite $\frac{2}{n}$ erhalten Sie

$$
\begin{aligned}
&\tfrac{2}{n}(f(0) + f(0 + \tfrac{2}{n}) + f(0 + \tfrac{4}{n}) + \cdots + f(0 + \tfrac{2(n-1)}{n})\\
&= \tfrac{2}{n}(0^3 + (\tfrac{2}{n})^3 + (\tfrac{4}{n})^3 + \cdots + (\tfrac{2(n-1)}{n})^3\\
&= \tfrac{2}{n^4}(0^3 + 2^3 + 4^3 + \cdots + (2(n-1))^3)\\
&= \tfrac{2^4}{n^4}(0^3 + 1^3 + 2^3 + \cdots + (n-1)^3) = \tfrac{16}{n^4}\tfrac{(n-1)^2n^2}{4} = 4\cdot\tfrac{n^2-2n+1}{n^2}
\end{aligned}
$$

Der Grenzwert dieser Folge für $n \to \infty$ ist 4. Berechnet man die Fläche über den Hauptsatz, so ergibt sich derselbe Wert $\int_0^2 x^3dx = [\frac{1}{4}x^4]_{x=0}^{x=2} = 4.$

Aufgabe 9.

a) Eine Skizze des Graphen zeigt, dass die Fläche ein um 90 Grad gedrehtes Trapez ist, dessen Flächeninhalt $\frac{f(0)+f(1)}{2}(1-0)=\frac{5}{4}$ ist.

b) Mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ergibt sich: $\int_0^1 f(x)dx=[\frac{1}{4}x^2+x]_{x=0}^{x=1}=\frac{5}{4}$

c) Die Rechteckssumme ist

$$\begin{aligned}
&\frac{f(0)+f(\frac{1}{n})+\cdots+f(\frac{n-1}{n})}{n}\\
&=\frac{(\frac{1}{2}\cdot 0+1)+(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n}+1)+(\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{n}+1)+\cdots+(\frac{1}{2}\cdot\frac{n-1}{n}+1)}{n}\\
&=\frac{\frac{1}{2}(0+\frac{1}{n}+\cdots+\frac{n-1}{n})+n}{n}\\
&=\frac{\frac{1}{2}\frac{0+1+\cdots+(n-1)}{n}+n}{n}\\
&=\frac{\frac{1}{2}\frac{(n-1)n}{2n}+n}{n}=\frac{\frac{1}{4}(n-1)+n}{n}=\frac{\frac{5}{4}n-\frac{1}{4}}{n}
\end{aligned}$$

Grenzwert dieser gebrochen-rationalen Folge für $n\to\infty$ ist $\frac{5}{4}$.

Aufgabe 10.

a) $\int_0^6(x^3-2x^2+5)dx=\int_0^6 x^3dx-2\int_0^6 x^2dx+\int_0^6 5dx=[\frac{1}{4}x^4]_{x=0}^{x=6}-2[\frac{1}{3}x^3]_{x=0}^{x=6}+[5x]_{x=0}^{x=6}=324-2\cdot 72+30=210$

b) $\int_{-3\sqrt{2}}^{3\sqrt{2}}(x+1)(2x-3)dx=\int_{-3\sqrt{2}}^{3\sqrt{2}}(2x^2-x-3)dx=2\int_{-3\sqrt{2}}^{3\sqrt{2}}x^2dx-\int_{-3\sqrt{2}}^{3\sqrt{2}}xdx-\int_{-3\sqrt{2}}^{3\sqrt{2}}3dx=2[\frac{1}{3}x^3]_{x=-3\sqrt{2}}^{x=3\sqrt{2}}-[\frac{1}{2}x^2]_{x=-3\sqrt{2}}^{x=3\sqrt{2}}-[3x]_{x=-3\sqrt{2}}^{x=3\sqrt{2}}=72\sqrt{2}+0-18\sqrt{2}=54\sqrt{2}$

c) $\int_1^e(e\ln(x)+2x)dx=e\int_1^e\ln(x)dx+2\int_1^e xdx=e[x\ln(x)-x]_{x=1}^{x=e}+2[\frac{1}{2}x^2]_{x=1}^{x=e}=e+e^2-1$

d) $\int_1^e\frac{x+1}{x}dx=\int_1^e(1+\frac{1}{x})dx=\int_1^e 1dx+\int_1^e\frac{1}{x}dx=[x]_{x=1}^{x=e}+[\ln(x)]_{x=1}^{x=e}=e-1+1=e$

e) Bei dieser und den nächsten beiden Teilaufgaben kann man die Stammfunktionen nicht unmittelbar aus der Tabelle ablesen, weil die Variable x jeweils durch eine lineare Funktion in x ersetzt ist. Dann muss man den Faktor der Stammfunktion geeignet anpassen. Durch testweises Ableiten von $\frac{2}{3}(4x+1)^{\frac{3}{2}}$kann man in dieser Teilaufgabe herausbekommen, dass im Faktor der Stammfunktion noch die Zahl $\frac{1}{4}$ stecken muss:

$\int_0^2 \sqrt{4x+1}dx = \int_0^2 (4x+1)^{\frac{1}{2}}dx = [\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}(4x+1)^{\frac{3}{2}}]_{x=0}^{x=2} = \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}(4x+1)^{\frac{3}{2}}\Big|_{x=2} - \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}(4x+1)^{\frac{3}{2}}\Big|_{x=0} = \frac{9}{2} - \frac{1}{6} = \frac{13}{3}$

f) $\int_{-a}^{a} \frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}})dx = \frac{a}{2}\int_{-a}^{a} e^{\frac{x}{a}}dx + \frac{a}{2}\int_{-a}^{a} e^{-\frac{x}{a}}dx = \frac{a}{2}[ae^{\frac{x}{a}}]_{x=-a}^{x=a} + \frac{a}{2}[-ae^{-\frac{x}{a}}]_{x=-a}^{x=a}$ $: -\frac{1}{2}a\left(ae^{-1}-ae\right) - \frac{1}{2}a\left(ae^{-1}-ae\right) = -a\left(ae^{-1}-ae\right) = -a^2(\frac{1}{e}-e) = a^2\frac{e^2-1}{e}$

g) Führen Sie zunächst eine Polynomdivision und anschließend eine Partialbruchzerlegung für den Integranden aus:

$(\frac{x+1}{x-1})^2 = \frac{x^2+2x+1}{x^2-2x+1} = 1 + \frac{4x}{x^2-2x+1} = 1 + \frac{4}{x-1} + \frac{4}{(x-1)^2}$. Jetzt können die Stammfunktionen summandenweisemit Hilfe der Tabelle angegeben werden:

$\int(\frac{x+1}{x-1})^2dx = \int\left(1+\frac{4}{x-1}+\frac{4}{(x-1)^2}\right)dx = \int 1dx + 4\int\frac{1}{x-1}dx + 4\int(x-1)^{-2}dx = x + 4\ln(x-1) - \frac{4}{x-1}$

Aufgabe 11.

a) $\int(5+x)e^x dx = \int g'(x)h(x)dx$ mit $h(x) = 5+x$, $h'(x) = 1$ und $g'(x) = e^x$, $g(x) = e^x$

Damit $\int(5+x)e^x dx = g(x)h(x) - \int g(x)h'(x)dx = (5+x)e^x - \int 1\cdot e^x dx = (5+x)e^x - e^x = e^x\,(x+4)$

b) $\int\sin^2(x)dx = \int g'(x)h(x)dx$ mit $g'(x) = \sin(x), g(x) = -\cos(x)$ und $h(x) = \sin(x), h'(x) = \cos(x)$

Damit $\int\sin^2(x)dx = g(x)h(x) - \int g(x)h'(x)dx$
$= -\sin(x)\cos(x) - \int(-\cos(x))\cos(x)dx = -\sin(x)\cos(x) + \int\cos^2(x)dx = -\sin(x)\cos(x) + \int(1-\sin^2(x))dx$.

