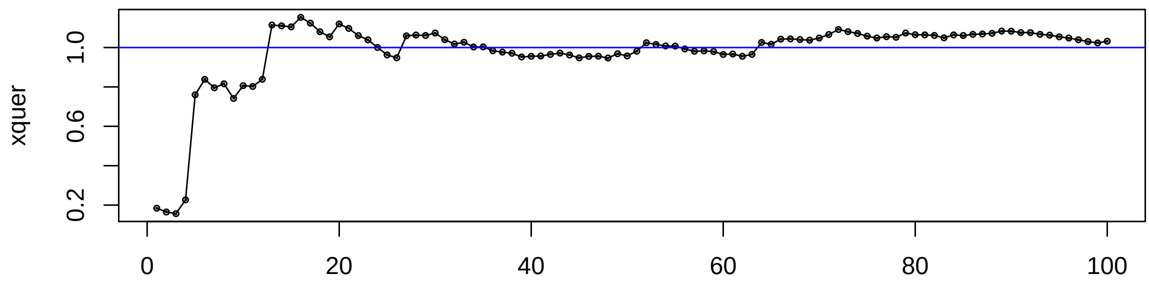
Übungen zur Vorlesung

Datenanalyse - Dr. Kerschke, Dr. Terveer

Sommersemester 2018 Blatt 1 10.04.-17.04.2018

Aufgabe 1 Erzeugen Sie mit R die weiter unten stehende Grafik der fortlaufend gebildeten Mittelwerte $\bar{X}_n = \frac{X_1+\cdots+X_n}{n}$, $n = 1, \ldots, 100$ von Realisierungen zu 100 u.i.v. $Exp(1)$-verteilten Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_{100}$. Initialisieren Sie dazu den Zufallszahlengenerator von R mit `set.seed(0)` und informieren Sie sich über den Befehl `stats::rexp`. Interpretieren Sie die gewonnene Grafik.



Aufgabe 2 (SGGZ, vgl. DuW) Seien X_1, X_2, … u.i.v. Zufallsvariablen mit existierender Varianz $\sigma^2 = var(X_1)$. Zeigen Sie mit Hilfe des SGGZ :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X}_n)^2 = \sigma^2$$

fast sicher[1]. Was folgt für die Stichprobenvarianz $\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2$?.

Hinweis: Formen Sie mit der Verschiebungsformel um; verwenden Sie erst dann das SGGZ.

Aufgabe 3 (Wahlsieg, Tschebyscheff)

a) Seien $X_1, X_2, \ldots, X_n$ unabhängige $\{0, 1\}$-wertige Zufallsgrößen mit $P(X_i = 1) = p \in [0; 1]$. Zeigen Sie: $P(|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i - p| \geq \epsilon) \leq \frac{1}{4n\epsilon^2} \quad \forall p \in [0; 1]$

b) Eine Partei will ihren zu erwartenden unbekannten Stimmenanteil $p \in]0; 1[$ bei der nächsten Wahl durch die Befragung von n Personen $X_1, \ldots, X_n$ ermitteln; dabei ist $X_i = 1$, falls die i-te Person diese Partei wählen will und 0 sonst. Bestimmen Sie n (möglichst klein) so, dass die Wahrscheinlichkeit einer Abweichung um mehr als 1 Prozent geringer ist als 5 Prozent (bzw. 1 Prozent).

Aufgabe 4 (ZGS – Cocktailkonsum) WI-Student Paul möchte „mal was Vernünftiges“ mit seinen so mühsam angeeigneten Kenntnissen der Wahrscheinlichkeitstheorie anfangen. Er hat beobachtet, dass eine Flasche eines für ihn wichtigen Getränks, das zur Zubereitung zahlreicher Cocktails verwendet wird, in seiner WG eine mittlere Lebensdauer von $\mu = 5$ Tage mit einer Standardabweichung $\sigma = 1$ Tag aufweist. Die Lebensdauern einzelner Flaschen seien als ganzzahlig und voneinander unabhängig angenommen. Nun konnte Paul, angeblich aus einer Haushaltsauflösung einer benachbarten WG, sehr günstig 225 Flaschen zweifelhafter Herkunft des genannten Getränks erstehen. Der befristete Mietvertrag der WG laufe in genau 1106 Tagen aus. Die Konsumgewohnheiten der Bewohner mögen sich in dieser Zeit nicht ändern. Berechnen Sie näherungsweise die Wahrscheinlichkeit, dass der Vorrat für die restliche Zeit des Mietverhältnisses ausreichen wird.

---

[1] d.h. $P(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X}_n)^2 \to \mathbb{E}(X_1 - EX_1)^2) = 1$