Hier wurde das Additionstheorem $\sin^2(x)+\cos^2(x) = 1$ verwendet. Der zuletzt erhaltene Term vereinfacht sich dann noch zu $-\sin(x)\cos(x)+x-\int\sin^2(x)dx$ und das Phönix-Prinzip wird deutlich: Es gilt $\int\sin^2(x)dx = x - \sin(x)\cos(x) - \int\sin^2(x)dx$. Durch Auflösen nach dem gesuchten Integral erhält man $\int\sin^2(x)dx = \frac{x-\sin(x)\cos(x)}{2}$.

c) $\int x\cos(x)dx = \int g'(x)h(x)dx$ mit $g'(x) = \cos(x), g(x) = \sin(x)$ und $h(x) = x$, $h'(x) = 1$.

Damit $\int x\cos(x)dx = g(x)h(x) - \int g(x)h'(x)dx = x\sin(x) - \int 1\cdot\sin(x)dx = x\sin(x) + \cos(x)$

d) $\int\ln(x)^2dx = \int g'(x)h(x)dx$ mit $g'(x) = \ln(x), g(x) = x\ln(x) - x$ und $h(x) = \ln(x), h'(x) = \frac{1}{x}$

Damit $\int \ln(x)^2 dx = g(x)h(x) - \int g(x)h'(x)dx = (x\ln(x) - x)\ln(x) - \int (x\ln(x) - x)\frac{1}{x}dx = (x\ln(x) - x)\ln(x) - \int (\ln(x) - 1)dx = (x\ln(x) - x)\ln(x) - (x\ln(x) - 2x) = x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x$

e) Manchmal versteckt sich der Faktor $g'(x) = 1$ im Integranden, so wie in dieser Aufgabe:
$\int \ln(\frac{x}{1-x})dx = \int g'(x)h(x)dx$ mit $g'(x) = 1, g(x) = x$ und $h(x) = \ln(\frac{x}{1-x}), h'(x) = \frac{1-x}{x} \cdot \frac{(1-x)+x}{(1-x)^2} = \frac{1}{x(1-x)}$

Damit $\int \ln(\frac{x}{1-x})dx = g(x)h(x) - \int g(x)h'(x)dx = x\ln(\frac{x}{1-x}) - \int \frac{x}{x(1-x)}dx = x\ln(\frac{x}{1-x}) + \ln(1-x) = x\ln(x) + (1-x)\ln(1-x)$

Aufgabe 12.

a) $\int (2x^2+1)^{10} 5x dx = \frac{5}{4}\int (2x^2+1)^{10} 4x dx = \frac{5}{4}\int h(g(x))g'(x)dx$ mit $h(x) = x^{10}, H(x) = \int h(x)dx = \frac{1}{11}x^{11}$ und $g(x) = 2x^2+1,\ g'(x) = 4x$.

Damit $\int (2x^2+1)^{10} 5x dx = \frac{5}{4}H(g(x)) = \frac{5}{4}\frac{1}{11}(2x^2+1)^{11} = \frac{5}{44}(2x^2+1)^{11}$

b) $\int xe^{-x^2}dx = -\frac{1}{2}\int e^{-x^2}(-2x)dx = -\frac{1}{2}\int h(g(x))g'(x)dx$ mit $h(x) = e^x, H(x) = \int h(x)dx = e^x$ und $g(x) = -x^2, g'(x) = -2x$.

Damit $\int xe^{-x^2}dx = -\frac{1}{2}H(g(x)) = -\frac{1}{2}e^{-x^2}$

c) Schreibe $x^{2x} = e^{2x\ln(x)}$; der Funktionsterm im Exponenten hat die Ableitung $2\ln(x) + 2 = 2(1+\ln(x))$. Also
$\int (1+\ln(x))x^{2x}dx = \int (1+\ln(x))e^{2x\ln(x)}dx = \frac{1}{2}\int (2+2\ln(x))e^{2x\ln(x)}dx = \frac{1}{2}\int h(g(x))g'(x)dx$ mit $g(x) = 2x\ln(x), g'(x) = 2+2\ln(x)$ und $h(x) = e^x, H(x) = \int e^x dx = e^x$.

Damit $\int (1+\ln(x))x^{2x}dx = \frac{1}{2}H(g(x)) = \frac{1}{2}e^{2x\ln(x)} = \frac{1}{2}x^{2x}$

Aufgabe 13.

Die Fläche eines ein Meter breiten Logos ergibt sich durch die von den Graphen von f und g im Intervall $[0;1]$ begrenzten Flächen. Aus Symmetriegründen genügt es, sich dabei auf die Fläche über $[0;\frac{1}{2}]$ zu beschränken und diese anschließend zu verdoppeln.

Zunächst sind die Schnittpunkte der Graphen zu bestimmen:

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow 3(2x-1)\sqrt{x(1-x)}) = 0$$

Es ergeben sich lediglich $x = 0$, $x = 1$ und $x = \frac{1}{2}$ als Schnittstellen. In $[0;\frac{1}{2}]$ liegt also ein einheitliches Vorzeichenverhalten vor. Durch Probieren erhält man

$$f(\tfrac{1}{4}) = 3\tfrac{1}{4}\sqrt{\tfrac{1}{4}\tfrac{3}{4}} < 3(1-\tfrac{1}{4})\sqrt{\tfrac{3}{4}\tfrac{1}{4}} = g(\tfrac{1}{4})$$

Der gesuchte Flächeninhalt des halben Logos ist also

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{1}{2}}(g(x)-f(x))dx &= \int_0^{\frac{1}{2}} 3(1-2x)\sqrt{x(1-x)}dx\\ &= 3\int_0^{\frac{1}{2}}(1-2x)\sqrt{x-x^2}dx\\ &= 3\int_0^{\frac{1}{2}}(1-2x)(x-x^2)^{\frac{1}{2}}dx\\ &= 3\int h(g(x))g'(x)dx\end{aligned}$$

mit $h(x)=x^{\frac{1}{2}}, H(x)=\int h(x)dx=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$ und $g(x)=x-x^2, g'(x)=1-2x$. Also ergibt sich mit der Substitutionsregel

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{1}{2}}(g(x)-f(x))dx &= 3[H(g(x))]_{x=0}^{x=\frac{1}{2}}\\ &= 3[\tfrac{2}{3}(x-x^2)^{\frac{3}{2}}]_{x=0}^{x=\frac{1}{2}}\\ &= 3\cdot\tfrac{2}{3}(x-x^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_{x=\frac{1}{2}} - 3\cdot\tfrac{2}{3}(x-x^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_{x=0}\\ &= \tfrac{1}{4}\end{aligned}$$

Der gesamte Flächeninhalt des ein Meter breiten Logos ist dann $\frac{1}{2}$ und des vier Meter breiten Logos das 16-fache dieses Flächeninhaltes (Breite und Höhe vervierfachen sich jeweils), beträgt also 8 (Quadratmeter). Das Logo wiegt also $8\cdot 445=3560$ Kilogramm.

Aufgabe 14.

Das Glas ist symmetrisch zur Ordinate, daher genügt es den halben Flächeninhalt zu bestimmen und alle auftretenden Funktionen nur im Intervall $[0;\frac{3}{2}]$ zu untersuchen. Der obere Teil des (halben) Glases ist die Fläche zwischen den Graphen der Funktion $f(x)=e^{\frac{3}{2}x-\frac{1}{4}}+\frac{1}{2}$ und $g(x)=f(\frac{3}{2})=e^2+\frac{1}{2}$, wobei $f(x)\leq g(x)$ auf $[0;\frac{3}{2}]$ (denn f ist streng monoton wachsend, nimmt den größten Wert am rechten Intervallrand $x=\frac{3}{2}$ an, der für die konstante Funktion $g(x)$ verwendet wird. Also beträgt die obere (halbe) Fläche

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{3}{2}}(g(x)-f(x))dx &= \int_0^{\frac{3}{2}}(e^2+\tfrac{1}{2}-(e^{\frac{3}{2}x-\frac{1}{4}}+\tfrac{1}{2}))dx\\ &= \int_0^{\frac{3}{2}}(e^2-e^{\frac{3}{2}x-\frac{1}{4}})dx\\ &= [e^2x-\tfrac{2}{3}e^{\frac{3}{2}x-\frac{1}{4}}]_{x=0}^{x=\frac{3}{2}}\\ &= e^2x-\tfrac{2}{3}e^{\frac{3}{2}x-\frac{1}{4}}\Big|_{x=\frac{3}{2}} - e^2x-\tfrac{2}{3}e^{\frac{3}{2}x-\frac{1}{4}}\Big|_{x=0}\\ &= \tfrac{5}{6}e^2-(-\tfrac{2}{3}e^{-\frac{1}{4}})\\ &\approx \tfrac{5}{6}e^2+\tfrac{2}{3}e^{-\frac{1}{4}}\end{aligned}$$

Die gesamte Fläche des oberen Teils der Figur ist $\frac{5}{3}e^2+\frac{4}{3}e^{-\frac{1}{4}}\approx 13.3535$.

Für die untere (halbe) Fuß-Fläche ist die Tangente an den Graph von f im Punkt $(0|f(0))$ zu berechnen, d.h. $h(x)=f(0)+f'(0)x$. Es ist

$$\begin{aligned}f(0) &= e^{-\frac{1}{4}}+\tfrac{1}{2}\\ f'(x) &= \tfrac{3}{2}e^{\frac{3}{2}x-\frac{1}{4}}, f'(0)=\tfrac{3}{2}e^{-\frac{1}{4}}\end{aligned}$$

also $h(x) = \frac{3}{2}e^{-\frac{1}{4}}x + e^{-\frac{1}{4}} + \frac{1}{2}$. Die Nullstelle von h legt die linke (!) Grenze der Basis des Fußdreiecks fest, also

$$h(x) = 0 \Leftrightarrow \tfrac{3}{2}e^{-\frac{1}{4}}x + e^{-\frac{1}{4}} + \tfrac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{e^{-\frac{1}{4}}+\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}e^{-\frac{1}{4}}}$$

Die rechte Grenze der Basis ist dann $\frac{e^{-\frac{1}{4}}+\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}e^{-\frac{1}{4}}}$. Das Dreieck hat dann den Flächeninhalt

$$\tfrac{1}{2}\left(\frac{e^{-\frac{1}{4}}+\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}e^{-\frac{1}{4}}} - \left(-\frac{e^{-\frac{1}{4}}+\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}e^{-\frac{1}{4}}}\right)\right)\left(e^{-\frac{1}{4}} + \tfrac{1}{2}\right) = \frac{\left(e^{-\frac{1}{4}}+\frac{1}{2}\right)^2}{\frac{3}{2}e^{-\frac{1}{4}}} \approx 1,3999$$

Gesamtinhalt der Figur: $\frac{5}{3}e^2 + \frac{4}{3}e^{-\frac{1}{4}} + \frac{\left(e^{-\frac{1}{4}}+\frac{1}{2}\right)^2}{\frac{3}{2}e^{-\frac{1}{4}}} \approx 14,7534\ \text{cm}^2$

Aufgabe 15.

a) $f(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$ hat als eine Stammfunktion $F(x) = -\frac{1}{1+x}$. Bei endlicher Intervallgrenze $b > 0$ ist daher das gesuchte Integral

$$\int_0^b \frac{1}{(x-1)^2}dx = F(b) - F(0) = \left(-\frac{1}{1+b} - \left(-\frac{1}{1+0}\right)\right) = 1 - \frac{1}{b+1}$$

Das gesuchte Integral ist daher

$$\int_0^\infty \frac{1}{(1+x)^2}dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b \frac{1}{(x-1)^2}dx = \lim_{b\to\infty}\left(1 - \frac{1}{b+1}\right) = 1$$

b) $f(x) = \frac{\ln(x)}{x^2}$ hat als eine Stammfunktion $F(x) = -\frac{\ln(x)+1}{x}$. Bei endlicher Intervallgrenze $b > 0$ ist daher das gesuchte Integral

$$\int_1^b \frac{\ln(x)}{x^2}dx = F(b) - F(1) = \left(-\frac{\ln(b)+1}{b} - \left(-\frac{\ln(1)+1}{1}\right)\right) = 1 - \left(\frac{\ln(b)+1}{b}\right)$$

Das gesuchte Integral ist daher

$$\int_1^\infty \frac{\ln(x)}{x^2}dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{\ln(x)}{x^2}dx = \lim_{b\to\infty}\left(1 - \left(\frac{\ln(b)+1}{b}\right)\right) = 1$$

Der Grenzwert ergibt sich mit der Regel von L'Hospital: $\lim_{b\to\infty}\frac{\ln(b)}{b} = \lim_{b\to\infty}\frac{1/b}{1} = 0$

Aufgabe 16.

a) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-\frac{1}{2}}$ hat als eine Stammfunktion $F(x) = 2x^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{x}$. Bei endlicher Intervallgrenze $a > 0$ ist daher das gesuchte Integral

$$\int_a^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = F(1) - F(a) = (2\sqrt{1} - 2\sqrt{a}) = 2(1 - \sqrt{a})$$

Das gesuchte Integral ist daher

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \lim_{a\to 0}\int_a^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \lim_{a\to 0}(2(1 - \sqrt{a})) = 2$$

b) $f(x) = x\ln(\frac{1}{x})$hat als eine Stammfunktion $F(x) = \frac{1}{2}x^2\ln\frac{1}{x} + \frac{1}{4}x^2$(partielle Integration). Bei endlicher Intervallgrenze $a > 0$ ist daher das gesuchte Integral

$$\begin{aligned} \int_a^1 x\ln(\tfrac{1}{x})dx &= F(1) - F(a) = \tfrac{1}{2}1^2\ln\tfrac{1}{1} + \tfrac{1}{4}1^2 - (\tfrac{1}{2}a^2\ln\tfrac{1}{a} + \tfrac{1}{4}a^2) \\ &= \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{4}a^2 + \tfrac{1}{2}a^2\ln a \end{aligned}$$

Das gesuchte Integral ist daher

$$\int_0^1 x\ln(\tfrac{1}{x})dx = \lim_{a\to 0}\int_a^1 x\ln(\tfrac{1}{x})dx = \lim_{a\to 0}(\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{4}a^2 + \tfrac{1}{2}a^2\ln a)$$

Hier ergibt sich der Grenzwert $\lim_{a\to 0}(a^2\ln a) = \lim_{a\to 0}\frac{\ln(a)}{1/a^2} = \lim_{a\to 0}\frac{1/a}{-2/a^3} = 0$ mit der Regel von L'Hospital.

c) Vereinfachen Sie zunächst den Funktionsterm $f(x) = \ln(\frac{x}{1-x}) = \ln(x) - \ln(1-x)$. Aus der Stammfunktionstabelle liest man $\int\ln(x)dx = x(\ln x - 1)$ ab. Hieraus folgt (Substitutionsregel mit $g(x) = 1-x, g'(x) = -1$) $\int\ln(1-x)dx = -(1-x)(\ln(1-x)-1)$. Also hat f die Stammfunktion $F(x) = x(\ln x - 1) + (1-x)(\ln(1-x)-1) = (1-x)\ln(1-x) + x\ln x - 1$.

Die Randgrenzwerte lauten

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} f(x) &= -\infty \\ \lim_{x\to 1} f(x) &= +\infty \end{aligned}$$

Es ist also das gesuchte Integral durch Aufspalten zu berechnen, wobei sich als Aufspaltungswert $x = \frac{1}{2}$ anbietet, weil f dort die einzige Nullstelle hat. Betrachten Sie erst das rechte Teilintegral mit Integrationsgrenze $b < 1$

$$\begin{aligned} \int_{\frac{1}{2}}^b \ln(\tfrac{x}{1-x})dx &= [(1-x)\ln(1-x) + x\ln x - 1]_{x=\frac{1}{2}}^{x=b} \\ &= (1-x)\ln(1-x) + x\ln x - 1|_{x=b} \\ &\quad - (1-x)\ln(1-x) + x\ln x - 1|_{x=\frac{1}{2}} \\ &= (1-b)\ln(1-b) + b\ln(b) - 1 - (\ln(\tfrac{1}{2}) - 1) \\ &= (1-b)\ln(1-b) + b\ln(b) + \ln(2) \end{aligned}$$

Der Grenzwert ist dann (wieder mit L'Hospital)

$$\begin{aligned} \int_{\frac{1}{2}}^1 \ln(\tfrac{x}{1-x})dx &= \lim_{b\to 1}\int_{\frac{1}{2}}^b \ln(\tfrac{x}{1-x})dx \\ &= \lim_{b\to 1}((1-b)\ln(1-b) + b\ln(b) + \ln(2)) = \ln(2) \end{aligned}$$

Für das linke Teilintegral mit Integrationsgrenze $a > 0$ ergibt sich

$$\begin{aligned} \int_a^{\frac{1}{2}} \ln(\tfrac{x}{1-x})dx &= [(1-x)\ln(1-x) + x\ln x - 1]_{x=a}^{x=\frac{1}{2}} \\ &= (1-x)\ln(1-x) + x\ln x - 1|_{x=\frac{1}{2}} \\ &\quad - (1-x)\ln(1-x) + x\ln x - 1|_a \\ &= (\ln(\tfrac{1}{2}) - 1) - ((1-a)\ln(1-a) + a\ln(a) - 1) \\ &= -\ln(2) - (1-a)\ln(1-a) - a\ln(a) \end{aligned}$$

Auch hier ergibt sich der Grenzwert mit L'Hospital

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{1}{2}} \ln(\tfrac{x}{1-x})dx &= \lim_{a\to 0}\int_a^{\frac{1}{2}} \ln(\tfrac{x}{1-x})dx \\ &= \lim_{a\to 0}(-\ln(2)-(1-a)\ln(1-a)-a\ln(a)) = -\ln(2)\end{aligned}$$

Beide Teilintegrale sind endlich, also existiert auch $\int_0^1 \ln(\frac{x}{1-x})dx$ und ist gleich der Summe der Teilintegrale, also

$$\int_0^1 \ln(\tfrac{x}{1-x})dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \ln(\tfrac{x}{1-x})dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 \ln(\tfrac{x}{1-x})dx = -\ln(2)+\ln(2) = 0$$

d) Hier ist die Integrationsgrenze $x = 1$ eine Definitionslücke, also ist

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 \tfrac{1}{(x-1)^2}dx &= \lim_{b\to 1}\int_{-1}^b \tfrac{1}{(x-1)^2}dx \\ &= \lim_{b\to 1}[-\tfrac{1}{x-1}]_{x=-1}^{x=b} \\ &= \lim_{b\to 1}(-\tfrac{1}{b-1}-(-\tfrac{1}{1-(-1)})) = \infty\end{aligned}$$

Aufgabe 17.

Der Flächeninhalt von B ist das uneigentliche Integral $\int_1^\infty \frac{1}{x^t}dx$, der Flächeninhalt von A das uneigentliche Integral $\int_0^1 \frac{1}{x^t}dx$ abzüglich 1 (der Fläche des Quadrates Q). A bzw. B haben also jeweils endlichen Flächeninhalt, wenn $\int_1^\infty \frac{1}{x^t}dx < \infty$ bzw. $\int_0^1 \frac{1}{x^t}dx < \infty$. Beide Integrale werden nun als Grenzwerte dargestellt, wobei eine Stammfunktion F von $f(x) = \frac{1}{x^t} = x^{-t}$ benötigt wird. Für $t \neq 1$ ist dies $F(x) = \frac{1}{1-t}x^{1-t}$, für $t = 1$ ist dies $F(x) = \ln(x)$.

[1] Im Fall $t > 1$ gilt:

[a] $\int_1^\infty \frac{1}{x^t}dx = \lim\limits_{b\to\infty}\int_1^b \frac{1}{x^t}dx = \lim\limits_{b\to\infty}[\frac{1}{1-t}x^{1-t}]_{x=1}^{x=b} = \lim\limits_{b\to\infty}(\frac{1}{t-1}-\frac{b^{1-t}}{t-1}) = \lim\limits_{b\to\infty}(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{(t-1)b^{t-1}}) = \frac{1}{t-1} < \infty$

[b] $\int_0^1 \frac{1}{x^t}dx = \lim\limits_{a\to 0}\int_a^1 \frac{1}{x^t}dx = \lim\limits_{a\to 0}[\frac{1}{1-t}x^{1-t}]_{x=a}^{x=1} = \lim\limits_{a\to 0}(\frac{a^{1-t}}{t-1}-\frac{1}{t-1}) = \lim\limits_{a\to 0}(\frac{1}{(t-1)a^{t-1}}-\frac{1}{t-1}) = \infty$

[2] Im Fall $t = 1$ gilt:

[a] $\int_1^\infty \frac{1}{x}dx = \lim\limits_{b\to\infty}\int_1^b \frac{1}{x}dx = \lim\limits_{b\to\infty}[\ln(x)]_{x=1}^{x=b} = \lim\limits_{b\to\infty}(\ln(b)-\ln(1)) = \lim\limits_{b\to\infty}\ln(b) = \infty$

[b] $\int_0^1 \frac{1}{x}dx = \lim\limits_{a\to 0}\int_a^1 \frac{1}{x}dx = \lim\limits_{a\to 0}[\ln(x)]_{x=a}^{x=1} = \lim\limits_{a\to 0}(\ln(1)-\ln(a)) = -\lim\limits_{a\to 0}\ln(a) = \infty$

[3] Im Fall $t < 1$ gilt:

[a] $\int_1^\infty \frac{1}{x^t} dx = \lim\limits_{b\to\infty} \int_1^b \frac{1}{x^t} dx = \lim\limits_{b\to\infty} [\frac{1}{1-t} x^{1-t}]_{x=1}^{x=b} = \lim\limits_{b\to\infty} (\frac{1}{t-1} - \frac{b^{1-t}}{t-1}) = \lim\limits_{b\to\infty} (\frac{1}{t-1} + \frac{b^{1-t}}{1-t}) = \infty$

[b] $\int_0^1 \frac{1}{x^t} dx = \lim\limits_{a\to 0} \int_a^1 \frac{1}{x^t} dx = \lim\limits_{a\to 0} [\frac{1}{1-t} x^{1-t}]_{x=a}^{x=1} = \lim\limits_{a\to 0} (\frac{a^{1-t}}{t-1} - \frac{1}{t-1}) = -\frac{1}{t-1} = \frac{1}{1-t} < \infty$

Also hat A nur im Fall $t < 1$ und B nur im Fall $t > 1$ jeweils endlichen Flächeninhalt $\frac{1}{|1-t|}$.

Aufgabe 18.

Für $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ und $x \geq 1$ gilt $x^{n+1} \geq x^n \Leftrightarrow \frac{1}{x^n} \geq \frac{1}{x^{n+1}}$, d.h. es ist $f(x) \geq g(x)$. Die genannte Fläche hat also den Flächeninhalt

$$\begin{aligned}
\int_1^\infty (f(x) - g(x))dx &= \lim_{b\to\infty} \int_1^b (x^{-n} - x^{-n-1})dx \\
&= \lim_{b\to\infty} [\tfrac{1}{1-n} x^{1-n} + \tfrac{1}{n} x^{-n}]_{x=1}^{x=b} \\
&= \lim_{b\to\infty} \left(\frac{1}{b^n n} - \frac{1}{b^{n-1}(n-1)} + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) \\
&= \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \\
&= \frac{1}{n(n-1)}
\end{aligned}$$

Aufgabe 19.

Es ist das uneigentliche Integral $\int_{-\infty}^\infty e^{-nx-e^{-x}} dx$ zu bestimmen. Der Flächeninhalt kann auf zwei verschiedene Arten berechnet werden: mit Hilfe der Substitutionsregel durch Zurückführung auf die Gamma-Funktion oder mittels partieller Integration.

[1] Zurückführung mit Substitutionsregel auf die Gammafunktion : mit $g(x) = e^{-x}, g'(x) = -e^{-x}$

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^\infty e^{-nx-e^{-x}} dx &= -\int_{-\infty}^\infty (e^{-x})^{n-1} e^{-e^{-x}} \cdot (-e^{-x})dx \\
&= -\int_{\liminf\limits_{a\to-\infty} e^{-a}}^{\lim\limits_{b\to\infty} e^{-b}} x^{n-1} e^{-x} dx \\
&= -\int_\infty^0 x^{n-1} e^{-x} dx \\
&= \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x} dx = \Gamma(n) = (n-1)!
\end{aligned}$$

Dabei wurde die Integrationsregel $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$ (für stetige Funktion f) im uneigentlichen Sinne verwendet. Die Vertauschung der

Integrationsgrenzen ist mit der Interpretation des Integrals als Fläche nicht gut vereinbar, sie ergibt sich aber sofort aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.

[2] Anwendung der Regel der partiellen Integration auf $g'(x) = e^{-nx}, g(x) = -\frac{1}{n}e^{-nx}$ und $h(x) = e^{-e^{-x}}, h'(x) = e^{-x-e^{-x}}$

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-nx}e^{-e^{-x}}dx &= [-\tfrac{1}{n}e^{-nx}e^{-e^{-x}}]_{x=-\infty}^{x=\infty} + \tfrac{1}{n}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-nx}e^{-x-e^{-x}}dx \\ &= \tfrac{1}{n}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(n+1)x-e^{-x}}dx\end{aligned}$$

Also folgt $G_{n+1} = nG_n$. Durch sukzessives Einsetzen erhält man

$$\begin{aligned}G_n &= (n-1)G_{n-2} \\ &= (n-1)(n-2)G_{n-3} \\ &= (n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1\cdot G_1\end{aligned}$$

Der Wert von G_1ist

$$G_1 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x-e^{-x}}dx = [e^{-e^{-x}}]_{x=-\infty}^{x=\infty} = 1$$

Daraus folgt $G_n = (n-1)!$

Der Darstellung im Text folgend müssten alle auftretenden uneigentlichen Integrale der Form $\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)dx$ als Summe von Grenzwerten eigentlicher Integrale, also z.B. in der Form $\lim\limits_{a\to-\infty}\int_a^0 f_n(x)dx + \lim\limits_{b\to\infty}\int_0^b f_n(x)dx$ geschrieben und die einzelnen Integrale ausgerechnet werden. Dies führt hier jeweils zum genannten Ergebnis, ist aber wesentlich aufwändiger und soll an dieser Stelle unterbleiben.

Aufgabe 20.

a) $A(x) = N(x) \Leftrightarrow \frac{1}{20}x = 5 - \frac{1}{30}x \Leftrightarrow x = x^* = 60.$

Dazu ist der Break-Even-Preis $p = A(60) = 3 = N(60)$.

Die Flächenanteile der Konsumentenrente und Produzentenrente ergänzen sich jeweils zur Fläche, die von den Graphen von A und N eingeschlossen wird. Weil $N(x) \geq A(x)$ für alle $x \in [0; x^*]$, beträgt die Wohlfahrt daher

$$\begin{aligned}\int_0^{x^*}(N(x) - A(x))dx &= \int_0^{60}((5 - \tfrac{1}{30}x) - \tfrac{1}{20}x)dx \\ &= \int_0^{60}(5 - \tfrac{1}{12}x)dx \\ &= [5x - \tfrac{1}{24}x^2]_{x=0}^{x=60} \\ &= (5x - \tfrac{1}{24}x^2)\Big|_{x=60} - (5x - \tfrac{1}{24}x^2)\Big|_{x=0} \\ &= 150\end{aligned}$$

b) $A(x) = N(x) \Leftrightarrow \frac{13}{20}x + 3 = 20 - \frac{1}{100}x^2 \Leftrightarrow \frac{1}{100}x^2 + \frac{13}{20}x - 17 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 65x - 1700 = 0$. Von den Lösungen $x = 20$ und $x = -85$ liegt nur $x = x^* = 20$ im ökonomischen Definitionsbereich $[0; \infty[$.

Dazu ist der Break-Even-Preis $p = A(20) = 16$. Die Wohlfahrt beträgt

$$\begin{aligned}
\int_0^{x^*}(N(x) - A(x))dx &= \int_0^{20}((20 - \tfrac{1}{100}x^2) - (\tfrac{13}{20}x + 3))dx \\
&= \int_0^{20}(-\tfrac{1}{100}x^2 - \tfrac{13}{20}x + 17)dx \\
&= [-\tfrac{1}{300}x^3 - \tfrac{13}{40}x^2 + 17x]_{x=0}^{x=20} \\
&= (-\tfrac{1}{300}x^3 - \tfrac{13}{40}x^2 + 17x)\Big|_{x=20} \\
&\quad - (-\tfrac{1}{300}x^3 - \tfrac{13}{40}x^2 + 17x)\Big|_{x=0} \\
&= \tfrac{550}{3}
\end{aligned}$$

c) $A(x) = N(x) \Leftrightarrow \frac{3}{4}\left(\frac{x}{100}\right)^{\frac{3}{2}} + 4 = 14 - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{100}\right)^{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow \frac{5}{4}\left(\frac{x}{100}\right)^{\frac{3}{2}} = 10 \Leftrightarrow \left(\frac{x}{100}\right)^{\frac{3}{2}} = 8 \Leftrightarrow x = x^* = 100 \cdot 8^{\frac{2}{3}} = 400$.

Dazu ist der Break-Even-Preis $A(400) = \frac{3}{4} \cdot (\frac{400}{100})^{\frac{3}{2}} + 4 = 10 = N(400)$. Die Wohlfahrt beträgt

$$\begin{aligned}
\int_0^{x^*}(N(x) - A(x))dx &= \int_0^{400}((14 - \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{x}{100}\right)^{\frac{3}{2}}) - (\tfrac{3}{4}\left(\tfrac{x}{100}\right)^{\frac{3}{2}} + 4))dx \\
&= \int_0^{400}(10 - \tfrac{1}{800}x^{\frac{3}{2}})dx \\
&= [10x - \tfrac{1}{2000}x^{\frac{5}{2}}]_{x=0}^{x=400} \\
&= (10x - \tfrac{1}{2000}x^{\frac{5}{2}})\Big|_{x=400} - (10x - \tfrac{1}{2000}x^{\frac{5}{2}})\Big|_{x=0} \\
&= 2400
\end{aligned}$$

d) $A(x) = N(x) \Leftrightarrow e^{\frac{2}{5}x} + \frac{5}{e} = e^2 + 5e^{-\frac{1}{5}x} \Leftrightarrow e^{\frac{3}{5}x} + (\frac{5}{e} - e^2)e^{\frac{1}{5}x} - 5 = 0 \Leftrightarrow (e^{\frac{1}{5}x})^3 + (\frac{5}{e} - e^2)e^{\frac{1}{5}x} - 5 = 0$. Substituiert Sie jetzt $y = e^{\frac{1}{5}x}$, so erhalten Sie die Gleichung $y^3 + (\frac{5}{e} - e^2)y - 5 = 0$. Wenn Sie diesen Term als Graph eines Polynoms f skizzieren, so erkennen Sie eine Nullstelle in $[2,5; 3]$. Mit einem handelsüblichen wissenschaftlichen Schultaschenrechner lässt sich die Nullstelle numerisch ermitteln. Alternativ können Sie das Newton-Verfahren durchführen: Mit Startwert $y_0 = 3$ ergeben die ersten drei Schritte des Newton-Verfahrens folgende Tabelle:

	y	$f(y)$	$f'(y)$	$= y - f(y)/f'(y)$
1	3	5.35102	21,4503	2,75054
2	2,75054	0,544553	17,1467	2,71878
3	2,71878	0,00829052	16,6256	2,71828

Der zuletzt gewonnene Wert deutet auf die Lösung $y = e$, was Sie durch Einsetzen bestätigen:

$$e^3 + (\tfrac{5}{e} - e^2)e - 5 = e^3 + 5 - e^3 - 5 = 0$$

Polynomdivision ergibt

$$\frac{y^3+(\frac{5}{e}-e^2)y-5}{y-5} = y^2 + ey + \frac{5}{e}$$

und damit zwei weitere Lösungen der Gleichung $y^2+ey+\frac{5}{e}=0$, nämlich $y \approx -1{,}270\,4$ und $y \approx -1{,}447\,8$. Von den drei gewonnen Lösungen führt aber nur die Lösung $y = 5$ zu einer Lösung für x, nämlich $e^{\frac{1}{5}x} = y = e \Leftrightarrow x = 5\ln(y) = 5$; die anderen negativen Werte für y ergeben jeweils eine unlösbare Gleichung $e^{\frac{1}{5}x} = y$

Zur gefundenen Menge $x = x^* = 5$ ist der Break-Even-Preis $A(5) = e^{\frac{2}{5}\cdot 5} + \frac{5}{e} = e^2 + \frac{5}{e} = \frac{e^3+5}{e} \approx 9{,}228\,5$. Die Wohlfahrt ist

$$\begin{aligned}
\int_0^{x^*}(N(x)-A(x))dx &= \int_0^5((e^2+5e^{-\frac{1}{5}x})-(e^{\frac{2}{5}x}+\tfrac{5}{e}))dx \\
&= \int_0^5(-e^{\frac{2}{5}x}+5e^{-\frac{1}{5}x}+e^2-\tfrac{5}{e})dx \\
&= [-\tfrac{5}{2}e^{\frac{2}{5}x}-25e^{-\frac{1}{5}x}+(e^2-\tfrac{5}{e})x]_{x=0}^{x=5} \\
&= (-\tfrac{5}{2}e^{\frac{2}{5}x}-25e^{-\frac{1}{5}x}+(e^2-\tfrac{5}{e})x)\Big|_{x=5} \\
&\quad -(-\tfrac{5}{2}e^{\frac{2}{5}x}-25e^{-\frac{1}{5}x}+(e^2-\tfrac{5}{e})x)\Big|_{x=0} \\
&= \tfrac{5}{2}e^2-25e^{-1}-\tfrac{25}{e}-(-\tfrac{55}{2}) \\
&\approx 27{,}579
\end{aligned}$$

Aufgabe 21.

a) Der Funktionssteckbrief kann auf zwei Arten gelöst werden: nach dem 5-Punkte-Programm oder mit Lagrange-Polynomen. Beide Wege sollen hier durchgerechnet werden:

Im 5-Punkte-Programm setzen Sie $N(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ an. Es sind vier Funktionswerte vorgegeben, die zu einem linearen Gleichungssystem mit vier Gleichungen und vier Unbekannten führen.

$$\begin{aligned}
d &= 500 \\
200^3a + 200^2b + 200c + d &= 400 \\
800^3a + 800^2b + 800c + d &= 200 \\
1000^3a + 1000^2b + 1000c + d &= 0
\end{aligned}$$

Sie setzen die bereits vorliegende Lösung $d = 500$ in die zweite, dritte und vierte Gleichung ein, und lösen diese Gleichungen nach c (bzw. nach $-c$) auf, das ergibt:

$$\begin{aligned}
d &= 500 \\
200^2a + 200b + \tfrac{1}{2} &= -c \\
800^2a + 800b + \tfrac{3}{8} &= -c \\
1000^2a + 1000b + \tfrac{1}{2} &= -c
\end{aligned}$$

Sie setzen die zweite mit der vierten und die dritte mit der vierten Gleichung gleich und lösen die vierte Gleichung nach c auf:

$$\begin{aligned} d &= 500 \\ 200^2a + 200b + \tfrac{1}{2} &= 1000^2a + 1000b + \tfrac{1}{2} \\ 800^2a + 800b + \tfrac{3}{8} &= 1000^2a + 1000b + \tfrac{1}{2} \\ c &= 1000^2a + 1000b + \tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

Sie vereinfachen die zweite und vierte Gleichung und lösen sie jeweils nach b auf:

$$\begin{aligned} d &= 500 \\ b &= -1200a \\ b &= -1800a - \tfrac{1}{1600} \\ c &= 1000^2a + 1000b + \tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

Sie setzen die zweie und dritte Gleichung über b gleich:

$$\begin{aligned} d &= 500 \\ b &= -1200a \\ 1800a + \tfrac{1}{1600} &= 1200a \\ c &= 1000^2a + 1000b + \tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

Sie bestimmen die Lösung der dritten Gleichung in a und setzen erst für b, anschließend für c ein:

$$\begin{aligned} a &= -\tfrac{1}{960\,000} \\ b &= \tfrac{1200}{960000} = \tfrac{1}{800} \\ c &= 1000^2(-\tfrac{1}{960\,000}) + 1000(\tfrac{1}{800}) + \tfrac{1}{2} = \tfrac{17}{24} \\ d &= 500 \end{aligned}$$

Die gesuchte Funktion lautet also $N(x) = -\frac{1}{960\,000}x^3 + \frac{1}{800}x^2 + \frac{17}{24}x + 500$

Lösung der Aufgabe mit Lagrange-Polynomen: Wegen $N(1000) = 0$ werden nur drei Polynome benötigt:

$$\begin{aligned} p_1(x) &= 500\tfrac{(x-200)(x-800)(x-1000)}{(0-200)(0-800)(0-1000)} = \tfrac{1}{160}x^2 - \tfrac{1}{320\,000}x^3 - \tfrac{29}{8}x + 500 \\ p_2(x) &= 400\tfrac{(x-0)(x-800)(x-1000)}{(200-0)(200-800)(200-1000)} = \tfrac{1}{240\,000}x^3 - \tfrac{3}{400}x^2 + \tfrac{10}{3}x \\ p_3(x) &= 200\tfrac{(x-0)(x-200)(x-1000)}{(800-0)(800-200)(800-1000)} = \tfrac{1}{400}x^2 - \tfrac{1}{480\,000}x^3 - \tfrac{5}{12}x \end{aligned}$$

Das gesuchte Polynom lautet dann

$$\begin{aligned} N(x) &= p_1(x) + p_2(x) + p_3(x) \\ &= -\tfrac{1}{960\,000}x^3 + \tfrac{1}{800}x^2 - \tfrac{17}{24}x + 500 \end{aligned}$$

b) Break-Even-Preis durch Gleichsetzen von Angebots- und Nachfragefunktion

$$\begin{array}{rcl} A(x) & = & N(x) \\ & \Leftrightarrow & \frac{1}{2}x = -\frac{1}{960\,000}x^3 + \frac{1}{800}x^2 - \frac{17}{24}x + 500 \\ & \Leftrightarrow & -\frac{1}{960\,000}x^3 + \frac{1}{800}x^2 - \frac{29}{24}x + 500 = 0 \\ & \Leftrightarrow & x^3 - 1200x^2 + 1160000x - 480000000 = 0 \end{array}$$

Das Erraten einer Nullstelle durch Ausprobieren aller Teiler des konstanten Gliedes $480000000 = 2^{15} \cdot 3 \cdot 5^{11}$ist hier nicht zielführend. Wenn Sie den Graphen (z.B. mit GeoGebra) skizzieren, so erkennen Sie eine Nullstelle in der Nähe von $x = 600$. Tatsächlich ist $x = 600$ eine Nullstelle des Polynoms und es gilt

$$\frac{x^3-1200x^2+1160000x-480000000}{x-600} = x^2 - 600x + 800\,000$$

wobei das gewonnene quadratische Polynom keine Nullstelle mehr hat (Ohne Skizze ergibt sich die Nullstelle $x = 600$ näherungsweise mit dem Newton-Verfahren und dem Startwert $x = 0$ nach vier Iterationen, auch wissenschaftliche Taschenrechner können die Nullstelle bestimmen)

Der Break-Even-Preis lautet $p = A(600) = 300$.

c) Als Produzentenrente erhalten Sie $\int_0^{600} \frac{1}{2}x dx = 90\,000$

Die Wohlfahrt ist

$$\begin{array}{rl} & \int_0^{600}(N(x) - A(x))dx \\ = & \int_0^{600}(-\frac{1}{960\,000}x^3 + \frac{1}{800}x^2 - \frac{29}{24}x + 500)dx \\ = & [-\frac{1}{3840\,000}x^4 + \frac{1}{2400}x^3 - \frac{29}{48}x^2 + 500x]_{x=0}^{x=600} \\ = & -\frac{1}{3840\,000}600^4 + \frac{1}{2400}600^3 - \frac{29}{48}600^2 + 500 \cdot 600 \\ = & 138750 \end{array}$$

Die Konsumentenrente ist dann die Wohlfahrt abzüglich der Produzentenrente, also $138750 - 90000 = 48\,750$.

Aufgabe 22.

Zum Aufgabenkontext wurden wir durch einen Beitrag des WDR-Wissenschaftsmagazins „Quarks&Co“ angeregt.[1]

a) Zur Nachfragefunktion $N(x) = 250 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{1000}x^2 - \frac{1}{1000000}x^3$ ist der Maximalabsatz x_m diejenige maximale Stelle mit $N(x_m) \geq 0$. Überlegen Sie sich zunächst, dass N monoton fallend ist, dann ist die Suche nach dem Maximalabsatz gleichbedeutend mit der Suche nach einer Nullstelle der (stetigen) Funktion N. Die Monotonie von N erkennt man wie folgt:

[1] `http://www.wdr.de/tv/quarks/sendungsbeitraege/2006/0926/007_spinne.jsp`

die Ableitung lautet $N'(x) = -\frac{3}{1000\,000}x^2 + \frac{1}{500}x - \frac{1}{2}$. Diese nach unten geöffnete Parabel hat keine Nullstellen, also ein einheitliches Vorzeichen. Wegen $N'(0) = -\frac{1}{2} < 0$ gilt also $N'(x) \leq 0$ für alle $x > 0$. Daher ist N monoton fallend.

Der ökonomische Definitionsbereich ist das Intervall $[0; x_m]$ mit dem noch zu bestimmenden Maximalabsatz: Hier kann man das Newton-Verfahren anwenden und erhält mit dem Startwert $x = 0$ folgende Tabelle:

	x	$N(x)$	$N'(x)$	$x - N(x)/N'(x)$
1	$0,$	$250,$	$-0,5$	$500,$
2	$500,$	$125,$	$-0,25$	$1000,$
3	$1000,$	$-250,$	$-1,5$	$833,333$
4	$833,333$	$-50,9259$	$-0,916667$	$777,778$
5	$777,778$	$-4,45816$	$-0,759259$	$771,906$
6	$771,906$	$-0,0457671$	$-0,743705$	$771,845$
7	$771,845$	$-4,98251 * 10^{-6}$	$-0,743543$	$771,845$

Der Wert $x_m \approx 771,845$ wird abgelesen. Weil nur ganzzahlige Werte sachlogische Sinn ergeben, wird man $x_m = 771$ verwenden.

b) Die zweite Ableitung lautet $N''(x) = \frac{1}{500} - \frac{3}{500\,000}x$. Eine Nullstelle der zweiten Ableitung ist $x_1 = \frac{1000}{3}$. Die dritte Ableitung ist hier $N'''(x) = -\frac{3}{500\,000} < 0$. Es liegt also eine Wendestelle von N vor, gleichzeitig ein lokales Maximum von N'. An dieser Stelle ist also die Abnahme des Marktpreises in Abhängigkeit von der abgesetzten Menge maximal.

c) Die Erlösfunktion lautet $E(x) = xN(x)$, also $E(x) = -\frac{1}{1000\,000}x^4 + \frac{1}{1000}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 250x$. Ihre Ableitung ist

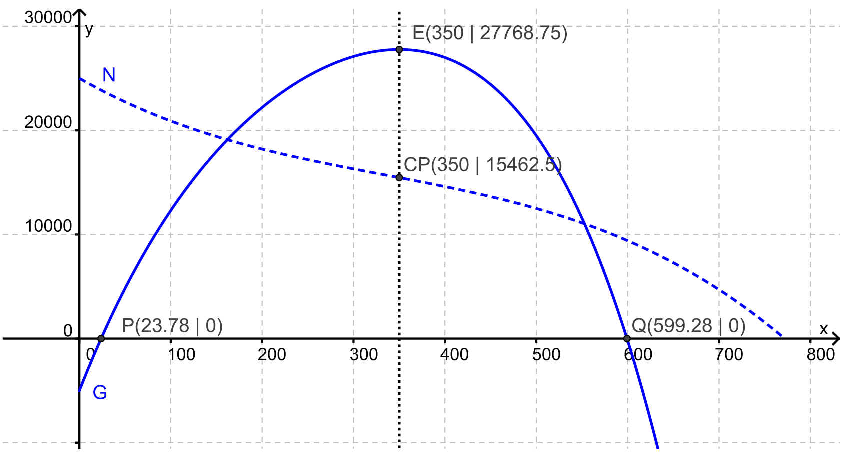
$$E'(x) = -\frac{1}{250\,000}x^3 + \frac{3}{1000}x^2 - x + 250 = \frac{x^3 - 750x^2 + 250\,000x - 62\,500\,000}{-250000}$$

Die einzige Nullstelle des Grenzerlöses $E'(x)$ ist $x = 500$ (raten oder mit Taschenrechner numerisch bestimmen oder mit Newton-Verfahren annähern). Der Grenzerlös hat als kubische Funktion mit negativem Leitkoeffizient einen Verlauf, der links der Nullstelle positiv und rechts davon negativ sein muss. Also ist $E(x)$ auf $[0; 500]$ monoton wachsend und auf $[500; x_m]$ monoton fallend. Damit muss in $x = 500$ der maximale Erlös vorliegen.

d) Die Gewinnfunktion lautet

$$\begin{aligned} G(x) &= E(x) - K(x) \\ &= -\frac{1}{1000\,000}x^4 + \frac{1}{1000}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 250x - (\frac{1}{10}x^2 + 26x + 5000) \\ &= -\frac{1}{1000\,000}x^4 + \frac{1}{1000}x^3 - \frac{3}{5}x^2 + 224x - 5000 \end{aligned}$$

Ihre Ableitung ist $G'(x) = -\frac{1}{250\,000}x^3 + \frac{3}{1000}x^2 - \frac{6}{5}x + 224$. Der Grenzgewinn hat als einzige Nullstelle $x = 350$ (raten oder numerisch bzw. mit Taschenrechner zu bestimmen), er ist links davon positiv und rechts davon negativ. Also liegt in $x = 350$ ein globales Gewinnmaximum vor. Der zugehörige Preis ist $N(350) = \frac{1237}{8} = 154,625$, der Gewinn ist $G(350) = \frac{111\,075}{4} = 27768,75$. Für die Gewinnzone sind die Nullstellen von G zu bestimmen, diese lauten näherungsweise $x \approx 23,77$ und $x \approx 599,28$. (wieder numerisch bzw. mit Taschenrechner zu bestimmen) In diesem Intervall liegt einheitliches Vorzeichen von $G(x)$ vor. Da Sie für die in diesem Intervall liegende Stelle $x = 350$ bereits maximalen Gewinn $G(350) > 0$ bestimmt haben, ist die Gewinnzone das Intervall $[23,77; 599,28]$. Nachfolgend eine Skizze von Gewinnfunktion und (mit Faktor 100 multiplizierter) Nachfragefunktion:



e) Ein Unterbieten des Preises ist nur dann möglich, wenn die minimalen durchschnittlichen Kosten (das Betriebsoptimum) diesen Preis unterschreitet. Die Durchschnittskostenfunktion ist

$$k(x) = \frac{K(x)}{x} = \frac{\frac{1}{10}x^2+26x+5000}{x} = k(x) = \frac{1}{10}x + 26 + \frac{5000}{x}$$

Sie hat die Ableitung $k'(x) = \frac{1}{10} - \frac{5000}{x^2} = \frac{x^2-50000}{10x^2}$, mit der eindeutigen Nullstelle $100\sqrt{5}$ und einem Vorzeichenwechsel von $-$ nach $+$. Es liegt daher dort das Betriebsoptimum mit $k(100\sqrt{5}) = 20\sqrt{5} + 26 = 70,721 > 70$. Daher könnte DryTEX den Konkurrenzpreis langfristig nicht unterbieten.

f) Die Angebotsfunktion ist $A(x) = ax^2 + bx + c$ mit $A(0) = 80$, $A(200) =$

100 und $A(600) = 200$, d.h.

$$\begin{aligned} c &= 80 \\ 200^2 a + 200b + c &= 100 \\ 600^2 a + 600b + c &= 200 \end{aligned}$$

Setzt man $c = 80$ ein so ergibt sich

$$\begin{aligned} c &= 80 \\ 200^2 a + 200b &= 20 \\ 600^2 a + 600b &= 120 \end{aligned}$$

Jetzt lösen Sie die zweite und dritte Gleichung nach b auf:

$$\begin{aligned} c &= 80 \\ b &= \tfrac{1}{10} - 200a \\ b &= \tfrac{1}{5} - 600a \end{aligned}$$

Und durch Gleichsetzen der zweiten und dritten Gleichung über b erhalten Sie

$$\begin{aligned} c &= 80 \\ b &= \tfrac{1}{10} - 200a \\ \tfrac{1}{10} - 200a &= \tfrac{1}{5} - 600a \end{aligned}$$

Durch Auflösen der dritten Gleichung nach b und Einsetzen in die zweite Gleichung bekommen Sie dann die gesuchten Koeffizienten

$$\begin{aligned} c &= 80 \\ a &= \tfrac{1}{4000} \\ b &= \tfrac{1}{10} - \tfrac{200}{4000} = \tfrac{1}{20} \end{aligned}$$

Die gesuchte Angebotsfunktion ist $A(x) = \frac{1}{4000}x^2 + \frac{1}{20}x + 80$

g) Der Break-Even-Punkt wird durch Gleichsetzen von Angebot und Nachfrage gewonnen

$$\begin{aligned} A(x) &= N(x) \\ &\Leftrightarrow \tfrac{1}{4000}x^2 + \tfrac{1}{20}x + 80 = 250 - \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{1000}x^2 - \tfrac{1}{1000000}x^3 \\ &\Leftrightarrow \tfrac{1}{1000000}x^3 - \tfrac{3}{4000}x^2 + \tfrac{11}{20}x - 170 = 0 \\ &\Leftrightarrow x^3 - 750x^2 + 550\,000x - 170\,000\,000 = 0 \end{aligned}$$

Mit einer Skizze der Graphen von A und N erkennen Sie, dass die Lösung dieser Gleichung in der Nähe von $x = 400$ liegen muss. Das Newton-Verfahren mit diesem Startwert ergibt folgende Tabelle.

Es ist also $x^* \approx 413,75$. Der zugehörige Preis lautet $A(413,75) = 143,48$. Mit diesem Wert lautet die Produzentenrente

$$\int_0^{413,75} (A(413,75) - A(x))dx \approx 16084,64$$

Die Konsumentenrente ist

$\int_0^{413,75} (N(x) - N(413,75))dx \approx 17556,89$

Die Wohlfahrt ist Summe aus Konsumenten- und Produzentenrente, also etwa $16084,64 + 17556,89 = 33641,53$

Beachten Sie, dass diese Werte nicht ganz genau mit den Kontrollergebnissen übereinstimmen. Die Abweichung ist auf die Rundung auf zwei Nachkommastellen zurückzuführen Mit einem wissenschaftlichen Schultaschenrechner kann man beispielsweise den Break-Even-Punkt auf sieben Nachkommastellen genau als $x^* \approx 413,7495987$ annähern. Mit diesem Wert lautet die der Break-Even-Preis unter Verwendung der Angebotsfunktion $A(413,7495987) \approx 143,4846625$ und die Produzentenrente

$\int_0^{413,7495987} (A(413,7495987) - A(x))dx \approx 16084,59635$

Der Break-Even-Preis unter Verwendung der Nachfragefunktion ist

$N(413,7495987) = 143,4846626$. Die Konsumentenrente ist

$\int_0^{413,7495987} (N(x) - N(413,7495987))dx = 17556,85633$

Die Wohlfahrt ist Summe aus Konsumenten- und Produzentenrente, also etwa $16084,59635 + 17556,85633 = 33641,45268$

Skizze von Angebots- und Nachfragefunktion und Wohlfahrt mittels GeoGebra: