2. Zufallsvektoren

2 Wahrscheinlichkeitsrechung - Zufallsvektoren

$\hookrightarrow$ bisher: Verteilungen einzelner Zufallsvariablen

$\hookrightarrow$ jetzt: **Ergebnis eines Zufallsexperimentes sind mehrere Zufallsvariablen**

2 Wahrscheinlichkeitsrechung - Zufallsvektoren

$\hookrightarrow$ bisher: Verteilungen einzelner Zufallsvariablen

$\hookrightarrow$ jetzt: **Ergebnis eines Zufallsexperimentes sind mehrere Zufallsvariablen**

Die Wirtschaftslage am Ende einer Periode wird als Zufallsvorgang betrachtet. Verschiedene statistische Variablen spiegeln die wirtschaftliche Situation wider.

X: Bruttoinlandsprodukt, Y: Inflationsrate, Z: Arbeitslosenquote

2 Wahrscheinlichkeitsrechung - Zufallsvektoren

↪ bisher: Verteilungen einzelner Zufallsvariablen

↪ jetzt: **Ergebnis eines Zufallsexperimentes sind mehrere Zufallsvariablen**

Die Wirtschaftslage am Ende einer Periode wird als Zufallsvorgang betrachtet. Verschiedene statistische Variablen spiegeln die wirtschaftliche Situation wider.

X: Bruttoinlandsprodukt, Y: Inflationsrate, Z: Arbeitslosenquote

↪ von Interesse sind neben den einzelnen Verteilungen der Zufallsvariablen insbesondere auch die Zusammenhänge

↪ Bei geeigneter Modellierung liegt allen Zufallsvariablen dieselbe Grundgesamtheit Ω und dasselbe WS-Modell P zugrunde.

↪ Liegt $\omega \in \Omega$ vor, können die Werte der Zufallsvariablen direkt berechnet werden.

↪ Zusammenfassung der einzelnen Zufallsvariablen zu einem **Zufallsvektor**

Memo DuW: Zufallsvariablen

$\hookrightarrow$ Die von einer statistischen Variablen X erfassten Objektdaten $x = X(\omega)$ sind zufällige Werte. X wird daher auch als Zufallsvariable (ZV) bezeichnet.

Memo DuW: Zufallsvariablen

- $\hookrightarrow$ Die von einer statistischen Variablen X erfassten Objektdaten $x = X(\omega)$ sind zufällige Werte. X wird daher auch als Zufallsvariable (ZV) bezeichnet.
- $\hookrightarrow$ Für die Grundgesamtheit Ω liegt ein WS-Modell P vor, das sich auf die mit X erfassten Objektdaten überträgt. Sprechweise: **(induzierte) Verteilung** von X (Symbol $\mathcal{L}(X)$).

Memo DuW: Zufallsvariablen

↪ Die von einer statistischen Variablen X erfassten Objektdaten $x = X(\omega)$ sind zufällige Werte. X wird daher auch als Zufallsvariable (ZV) bezeichnet.

↪ Für die Grundgesamtheit Ω liegt ein WS-Modell P vor, das sich auf die mit X erfassten Objektdaten überträgt. Sprechweise: **(induzierte) Verteilung** von X (Symbol $\mathcal{L}(X)$). Üblich sind folgende Schreibweisen:

Kurzform	ausführlich	Erläuterung
$P(X \in A)$	$P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A\})$	durch X induzierte WS von A
$P(X = x)$	$P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x\})$	Punkt-Wahrscheinlichkeit
$P(X \in [a; b])$	$P(\{\omega \in \Omega : a \leq X(\omega) \leq b\})$	Intervallwahrscheinlichkeit
$P(X \leq x)$	$P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\})$	Verteilungsfunktion (VF) $F_X(x)$ (in x)
$F_X^{-1}(t)$	$\inf\{x \in \mathbb{R} : F_X(x) \geq t\}$	Quantilfunktion (oft Umkehrfunktion von F_X)

Memo DuW: Zufallsvariablen

$\hookrightarrow$ Die von einer statistischen Variablen X erfassten Objektdaten $x = X(\omega)$ sind zufällige Werte. X wird daher auch als Zufallsvariable (ZV) bezeichnet.

$\hookrightarrow$ Für die Grundgesamtheit Ω liegt ein WS-Modell P vor, das sich auf die mit X erfassten Objektdaten überträgt. Sprechweise: **(induzierte) Verteilung** von X (Symbol $\mathcal{L}(X)$). Üblich sind folgende Schreibweisen:

Kurzform	ausführlich	Erläuterung
$P(X \in A)$	$P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A\})$	durch X induzierte WS von A
$P(X = x)$	$P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x\})$	Punkt-Wahrscheinlichkeit
$P(X \in [a; b])$	$P(\{\omega \in \Omega : a \leq X(\omega) \leq b\})$	Intervallwahrscheinlichkeit
$P(X \leq x)$	$P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\})$	Verteilungsfunktion (VF) $F_X(x)$ (in x)
$F_X^{-1}(t)$	$\inf\{x \in \mathbb{R} : F_X(x) \geq t\}$	Quantilfunktion (oft Umkehrfunktion von F_X)

$\hookrightarrow$ Oft wird explizites WS-Modell nicht für Grundgesamtheit, sondern nur für die von X angegebenen (meist reellen) Werte formuliert.

- ☐ diskrete ZV mit Dichte $f_X(x_i) = P(X = x_i)$ und $\sum_{i \in \mathbb{N}} P(X = x_i) = 1$
- ☐ stetige ZV mit Dichte $f_X(x) = F_X'(x)$ mit VF F_X und $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) = 1$

Memo DuW: Zufallsvariablen

$\hookrightarrow$ Die von einer statistischen Variablen X erfassten Objektdaten $x = X(\omega)$ sind zufällige Werte. X wird daher auch als Zufallsvariable (ZV) bezeichnet.

$\hookrightarrow$ Für die Grundgesamtheit Ω liegt ein WS-Modell P vor, das sich auf die mit X erfassten Objektdaten überträgt. Sprechweise: **(induzierte) Verteilung** von X (Symbol $\mathcal{L}(X)$). Üblich sind folgende Schreibweisen:

Kurzform	ausführlich	Erläuterung
$P(X \in A)$	$P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A\})$	durch X induzierte WS von A
$P(X = x)$	$P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x\})$	Punkt-Wahrscheinlichkeit
$P(X \in [a; b])$	$P(\{\omega \in \Omega : a \leq X(\omega) \leq b\})$	Intervallwahrscheinlichkeit
$P(X \leq x)$	$P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\})$	Verteilungsfunktion (VF) $F_X(x)$ (in x)
$F_X^{-1}(t)$	$\inf\{x \in \mathbb{R} : F_X(x) \geq t\}$	Quantilfunktion (oft Umkehrfunktion von F_X)

$\hookrightarrow$ Oft wird explizites WS-Modell nicht für Grundgesamtheit, sondern nur für die von X angegebenen (meist reellen) Werte formuliert.

- ☐ diskrete ZV mit Dichte $f_X(x_i) = P(X = x_i)$ und $\sum_{i \in \mathbb{N}} P(X = x_i) = 1$
- ☐ stetige ZV mit Dichte $f_X(x) = F_X'(x)$ mit VF F_X und $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) = 1$

$\hookrightarrow$ Bestimmung von Wahrscheinlichkeiten $P(X \in A)$ im Spezialfall:

- ☐ diskret: $P(X \in A) = \sum_{x_i \in A : f_X(x_i) > 0} P(X = x_i)$
- ☐ stetig: $P(X \in]a; b]) = \int_a^b f_X(x)dx$ und $P(X = b) = 0, \quad -\infty \leq a < b$

Definition (Zufallsvektor, multivariate Zufallsvariable, MZV)

Gegeben Zufallsvariablen $X_i : \Omega \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$ auf einem WS-Raum (Ω, P):

- $\hookrightarrow$ Der Vektor $X = (X_1, \ldots, X_n)$ heißt dann **Zufallsvektor**.
- $\hookrightarrow$ $X_1, \ldots, X_n$ heißen **Komponenten** des Zufallsvektors.
- $\hookrightarrow$ X ist eine (multivariate) Zufallsvariable (MZV) mit Werten in $\mathbb{R}^n$ und besitzt eine Verteilung .
  $\mathcal{L}(X)$ wird als **gemeinsame** Verteilung der $X_1, \ldots, X_n$ bezeichnet.
- $\hookrightarrow$ Unter einer k-variaten (bzw. k-dimensionalen) **Randverteilung** versteht man die gemeinsame Verteilung der ZV $X_{i_1}, \ldots, X_{i_k}$ für eine gegebene Wahl von Indizes $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$.
  Spezialfall ($k = 1$): univariate Randverteilungen $\mathcal{L}(X_i)$.

Definition (Zufallsvektor, multivariate Zufallsvariable, MZV)

Gegeben Zufallsvariablen $X_i : \Omega \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$ auf einem WS-Raum (Ω, P):

- $\hookrightarrow$ Der Vektor $X = (X_1, \ldots, X_n)$ heißt dann **Zufallsvektor**.
- $\hookrightarrow$ $X_1, \ldots, X_n$ heißen **Komponenten** des Zufallsvektors.
- $\hookrightarrow$ X ist eine (multivariate) Zufallsvariable (MZV) mit Werten in $\mathbb{R}^n$ und besitzt eine Verteilung .
  $\mathcal{L}(X)$ wird als **gemeinsame** Verteilung der $X_1, \ldots, X_n$ bezeichnet.
- $\hookrightarrow$ Unter einer k-variaten (bzw. k-dimensionalen) **Randverteilung** versteht man die gemeinsame Verteilung der ZV $X_{i_1}, \ldots, X_{i_k}$ für eine gegebene Wahl von Indizes $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$.
  Spezialfall ($k = 1$): univariate Randverteilungen $\mathcal{L}(X_i)$.

$\mathcal{L}(X)$ ist i.a. kompliziert und nur im Spezialfall diskreter oder stetiger Zufallsvektoren einfach zu beschreiben (s.u. Spezialfälle).

Beispiele

$\hookrightarrow$ Werfen von zwei W4-Würfeln:

$$\begin{aligned}
\Omega &= \{(1,1),(1,2),\dots,(1,4),(2,1),\dots,(2,4),\dots,(4,4)\} \\
P(\{(\omega_1,\omega_2)\} &= 1/16 \\
X(\omega) &= X((\omega_1,\omega_2)) := |\omega_1-\omega_2| \quad \text{abs. Differenz der Würfelaugen} \\
Y(\omega) &= Y((\omega_1,\omega_2)) := \omega_1+\omega_2 \qquad \text{Augensumme}
\end{aligned}$$

(X, Y) ist ein Zufallsvektor.

$\hookrightarrow$ Körpergröße und Gewicht:

$$\begin{aligned}
\Omega &= \{\omega = (\omega_K,\omega_G) | \omega_K,\omega_G > 0\} \\
X((\omega_K,\omega_G)) &:= \omega_G \\
Y((\omega_K,\omega_G)) &:= \omega_K
\end{aligned}$$

(X, Y) ist ein Zufallsvektor. Das zugehörige P ist hier unspezifiziert.

Beispiele

$\hookrightarrow$ Werfen von zwei W4-Würfeln:

$$\begin{aligned} \Omega &= \{(1,1),(1,2),\dots,(1,4),(2,1),\dots,(2,4),\dots,(4,4)\} \\ P(\{(\omega_1,\omega_2)\} &= 1/16 \\ X(\omega) &= X((\omega_1,\omega_2)) := |\omega_1-\omega_2| \quad \text{abs. Differenz der Würfelaugen} \\ Y(\omega) &= Y((\omega_1,\omega_2)) := \omega_1+\omega_2 \quad \text{Augensumme} \end{aligned}$$

(X, Y) ist ein Zufallsvektor.

$\hookrightarrow$ Körpergröße und Gewicht:

$$\begin{aligned} \Omega &= \{\omega = (\omega_K,\omega_G) | \omega_K,\omega_G > 0\} \\ X((\omega_K,\omega_G)) &:= \omega_G \\ Y((\omega_K,\omega_G)) &:= \omega_K \end{aligned}$$

(X, Y) ist ein Zufallsvektor. Das zugehörige P ist hier unspezifiziert.

3.) (endliche) Bernoulli-Kette:

N unabhängige Wiederholungen desselben Bernoulli-Experiments.

$$\Omega = \{\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N) | \omega_n = \text{ Erfolg oder } \omega_n = \text{ Mißerf}$$

$$\text{Sei } X_n(\omega_1, \dots, \omega_n) := \begin{cases} 1 & \omega_n = \text{ Erfolg} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad i = 1, \dots, N$$

$X := (X_1, X_2, \dots, X_N)$ ist ein Zufallsvektor.

3.) (endliche) Bernoulli-Kette:

N unabhängige Wiederholungen desselben Bernoulli-Experiments.

$$\Omega = \{\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_N) | \omega_n = \text{ Erfolg oder } \omega_n = \text{ Mißerf}$$

$$\text{Sei } X_n(\omega_1, \ldots, \omega_n) := \begin{cases} 1 & \omega_n = \text{ Erfolg} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad i = 1, \ldots, N$$

$X := (X_1, X_2, \ldots, X_N)$ ist ein Zufallsvektor.

Versuchswiederholungen als Zufallsvektor:

$\hookrightarrow$ Konstruiere einen N-dimensionalen Stichprobenraum

$\hookrightarrow$ definiere identische Zufallsvariablen auf den einzelnen Komponenten ω_i des Stichprobenraums

$\hookrightarrow$ fasse diese Zufallsvariablen zu einem Vektor zusammen

3.) (endliche) Bernoulli-Kette:

N unabhängige Wiederholungen desselben Bernoulli-Experiments.

$$\Omega \quad = \quad \{\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_N) | \omega_n = \text{ Erfolg oder } \omega_n = \text{ Mißerf}$$

$$\text{Sei } X_n(\omega_1, \ldots, \omega_n) \quad := \quad \begin{cases} 1 & \omega_n = \text{ Erfolg} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad i = 1, \ldots, N$$

$X := (X_1, X_2, \ldots, X_N)$ ist ein Zufallsvektor.

Versuchswiederholungen als Zufallsvektor:

$\hookrightarrow$ Konstruiere einen N-dimensionalen Stichprobenraum

$\hookrightarrow$ definiere identische Zufallsvariablen auf den einzelnen Komponenten ω_i des Stichprobenraums

$\hookrightarrow$ fasse diese Zufallsvariablen zu einem Vektor zusammen

X_n ist Bernoulli-verteilte Zufallsvariable auf Ω. Das einzelne Bernoulli-Experiment ist definiert auf der Grundgesamtheit $\Omega_1 := \{\omega | \omega = \text{ Erfolg oder } \omega = \text{ Misserfolg}\}$. Die Bernoulli-Kette ist definiert auf der Grundgesamtheit $\Omega = \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_n$.

Diskreter Fall – Gemeinsame Dichtefunktion

$\hookrightarrow$ Ein Zufallsvektor $X = (X_1, \ldots, X_N)$ heißt **diskret** , wenn er höchstens Werte in einer abzählbaren Menge $\mathcal{M}$ isolierter Vektoren $(x_1, \ldots, x_N)$ annimmt. Die möglichen Werte werden **Realisationen** genannt.

Diskreter Fall – Gemeinsame Dichtefunktion

$\hookrightarrow$ Ein Zufallsvektor $X = (X_1, \ldots, X_N)$ heißt **diskret** , wenn er höchstens Werte in einer abzählbaren Menge $\mathcal{M}$ isolierter Vektoren $(x_1, \ldots, x_N)$ annimmt. Die möglichen Werte werden **Realisationen** genannt.

$\hookrightarrow$ Ist ein MZV diskret, ist auch die zugehörige gemeinsame Verteilung diskret.

Diskreter Fall – Gemeinsame Dichtefunktion

$\hookrightarrow$ Ein Zufallsvektor $X = (X_1, \ldots, X_N)$ heißt **diskret** , wenn er höchstens Werte in einer abzählbaren Menge $\mathcal{M}$ isolierter Vektoren $(x_1, \ldots, x_N)$ annimmt. Die möglichen Werte werden **Realisationen** genannt.

$\hookrightarrow$ Ist ein MZV diskret, ist auch die zugehörige gemeinsame Verteilung diskret.

$\hookrightarrow$ Für einen MZV $(X_1, \ldots, X_N)$ ist die **gemeinsame diskrete Dichtefunktion** definiert als

$$f_{X_1,\ldots,X_N}(x_1, \ldots, x_N) = \begin{cases} P(X_1 = x_1, \ldots, X_N = x_N) & \text{für } (x_1, \ldots, x_N) \in \mathcal{M} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Diskreter Fall – Gemeinsame Dichtefunktion

- $\hookrightarrow$ Ein Zufallsvektor $X = (X_1, \dots, X_N)$ heißt **diskret** , wenn er höchstens Werte in einer abzählbaren Menge $\mathcal{M}$ isolierter Vektoren $(x_1, \dots, x_N)$ annimmt. Die möglichen Werte werden **Realisationen** genannt.
- $\hookrightarrow$ Ist ein MZV diskret, ist auch die zugehörige gemeinsame Verteilung diskret.
- $\hookrightarrow$ Für einen MZV $(X_1, \dots, X_N)$ ist die **gemeinsame diskrete Dichtefunktion** definiert als

$$f_{X_1,\dots,X_N}(x_1, \dots, x_N) = \begin{cases} P(X_1 = x_1, \dots, X_N = x_N) & \text{für } (x_1, \dots, x_N) \in \mathcal{M} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Es gilt (bzw. muss gelten, damit eine diskrete Dichte vorliegt):

- ☐ $f_{X_1,X_2,\dots,X_N}(x_1, \dots, x_N) \geq 0$

Diskreter Fall – Gemeinsame Dichtefunktion

- ↪ Ein Zufallsvektor $X = (X_1, \dots, X_N)$ heißt **diskret** , wenn er höchstens Werte in einer abzählbaren Menge $\mathcal{M}$ isolierter Vektoren $(x_1, \dots, x_N)$ annimmt. Die möglichen Werte werden **Realisationen** genannt.
- ↪ Ist ein MZV diskret, ist auch die zugehörige gemeinsame Verteilung diskret.
- ↪ Für einen MZV $(X_1, \dots, X_N)$ ist die **gemeinsame diskrete Dichtefunktion** definiert als

$$f_{X_1,\dots,X_N}(x_1, \dots, x_N) = \begin{cases} P(X_1 = x_1, \dots, X_N = x_N) & \text{für } (x_1, \dots, x_N) \in \mathcal{M} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Es gilt (bzw. muss gelten, damit eine diskrete Dichte vorliegt):

- ☐ $f_{X_1,X_2,\dots,X_N}(x_1, \dots, x_N) \geq 0$
- ☐ $\sum\limits_{(x_1,\dots,x_N)\in\mathcal{M}} f_{X_1,\dots,X_N}(x_1, \dots, x_N) = 1$

Diskreter Fall – Gemeinsame Dichtefunktion

↪ Ein Zufallsvektor $X = (X_1, \ldots, X_N)$ heißt **diskret** , wenn er höchstens Werte in einer abzählbaren Menge $\mathcal{M}$ isolierter Vektoren $(x_1, \ldots, x_N)$ annimmt. Die möglichen Werte werden **Realisationen** genannt.

↪ Ist ein MZV diskret, ist auch die zugehörige gemeinsame Verteilung diskret.

↪ Für einen MZV $(X_1, \ldots, X_N)$ ist die **gemeinsame diskrete Dichtefunktion** definiert als

$$f_{X_1,\ldots,X_N}(x_1, \ldots, x_N) = \begin{cases} P(X_1 = x_1, \ldots, X_N = x_N) & \text{für } (x_1, \ldots, x_N) \in \mathcal{M} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Es gilt (bzw. muss gelten, damit eine diskrete Dichte vorliegt):

☐ $f_{X_1,X_2,\ldots,X_N}(x_1, \ldots, x_N) \geq 0$

☐ $\sum\limits_{(x_1,\ldots,x_N)\in\mathcal{M}} f_{X_1,\ldots,X_N}(x_1, \ldots, x_N) = 1$

Die diskrete Dichte wird (für $N = 2$) meist tabellarisch dargestellt (analog zur Kontingenztafel der deskriptiven Statistik)

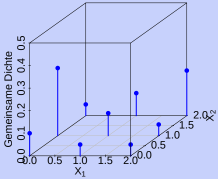
Wartung einer Maschine:

X_1 : Anzahl Defekte vom Typ I im Wartungszeitraum

X_2 : Anzahl Defekte vom Typ II im Wartungszeitraum

Gemeinsame Wahrscheinlichkeiten (z.B. $P(X_1 = 0, X_2 = 0) = 0.1$):

		Defekt II		
		0	1	2
Defekt I	0	0.1	0.3	0.05
	1	0.05	0.1	0.1
	2	0.05	0.05	0.2



Übung: Zweifacher W4-Würfelwurf mit den Würfen X_1, X_2.
Bestimmen Sie die Verteilung des Zufallsvektors $(X, Y) = (|X_1 - X_2|, X_1 + X_2)$

Wie ist die Wahrscheinlichkeit, dass X einen bestimmten Wert annimmt, unabhängig von den Realisierungen der anderen Komponenten des Zufallsvektors?

Wie ist die Wahrscheinlichkeit, dass X einen bestimmten Wert annimmt, unabhängig von den Realisierungen der anderen Komponenten des Zufallsvektors?

Sind X und Y diskrete Zufallsvektoren mit gemeinsamer diskreter Dichte $f_{X,Y}$, dann werden die Dichtefunktionen

$$f_X(x_k) := \sum_i f_{X,Y}(x_k, y_i) \quad \text{und} \quad f_Y(y_k) := \sum_i f_{X,Y}(x_i, y_k)$$

diskrete Randdichtefunktionen von X und Y genannt.

Wie ist die Wahrscheinlichkeit, dass X einen bestimmten Wert annimmt, unabhängig von den Realisierungen der anderen Komponenten des Zufallsvektors?

Sind X und Y diskrete Zufallsvektoren mit gemeinsamer diskreter Dichte $f_{X,Y}$, dann werden die Dichtefunktionen

$$f_X(x_k) := \sum_i f_{X,Y}(x_k, y_i) \quad \text{und} \quad f_Y(y_k) := \sum_i f_{X,Y}(x_i, y_k)$$

diskrete Randdichtefunktionen von X und Y genannt.

Wartung einer Maschine:

Die Randdichten errechnen sich durch Bildung der Zeilen-/Spaltensummen.

		Defekt II			
	X_1/X_2	0	1	2	f_{X_1}
Defekt I	0	0.1	0.3	0.05	0.45
	1	0.05	0.1	0.1	0.25
	2	0.05	0.05	0.2	0.3
	f_{X_2}	0.2	0.45	0.35	1

Übung: Berechnen Sie in der Situation des zweifachen W4-Würfelwurfes (s.o.) die Randverteilungen von $(X, Y) = (|X_1 - X_2|, X_1 + X_2)$

$\hookrightarrow$ die diskreten Randdichten lassen sich aus der gemeinsamen Dichte errechnen

$\hookrightarrow$ die Umkehrung gilt i.a. nicht.

Wartung einer Maschine

		Defekt II			
	X_1/X_2	0	1	2	f_{X_1}
Defekt I	0	$0.1 + \varepsilon$	$0.3 - \varepsilon$	0.05	0.45
	1	$0.05 - \varepsilon$	$0.1 + \varepsilon$	0.1	0.25
	2	0.05	0.05	0.2	0.3
	f_{X_2}	0.2	0.45	0.35	1

Für jedes $0 \leq \varepsilon \leq 0.05$ definiert die Tabelle gemeinsame Dichten mit unterschiedlichen gemeinsamen Verteilungen, aber identischen Randdichten.

Multinomial-Experiment und Multinomialverteilung

$\hookrightarrow$ Verallgemeinerung des Bernoulli-Experimentes. Statt zwei jetzt $K+1$ verschiedene Ausgänge eines Einzel-Experimentes

- ☐ Ausgänge mit WS $p_1, \dots, p_{K+1} \geq 0$, $p_1 + \cdots + p_{K+1} = 1$
- ☐ Ausgänge verschiedener Einzelexperimente als st.u. angenommen

z.B. Qualitätssicherung: Statt defekt/intakt jetzt Qualitätsstufen.

Multinomial-Experiment und Multinomialverteilung

$\hookrightarrow$ Verallgemeinerung des Bernoulli-Experimentes. Statt zwei jetzt $K+1$ verschiedene Ausgänge eines Einzel-Experimentes

- ☐ Ausgänge mit WS $p_1, \ldots, p_{K+1} \geq 0$, $p_1 + \cdots + p_{K+1} = 1$
- ☐ Ausgänge verschiedener Einzelexperimente als st.u. angenommen

z.B. Qualitätssicherung: Statt defekt/intakt jetzt Qualitätsstufen.

$\hookrightarrow$ Experiment wird n-mal wiederholt. $X_1, \ldots, X_{K+1}$ zählen, wie oft Ausgang $1, \ldots, K+1$ eintritt.

$\hookrightarrow$ Die Verteilung des Zufallsvektors $(X_1, \ldots, X_K)$ heißt **Multinomialverteilung** mit Parametern n, $p_1, \ldots, p_K$.
Beachte: p_{K+1}, X_{K+1} werden hierbei nicht mitgeführt.

$\hookrightarrow$ gemeinsame Dichte für $(x_1, \ldots, x_K) \in \mathbb{N}_0^K$

$$f(x_1, \ldots, x_K) = \begin{cases} \dfrac{n!}{x_1! \cdots x_K! x_{K+1}!} p_1^{x_1} \cdots p_K^{x_K} p_{K+1}^{x_{K+1}} & \text{für } x_1 + \cdots + x_K \leq n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(mit $p_{K+1} = 1 - p_1 - \cdots - p_K$, $X_{K+1} = n - X_1 - \cdots - X_K$)

Dazu kombinatorisches Argument:

- ☐ Partitioniere die Menge $\{1, \ldots, n\}$ der Versuche in $K + 1$ Mengen der Mächtigkeiten $x_1, \ldots, x_{K+1}$.
  Es gibt $\frac{n!}{x_1! \cdots x_{K+1}!}$ Möglichkeiten (Multinomialkoeffizient, vgl. DuW)
- ☐ Jede Partition legt ein n-Tupel von Versuchsausgängen fest (x_1-mal Ausgang 1,...,x_{K+1}-mal Ausgang $K + 1$.
  Weil die Experimente unabhängig und gleichartig sind, trägt jeder derartige Ausgang dieselbe WS $p_1^{x_1} \cdots p_{K+1}^{x_{K+1}}$.

Beispiel: Schokohasen

Ein **Beutel** enthält 12 Schokohasen, davon fünf aus Vollmilch-, vier aus Zartbitter- und drei aus weißer Schokolade.

- $\hookrightarrow$ Nach und nach werden Schokohasen gezogen, der Typ notiert und wieder zurückgelegt.
- $\hookrightarrow$ Wie ist die Wahrscheinlichkeit, dass von sechs gezogenen Schokohasen 3 aus Vollmilch-, 2 aus Zartbitter- und 1 aus weißer Schokolade sind?

Beispiel: Schokohasen

Ein **Beutel** enthält 12 Schokohasen, davon fünf aus Vollmilch-, vier aus Zartbitter- und drei aus weißer Schokolade.

- $\hookrightarrow$ Nach und nach werden Schokohasen gezogen, der Typ notiert und wieder zurückgelegt.
- $\hookrightarrow$ Wie ist die Wahrscheinlichkeit, dass von sechs gezogenen Schokohasen 3 aus Vollmilch-, 2 aus Zartbitter- und 1 aus weißer Schokolade sind?
- $\hookrightarrow$ Multinomialverteilung mit $n = 6, p_1 = \frac{5}{12}, p_2 = \frac{4}{12} \quad \Rightarrow p_3 = 1 - \frac{9}{12} = \frac{3}{12}$

$$f_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = \frac{6!}{3!2!1!} \left(\frac{5}{12}\right)^3 \left(\frac{4}{12}\right)^2 \left(\frac{3}{12}\right)^1 = \frac{625}{5184} = 0.12$$

- $\hookrightarrow$ Werden nur die Kategorien „Vollmilch“ und „Nicht-Vollmilch“ unterschieden, so wird die Multinomialverteilung zur Binomialverteilung:

Beispiel: Schokohasen

Ein **Beutel** enthält 12 Schokohasen, davon fünf aus Vollmilch-, vier aus Zartbitter- und drei aus weißer Schokolade.

- ↪ Nach und nach werden Schokohasen gezogen, der Typ notiert und wieder zurückgelegt.
- ↪ Wie ist die Wahrscheinlichkeit, dass von sechs gezogenen Schokohasen 3 aus Vollmilch-, 2 aus Zartbitter- und 1 aus weißer Schokolade sind?
- ↪ Multinomialverteilung mit $n = 6, p_1 = \frac{5}{12}, p_2 = \frac{4}{12} \quad \Rightarrow p_3 = 1 - \frac{9}{12} = \frac{3}{12}$

$$f_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = \frac{6!}{3!2!1!} \left(\frac{5}{12}\right)^3 \left(\frac{4}{12}\right)^2 \left(\frac{3}{12}\right)^1 = \frac{625}{5184} = 0.12$$

- ↪ Werden nur die Kategorien „Vollmilch“ und „Nicht-Vollmilch“ unterschieden, so wird die Multinomialverteilung zur Binomialverteilung:

$$p = \frac{5}{12}, B(k|p, n) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \binom{6}{3} \left(\frac{5}{12}\right)^3 \left(\frac{7}{12}\right)^3 = 0.28$$

Übung: Auf einem siebentägigen Skiseminar des Instituts wird täglich eine/r der 15 Teilnehmenden (2 Professoren, 5 Mitarbeiter, 8 Studierende) ausgelost, um den Getränkevorrat zu verwalten (mehrmalige Auslosung möglich).

$\hookrightarrow$ Mit welcher WS werden 1 Mitarbeiter und 6 Studierende ausgelost?

$\hookrightarrow$ Mit welcher WS werden nur Mitarbeiter und Studierende ausgelost?

Gemeinsame Verteilungsfunktion

Die **gemeinsame (kumulative) Verteilungsfunktion** F_X eines Zufallsvektors $X := (X_1, X_2, \ldots, X_N)$ von Zufallsvariablen $X_n, n = 1, \ldots, N$, ist definiert als

$$F_{X_1, X_2, \ldots, X_N}(x_1, x_2, \ldots, x_N) := P(\{\omega | X_1(\omega) \leq x_1, X_2(\omega) \leq x_2, \ldots, X_N(\omega) \leq x_N\})$$

$\forall x_n \in \mathbb{R}, n = 1, \ldots, N$

Gemeinsame Verteilungsfunktion

Die **gemeinsame (kumulative) Verteilungsfunktion** F_X eines Zufallsvektors $X := (X_1, X_2, \dots, X_N)$ von Zufallsvariablen X_n, $n = 1, \dots, N$, ist definiert als

$$F_{X_1,X_2,\dots,X_N}(x_1, x_2, \dots, x_N) := P(\{\omega | X_1(\omega) \leq x_1, X_2(\omega) \leq x_2, \dots, X_N(\omega) \leq x_N\})$$

$\forall x_n \in \mathbb{R}, n = 1, \dots, N$

$\hookrightarrow$ da die einzelnen Komponenten die Messbarkeitseigenschaft besitzen, gilt dies auch für den zugehörigen Zufallsvektor, denn

$$\begin{aligned}&\{\omega | X_1(\omega) \leq x_1, X_2(\omega) \leq x_2, \dots, X_N(\omega) \leq x_N\} \\ &\quad = \{\omega | X_1(\omega) \leq x_1\} \bigcap \{\omega | X_2(\omega) \leq x_2\} \bigcap \dots \bigcap \{\omega | X_N(\omega) \leq x_N\} \in \mathcal{A}\end{aligned}$$

$\hookrightarrow$ dies ist insbesondere gültig, weil sämtliche Zufallsvariablen von demselben $\omega \in \Omega$ abhängen

Diskreter bivariater Fall:

$F_{X,Y}(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y) = \sum_{x_i \leq x} \sum_{y_j \leq y} f_{X,Y}(x_i, y_j)$

Wartung einer Maschine

$$
\begin{aligned}
X &: \text{Anzahl Defekte vom Typ I im Wartungszeitraum} \\
Y &: \text{Anzahl Defekte vom Typ II im Wartungszeitraum}
\end{aligned}
$$

Die Einträge der Verteilungsfunktion (links) ergeben sich durch Addition des Eintrags der Dichtefunktion summiert zu den Zellwerten, die links und oberhalb liegen:

Diskreter bivariater Fall:

$F_{X,Y}(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y) = \sum_{x_i \leq x} \sum_{y_j \leq y} f_{X,Y}(x_i, y_j)$

Wartung einer Maschine

X : Anzahl Defekte vom Typ I im Wartungszeitraum

Y : Anzahl Defekte vom Typ II im Wartungszeitraum

Die Einträge der Verteilungsfunktion (links) ergeben sich durch Addition des Eintrags der Dichtefunktion summiert zu den Zellwerten, die links und oberhalb liegen:

$\mathbf{f_{X,Y}(x,y)}$

		Defekt II		
		0	1	2
Defekt I	0	0.1	0.3	0.05
	1	0.05	0.1	0.1
	2	0.05	0.05	0.2

$\mathbf{F_{X,Y}(x,y)}$

		Defekt II		
		0	1	2
Defekt I	0	0.1	0.4	0.45
	1	0.15	0.55	0.7
	2	0.2	0.65	1

Diskreter bivariater Fall:

$F_{X,Y}(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y) = \sum_{x_i \leq x} \sum_{y_j \leq y} f_{X,Y}(x_i, y_j)$

Wartung einer Maschine

X : Anzahl Defekte vom Typ I im Wartungszeitraum

Y : Anzahl Defekte vom Typ II im Wartungszeitraum

Die Einträge der Verteilungsfunktion (links) ergeben sich durch Addition des Eintrags der Dichtefunktion summiert zu den Zellwerten, die links und oberhalb liegen:

$\mathbf{f_{X,Y}(x,y)}$

		Defekt II		
		0	1	2
Defekt I	0	0.1	0.3	0.05
	1	0.05	0.1	0.1
	2	0.05	0.05	0.2

$\mathbf{F_{X,Y}(x,y)}$

		Defekt II		
		0	1	2
Defekt I	0	0.1	0.4	0.45
	1	0.15	0.55	0.7
	2	0.2	0.65	1

Übung: Zweifacher W4-Würfelwurf mit den Würfen X_1, X_2.
Bestimmen Sie die VF des Zufallsvektors $(X, Y) = (|X_1 - X_2|, X_1 + X_2)$

Eigenschaften der gemeinsamen Verteilungsfunktion $F = F_{X,Y}$ (Bivariater Fall)

i) $F(-\infty, y) := \lim\limits_{x \to -\infty} F(x, y) = 0 = \lim\limits_{y \to -\infty} F(x, y) =: F(x, -\infty)$ und
$F(\infty, \infty) := \lim_{x \to \infty, y \to \infty} F(x, y) = 1$

Eigenschaften der gemeinsamen Verteilungsfunktion $F = F_{X,Y}$(Bivariater Fall)

i) $F(-\infty, y) := \lim\limits_{x \to -\infty} F(x, y) = 0 = \lim\limits_{y \to -\infty} F(x, y) =: F(x, -\infty)$ und
$F(\infty, \infty) := \lim_{x \to \infty, y \to \infty} F(x, y) = 1$

ii) Seien $x_1 < x_2$ und $y_1 < y_2$. Dann gilt:

$$P(x_1 < X \leq x_2, y_1 < Y \leq y_2) = F(x_2, y_2) - F(x_2, y_1) - F(x_1, y_2) + F(x_1, y_1)$$

Eigenschaften der gemeinsamen Verteilungsfunktion $F = F_{X,Y}$(Bivariater Fall)

i) $F(-\infty, y) := \lim\limits_{x \to -\infty} F(x, y) = 0 = \lim\limits_{y \to -\infty} F(x, y) =: F(x, -\infty)$ und $F(\infty, \infty) := \lim_{x \to \infty, y \to \infty} F(x, y) = 1$

ii) Seien $x_1 < x_2$ und $y_1 < y_2$. Dann gilt:

$$P(x_1 < X \leq x_2, y_1 < Y \leq y_2) = F(x_2, y_2) - F(x_2, y_1) - F(x_1, y_2) + F(x_1, y_1)$$

iii) F ist rechtsstetig in jedem Argument, d.h.

$$\lim_{h \downarrow 0} F_{X,Y}(x + h, y) = \lim_{h \downarrow 0} F_{X,Y}(x, y + h) = F_{X,Y}(x, y)$$

Eigenschaften der gemeinsamen Verteilungsfunktion $F = F_{X,Y}$(Bivariater Fall)

i) $F(-\infty, y) := \lim\limits_{x \to -\infty} F(x, y) = 0 = \lim\limits_{y \to -\infty} F(x, y) =: F(x, -\infty)$ und
$F(\infty, \infty) := \lim_{x \to \infty, y \to \infty} F(x, y) = 1$

ii) Seien $x_1 < x_2$ und $y_1 < y_2$. Dann gilt:

$$P(x_1 < X \leq x_2, y_1 < Y \leq y_2) = F(x_2, y_2) - F(x_2, y_1) - F(x_1, y_2) + F(x_1, y_1)$$

iii) F ist rechtsstetig in jedem Argument, d.h.

$$\lim_{h \downarrow 0} F_{X,Y}(x + h, y) = \lim_{h \downarrow 0} F_{X,Y}(x, y + h) = F_{X,Y}(x, y)$$

Korrespondenzsatz

Jede Funktion $F : \mathbb{R}^2 \to [0, 1]$ mit den Eigenschaften i) und iii) und der Eigenschaft

$$F(x_2, y_2) - F(x_2, y_1) - F(x_1, y_2) + F(x_1, y_1) \geq 0 \quad \forall x_1 < x_2, y_1 < y_2 \quad (*)$$

legt auf eindeutige Art und Weise eine bivariate Verteilung auf $\mathbb{R}^2$ fest.

(mit Verallgemeinerung von $(*)$ auf multivariate Verteilungen übertragbar)

Wartung einer Maschine

	Defekt II		
$F_{X,Y}(x,y)$	0	1	2
0	0.1	0.4	0.45
1	0.15	0.55	0.7
2	0.2	0.65	1

Wartung einer Maschine

$F_{X,Y}(x,y)$	Defekt II 0	1	2
0	0.1	0.4	0.45
1	0.15	0.55	0.7
2	0.2	0.65	1

$f_{X,Y}(x,y)$	Defekt II 0	1	2
0	0.1	0.3	0.05
1	0.05	0.1	0.1
2	0.05	0.05	0.2

$$f_{X,Y}(1,2) = P(0 < X \leq 1, 1 < Y \leq 2) = 0.7 - 0.55 - 0.45 + 0.4 = 0.1$$

Die diskrete Dichte (und damit die bivariate Verteilung von X, Y) lässt sich aus $F_{X,Y}$ also „rekonstruieren“.

$\hookrightarrow$ $F_X(x) := F_{X,Y}(x, \infty)$ und $F_Y(y) := F_{X,Y}(\infty, y)$ werden **Randverteilungsfunktionen** von X und Y genannt

	$F_{X,Y}(x,y)$	Defekt II 0	1	2
Defekt I	0	0.1	0.4	0.45
	1	0.15	0.55	0.7
	2	0.2	0.65	1 ; 1

Randverteilungsfunktion von X

Randverteilungsfunktion von Y

(bei endlich-diskreten Verteilungen als untere Zeile/rechte Spalte der Tabelle zu $F_{X,Y}$ ablesbar)

Stetige Zufallsvektoren

Ein Zufallsvektor $= (X_1, \ldots, X_N)$ heißt **N-dimensionaler stetiger Zufallsvektor**, wenn mit einer geeigneten Funktion $f_{X_1,\ldots,X_N} \geq 0$ für die multivariate VF gilt:

$$F_{X_1,\ldots,X_N}(x_1, \ldots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_N} \cdots \int_{-\infty}^{x_1} f_{X_1,\ldots,X_N}(u_1, \ldots, u_N) du_1 \ldots du_N$$

Die Funktion $f_{X_1,\ldots,X_N}$ heißt **gemeinsame Dichtefunktion** der Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_N$. Die zu einem stetigen Zufallsvektor gehörende gemeinsame Verteilungsfunktion heißt **absolut stetig.**

Stetige Zufallsvektoren

Ein Zufallsvektor $= (X_1, \ldots, X_N)$ heißt **N-dimensionaler stetiger Zufallsvektor**, wenn mit einer geeigneten Funktion $f_{X_1,\ldots,X_N} \geq 0$ für die multivariate VF gilt:

$$F_{X_1,\ldots,X_N}(x_1, \ldots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_N} \cdots \int_{-\infty}^{x_1} f_{X_1,\ldots,X_N}(u_1, \ldots, u_N) du_1 \ldots du_N$$

Die Funktion $f_{X_1,\ldots,X_N}$ heißt **gemeinsame Dichtefunktion** der Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_N$. Die zu einem stetigen Zufallsvektor gehörende gemeinsame Verteilungsfunktion heißt **absolut stetig.**

Sei (X, Y) ein 2-dimensionaler stetiger Zufallsvektor. Dann läßt sich die gemeinsame Dichtefunktion $f_{X,Y}$ aus der gemeinsamen Verteilungsfunktion berechnen:

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{\partial^2 F_{X,Y}(x, y)}{\partial x \partial y}$$

Randdichten

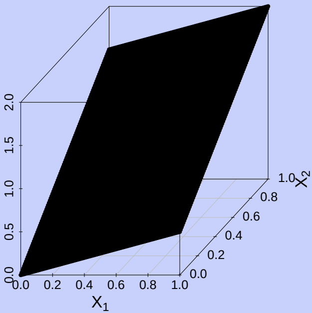
Wenn $(X\ Y)$ ein 2-dimensionaler stetiger Zufallsvektor ist, dann werden die Dichtefunktionen

$$f_X(x) := \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dy \text{ und } f_Y(y) := \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dx$$

stetige Randdichtefunktionen von X bzw. Y genannt.

Beispiel stetige gemeinsame Dichtefunktion

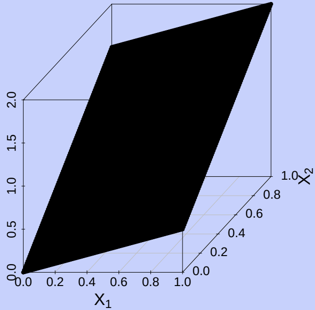
$$f_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = \begin{cases} \frac{1}{2}x_1 + \frac{3}{2}x_2 & 0 \le x_1, x_2 \le 1, \\ 0 & sonst \end{cases}$$



$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \int_0^1 f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)\; dx_1 dx_2 \\
= \; &\int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{1}{2}x_1 + \frac{3}{2}x_2 \; dx_1 \right) dx_2 \\
= \; &\int_0^1 \left(\frac{1}{2} \cdot \left[\frac{x_1^2}{2}\right]_0^1 + \frac{3}{2}x_2 \cdot \left[x_1\right]_0^1 \right) dx_2 \\
= \; &\int_0^1 \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{2}x_2 \right) dx_2 \\
= \; &\frac{1}{4} \cdot \left[x_2\right]_0^1 + \frac{3}{2} \cdot \left[\frac{x_2^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1
\end{aligned}$$

$f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)$ ist eine Dichte:

$$f_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = \begin{cases} \frac{1}{2}x_1 + \frac{3}{2}x_2 & 0 \leq x_1, x_2 \leq 1, \\ 0 & \textit{sonst} \end{cases}$$

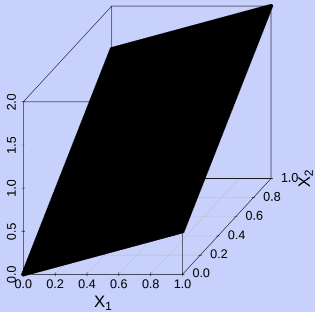


Randdichten:

$$\begin{aligned} f_{X_1}(x_1) &= \int_0^1 \left(\frac{1}{2}x_1 + \frac{3}{2}x_2\right) dx_2 \\ &= \frac{1}{2}x_1 + \frac{3}{2}\left[\frac{x_2^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}x_1 + \frac{3}{4} \end{aligned}$$

$$f_{X_2}(x_2) =$$

$$f_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = \begin{cases} \frac{1}{2}x_1 + \frac{3}{2}x_2 & 0 \leq x_1, x_2 \leq 1, \\ 0 & \textit{sonst} \end{cases}$$

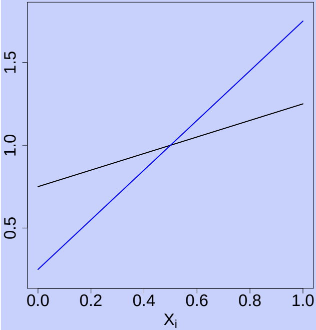


Randdichten:

$$\begin{aligned} f_{X_1}(x_1) &= \int_0^1 \left(\frac{1}{2}x_1 + \frac{3}{2}x_2\right) dx_2 \\ &= \frac{1}{2}x_1 + \frac{3}{2}\left[\frac{x_2^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}x_1 + \frac{3}{4} \end{aligned}$$

$$f_{X_2}(x_2) = \int_0^1 \left(\frac{1}{2}x_1 + \frac{3}{2}x_2\right) dx_1 = \frac{3}{2}x_2 + \frac{1}{4}$$

$$f_{X_1,X_2} = \begin{cases} \frac{1}{2}x_1 + \frac{3}{2}x_2 & 0 \leq x_1, x_2 \leq 1, \\ 0 & sonst \end{cases}$$



Randdichten:

$$\begin{aligned} f_{X_1}(x_1) &= \int_0^1 \left(\frac{1}{2}x_1 + \frac{3}{2}x_2\right) dx_2 \\ &= \frac{1}{2}x_1 + \frac{3}{2}\left[\frac{x_2^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}x_1 + \frac{3}{4} \end{aligned}$$

$$f_{X_2}(x_2) = \int_0^1 \left(\frac{1}{2}x_1 + \frac{3}{2}x_2\right) dx_1 = \frac{3}{2}x_2 + \frac{1}{4}$$

$\hookrightarrow$ jede Randdichte lässt sich aus der gemeinsamen Dichte bestimmen, umgekehrt gilt das nicht:

Beispiel (Übung)

$$f_{X,Y}(x,y,\alpha) := f_X(x)f_Y(y)[1+\alpha\cdot(2F_X(x)-1)(2F_Y(y)-1)] \quad \forall -1 \leq \alpha \leq 1$$

mit Randdichten f_X, f_Y und Randverteilungen F_X, F_Y. Dann gilt:

(i) $f_{X,Y}$ ist eine bivariate stetige WS-Dichte für jedes α

(ii) f_X und f_Y sind Randdichten von $f_{X,Y}$ für jedes α.

Unabhängigkeit von Zufallsvariablen

Zufallsvariablen $X_1, \dots, X_N$ heißen **(stochastisch) unabhängig** (st.u.), wenn für alle Ereignisse $A_1, \dots, A_N$ gilt:

$$P(X_1 \in A_1, \dots, X_N \in A_N) = P(X_1 \in A_1) \times \cdots \times P(X_N \in A_N)$$

Unabhängigkeit von Zufallsvariablen

Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_N$ heißen **(stochastisch) unabhängig** (st.u.), wenn für alle Ereignisse $A_1, \ldots, A_N$ gilt:

$$P(X_1 \in A_1, \ldots, X_N \in A_N) = P(X_1 \in A_1) \times \cdots \times P(X_N \in A_N)$$

Für diskrete und stetige Zufallsvariablen mit der gemeinsamen Verteilungsfunktion $F_{X_1,\ldots,X_N}$ und gemeinsamer Dichtefunktion $f_{X_1,\ldots,X_N}$ lauten gleichwertige Kriterien für st.U.:

(i) $F_{X_1,\ldots,X_N}(x_1, x_2, \ldots, x_N) = \prod_{i=1}^{N} F_{X_i}(x_i) \quad \forall x_1, \ldots, x_N$

(ii) $f_{X_1,\ldots,X_N}(x_1, x_2, \ldots, x_N) = \prod_{i=1}^{N} f_{X_i}(x_i) \quad \forall x_1, \ldots, x_N$

Unabhängigkeit von Zufallsvariablen

Zufallsvariablen $X_1, \dots, X_N$ heißen **(stochastisch) unabhängig** (st.u.), wenn für alle Ereignisse $A_1, \dots, A_N$ gilt:

$$P(X_1 \in A_1, \dots, X_N \in A_N) = P(X_1 \in A_1) \times \dots \times P(X_N \in A_N)$$

Für diskrete und stetige Zufallsvariablen mit der gemeinsamen Verteilungsfunktion $F_{X_1,\dots,X_N}$ und gemeinsamer Dichtefunktion $f_{X_1,\dots,X_N}$ lauten gleichwertige Kriterien für st.U.:

(i) $F_{X_1,\dots,X_N}(x_1, x_2, \dots, x_N) = \prod_{i=1}^N F_{X_i}(x_i) \quad \forall x_1, \dots, x_N$

(ii) $f_{X_1,\dots,X_N}(x_1, x_2, \dots, x_N) = \prod_{i=1}^N f_{X_i}(x_i) \quad \forall x_1, \dots, x_N$

u.i.v.-Folgen

Eine Folge $X_1, X_2, \dots, X_N, \dots$ von Zufallsvariablen heißt **u.i.v-Folge,** wenn sie alle dieselbe Verteilung haben und je endlich viele stochastisch unabhängig sind.

Beispiel

$$f_{X,Y}(x,y) := e^{-(x+y)} \quad \text{für } x, y > 0$$

Für die Randdichten gilt:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dy = \int_0^{\infty} e^{-(x+y)}dy$$

Beispiel

$$f_{X,Y}(x,y) := e^{-(x+y)} \quad \text{für } x,y > 0$$

Für die Randdichten gilt:

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dy = \int_0^{\infty} e^{-(x+y)}dy \\ &= e^{-x}\int_0^{\infty} e^{-y}dy = \end{aligned}$$

Beispiel

$$f_{X,Y}(x,y) := e^{-(x+y)} \quad \text{für } x,y > 0$$

Für die Randdichten gilt:

$$\begin{aligned}
f_X(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dy = \int_0^{\infty} e^{-(x+y)}dy \\
&= e^{-x}\int_0^{\infty} e^{-y}dy = e^{-x}\cdot[-e^{-y}]_0^{\infty} = e^{-x}[0-(-1)] = e^{-x} \\
f_Y(y) &= e^{-y} \qquad \text{analog}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow f_{X,Y}(x,y) = e^{-(x+y)} = e^{-x}e^{-y} = f_X(x)f_Y(y)$$

$\Rightarrow$ X und Y sind stochastisch unabhängig

Übung: Prüfen Sie, dass $f(x, y) = f_{X,Y}(x, y) = \frac{12}{7}x(x + y)$ auf $[0; 1] \times [0; 1]$ eine WS-Dichte ist und berechnen Sie die Randverteilungen sowie die gemeinsame Verteilungsfunktion. Sind X, Y st.u.?

Zusammenhang zwischen st.u. Ereignissen und st.u. Zufallsvariablen:

Memo DuW: Stochastische Unabhängigkeit von Ereignissen

$\hookrightarrow$ Zwei Ereignisse A, B heißen st.u., wenn $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

$\hookrightarrow$ Ereignisse $A_1, \ldots, A_n$ heißen st.u., wenn für jede beliebige Auswahl von $k \leq n$ Ereignissen $A_{i_1}, \ldots, A_{i_k}$ gilt $P(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \times \cdots \times P(A_{i_k})$

Zusammenhang zwischen st.u. Ereignissen und st.u. Zufallsvariablen:

Memo DuW: Stochastische Unabhängigkeit von Ereignissen

- $\hookrightarrow$ Zwei Ereignisse A, B heißen st.u., wenn $P(A \cap B) = P(A)P(B)$
- $\hookrightarrow$ Ereignisse $A_1, \ldots, A_n$ heißen st.u., wenn für jede beliebige Auswahl von $k \leq n$ Ereignissen $A_{i_1}, \ldots, A_{i_k}$ gilt $P(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \times \cdots \times P(A_{i_k})$

Memo DuW: Indikatorfunktion eines Ereignisses A

$$\mathbb{1}_A(\omega) := \begin{cases} 1 & \text{falls } \omega \in A \\ 0 & \text{falls } \omega \notin A \end{cases}$$

Sie ist eine Zufallsvariable mit Bernoulli-Verteilung $\mathcal{B}(1, p)$, $p = P(A)$.

Zusammenhang zwischen st.u. Ereignissen und st.u. Zufallsvariablen:

Memo DuW: Stochastische Unabhängigkeit von Ereignissen

$\hookrightarrow$ Zwei Ereignisse A, B heißen st.u., wenn $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

$\hookrightarrow$ Ereignisse $A_1, \ldots, A_n$ heißen st.u., wenn für jede beliebige Auswahl von $k \leq n$ Ereignissen $A_{i_1}, \ldots, A_{i_k}$ gilt $P(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \times \cdots \times P(A_{i_k})$

Memo DuW: Indikatorfunktion eines Ereignisses A

$$\mathbb{1}_A(\omega) := \begin{cases} 1 & \text{falls } \omega \in A \\ 0 & \text{falls } \omega \notin A \end{cases}$$

Sie ist eine Zufallsvariable mit Bernoulli-Verteilung $\mathcal{B}(1, p)$, $p = P(A)$.

St.U. von Ereignissen vs. st.U. von Zufallsvariablen

Ereignisse $A_1, \ldots, A_n$ sind st.u. genau dann, wenn die ZV $\mathbb{1}_{A_1}, \ldots, \mathbb{1}_{A_n}$ st.u. sind.

Memo DuW: Momente einer Zufallsvariable

$\hookrightarrow$ Für eine (messbare) Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und eine Zufallsvariable X ist

$$E(g(X)) = \begin{cases} \sum_k g(x_k) \cdot f_X(x_k) & \text{diskreter Fall} \\ \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot f_X(x) dx & \text{stetiger Fall} \end{cases}$$

Memo DuW: Momente einer Zufallsvariable

↪ Für eine (messbare) Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und eine Zufallsvariable X ist

$$E(g(X)) = \begin{cases} \sum_k g(x_k) \cdot f_X(x_k) & \text{diskreter Fall} \\ \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot f_X(x) dx & \text{stetiger Fall} \end{cases}$$

↪ Spezialfälle:

- ☐ Erwartungswert $E(X)$ (mit $g(x) = x$)
- ☐ Varianz $var(X) = E(X - E(X))^2 = E(X^2) - (E(X))^2$

Memo DuW: Momente einer Zufallsvariable

↪ Für eine (messbare) Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und eine Zufallsvariable X ist

$$E(g(X)) = \begin{cases} \sum_k g(x_k) \cdot f_X(x_k) & \text{diskreter Fall} \\ \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot f_X(x) dx & \text{stetiger Fall} \end{cases}$$

↪ Spezialfälle:

- ☐ Erwartungswert $E(X)$ (mit $g(x) = x$)
- ☐ Varianz $var(X) = E(X - E(X))^2 = E(X^2) - (E(X))^2$

↪ Regeln für ZV X, Y (sofern Erwartungswerte existieren) und $a, b, c \in \mathbb{R}$

- ☐ $E(\mathbb{1}_A) = P(A)$.
- ☐ $E(aX + bY + c) = aE(X) + bE(Y) + c$
- ☐ $var(aX + b) = a^2 var(X)$ für
- ☐ X, Y st.u. $\Rightarrow E(XY) = E(X)E(Y)$
- ☐ X, Y, st.u. $\Rightarrow var(X + Y) = var(X) + var(Y)$

↪ SGGZ:
Für u.i.v. $X_1, X_2, \ldots$ mit ex. Erwartungswert gilt $\bar{X}_n \xrightarrow{n\to\infty} E(X_1)$ mit WS 1.

Korrelationskoeffizienten

Welche Kennzahlen beschreiben den Grad des (linearen) Zusammenhangs zwischen Zufallsvariablen X, Y?

Seien X, Y Zufallsvariablen mit Dichtefunktion $f_{X,Y}$ und existierenden Varianzen.

Kovarianz: $cov(X, Y) := E((X - EX)(Y - EY)) = E(XY) - E(X)E(Y)$

Korrelationskoeffizienten

Welche Kennzahlen beschreiben den Grad des (linearen) Zusammenhangs zwischen Zufallsvariablen X, Y?

Seien X, Y Zufallsvariablen mit Dichtefunktion $f_{X,Y}$ und existierenden Varianzen.

Kovarianz: $cov(X, Y) := E((X - EX)(Y - EY)) = E(XY) - E(X)E(Y)$

Dabei: $E(XY) = \sum_{k,i} x_k \cdot y_i \cdot f_{X,Y}(x_k, y_i)$ (diskreter Fall)

$E(XY) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot y \cdot f_{X,Y}(x, y) dxdy$ (stetiger Fall)

Korrelationskoeffizienten

Welche Kennzahlen beschreiben den Grad des (linearen) Zusammenhangs zwischen Zufallsvariablen X, Y?

Seien X, Y Zufallsvariablen mit Dichtefunktion $f_{X,Y}$ und existierenden Varianzen.

Kovarianz: $cov(X,Y) := E((X-EX)(Y-EY)) = E(XY) - E(X)E(Y)$

Dabei: $E(XY) = \sum_{k,i} x_k \cdot y_i \cdot f_{X,Y}(x_k, y_i)$ (diskreter Fall)

$E(XY) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot y \cdot f_{X,Y}(x,y)dxdy$ (stetiger Fall)

Pearson-Korrelation: $cor(X,Y) := cov(X,Y)/\sqrt{var(X)var(Y)}$

$\hookrightarrow$ Mit $\rho = cor(X,Y)$ gilt $-1 \leq \rho \leq 1$ und

$|\rho| = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \exists a, b, c \in \mathbb{R},$ mit $ab\rho < 0$ und $aX + bY = c$ fast sicher

Korrelationskoeffizienten

Welche Kennzahlen beschreiben den Grad des (linearen) Zusammenhangs zwischen Zufallsvariablen X, Y?

Seien X, Y Zufallsvariablen mit Dichtefunktion $f_{X,Y}$ und existierenden Varianzen.

Kovarianz: $cov(X, Y) := E((X - EX)(Y - EY)) = E(XY) - E(X)E(Y)$

Dabei: $E(XY) = \sum_{k,i} x_k \cdot y_i \cdot f_{X,Y}(x_k, y_i)$ (diskreter Fall)

$E(XY) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot y \cdot f_{X,Y}(x, y) dxdy$ (stetiger Fall)

Pearson-Korrelation: $cor(X, Y) := cov(X, Y)/\sqrt{var(X)var(Y)}$

$\hookrightarrow$ Mit $\rho = cor(X, Y)$ gilt $-1 \leq \rho \leq 1$ und
$|\rho| = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \exists a, b, c \in \mathbb{R},$ mit $ab\rho < 0$ und $aX + bY = c$ fast sicher

$\hookrightarrow$ X, Y stochastisch unabhängig $\Rightarrow cov(X, Y) = cor(X, Y) = 0$ (Umkehrung falsch).

Beispiel: Wartung einer Maschine

		Defekt II			
	X_1/X_2	0	1	2	f_{X_1}
Defekt I	0	0.1	0.3	0.05	0.45
	1	0.05	0.1	0.1	0.25
	2	0.05	0.05	0.2	0.3
	f_{X_2}	0.2	0.45	0.35	1

Beispiel: Wartung einer Maschine

		Defekt II			
	X_1/X_2	0	1	2	f_{X_1}
Defekt I	0	0.1	0.3	0.05	0.45
	1	0.05	0.1	0.1	0.25
	2	0.05	0.05	0.2	0.3
	f_{X_2}	0.2	0.45	0.35	1

$$E(X_1X_2) = 0 \cdot (0.1 + \cdots + 0.05) + 1 \cdot (0.1) + 2 \cdot (0.05 + 0.1) + 4 \cdot (0.2) = 1.2$$

Beispiel: Wartung einer Maschine

		Defekt II			
	X_1/X_2	0	1	2	f_{X_1}
Defekt I	0	0.1	0.3	0.05	0.45
	1	0.05	0.1	0.1	0.25
	2	0.05	0.05	0.2	0.3
	f_{X_2}	0.2	0.45	0.35	1

$$E(X_1X_2) = 0 \cdot (0.1 + \cdots + 0.05) + 1 \cdot (0.1) + 2 \cdot (0.05 + 0.1) + 4 \cdot (0.2) = 1.2$$

$$E(X_1) =$$

Beispiel: Wartung einer Maschine

		Defekt II			
	X_1/X_2	0	1	2	f_{X_1}
Defekt I	0	0.1	0.3	0.05	0.45
	1	0.05	0.1	0.1	0.25
	2	0.05	0.05	0.2	0.3
	f_{X_2}	0.2	0.45	0.35	1

$E(X_1X_2) = 0 \cdot (0.1 + \cdots + 0.05) + 1 \cdot (0.1) + 2 \cdot (0.05 + 0.1) + 4 \cdot (0.2) = 1.2$

$E(X_1) = 0 \cdot 0.45 + 1 \cdot 0.25 + 2 \cdot 0.3 = 0.85$

$E(X_1^2) =$

Beispiel: Wartung einer Maschine

		Defekt II			
	X_1/X_2	0	1	2	f_{X_1}
Defekt I	0	0.1	0.3	0.05	0.45
	1	0.05	0.1	0.1	0.25
	2	0.05	0.05	0.2	0.3
	f_{X_2}	0.2	0.45	0.35	1

$$E(X_1X_2) = 0 \cdot (0.1 + \cdots + 0.05) + 1 \cdot (0.1) + 2 \cdot (0.05 + 0.1) + 4 \cdot (0.2) = 1.2$$

$$E(X_1) = 0 \cdot 0.45 + 1 \cdot 0.25 + 2 \cdot 0.3 = 0.85$$

$$E(X_1^2) = 0 \cdot 0.45 + 1 \cdot 0.25 + 2^2 \cdot 0.3 = 1.45, \qquad var(X_1) =$$

Beispiel: Wartung einer Maschine

		Defekt II			
	X_1/X_2	0	1	2	f_{X_1}
Defekt I	0	0.1	0.3	0.05	0.45
	1	0.05	0.1	0.1	0.25
	2	0.05	0.05	0.2	0.3
	f_{X_2}	0.2	0.45	0.35	1

$$E(X_1X_2) = 0 \cdot (0.1 + \cdots + 0.05) + 1 \cdot (0.1) + 2 \cdot (0.05 + 0.1) + 4 \cdot (0.2) = 1.2$$

$$E(X_1) = 0 \cdot 0.45 + 1 \cdot 0.25 + 2 \cdot 0.3 = 0.85$$

$$E(X_1^2) = 0 \cdot 0.45 + 1 \cdot 0.25 + 2^2 \cdot 0.3 = 1.45, \qquad var(X_1) = 1.45 - 0.85^2 = 0.7275$$

$$E(X_2) = 0 \cdot 0.2 + 1 \cdot 0.45 + 2 \cdot 0.35 = 1.15$$

Beispiel: Wartung einer Maschine

		Defekt II			
	X_1/X_2	0	1	2	f_{X_1}
Defekt I	0	0.1	0.3	0.05	0.45
	1	0.05	0.1	0.1	0.25
	2	0.05	0.05	0.2	0.3
	f_{X_2}	0.2	0.45	0.35	1

$$E(X_1X_2) = 0 \cdot (0.1 + \cdots + 0.05) + 1 \cdot (0.1) + 2 \cdot (0.05 + 0.1) + 4 \cdot (0.2) = 1.2$$

$$E(X_1) = 0 \cdot 0.45 + 1 \cdot 0.25 + 2 \cdot 0.3 = 0.85$$

$$E(X_1^2) = 0 \cdot 0.45 + 1 \cdot 0.25 + 2^2 \cdot 0.3 = 1.45, \qquad var(X_1) = 1.45 - 0.85^2 = 0.7275$$

$$E(X_2) = 0 \cdot 0.2 + 1 \cdot 0.45 + 2 \cdot 0.35 = 1.15$$

$$E(X_2^2) = 0 \cdot 0.2 + 1 \cdot 0.45 + 2^2 \cdot 0.35 = 1.85, \qquad var(X_2) =$$

Beispiel: Wartung einer Maschine

	X_1/X_2	Defekt II 0	1	2	f_{X_1}
Defekt I	0	0.1	0.3	0.05	0.45
	1	0.05	0.1	0.1	0.25
	2	0.05	0.05	0.2	0.3
	f_{X_2}	0.2	0.45	0.35	1

$$E(X_1X_2) = 0 \cdot (0.1 + \cdots + 0.05) + 1 \cdot (0.1) + 2 \cdot (0.05 + 0.1) + 4 \cdot (0.2) = 1.2$$

$$E(X_1) = 0 \cdot 0.45 + 1 \cdot 0.25 + 2 \cdot 0.3 = 0.85$$

$$E(X_1^2) = 0 \cdot 0.45 + 1 \cdot 0.25 + 2^2 \cdot 0.3 = 1.45, \qquad var(X_1) = 1.45 - 0.85^2 = 0.7275$$

$$E(X_2) = 0 \cdot 0.2 + 1 \cdot 0.45 + 2 \cdot 0.35 = 1.15$$

$$E(X_2^2) = 0 \cdot 0.2 + 1 \cdot 0.45 + 2^2 \cdot 0.35 = 1.85, \qquad var(X_2) = 1.85 - 1.15^2 = 0.5275$$

$$cov(X_1, X_2) =$$

Beispiel: Wartung einer Maschine

		Defekt II			
	X_1/X_2	0	1	2	f_{X_1}
Defekt I	0	0.1	0.3	0.05	0.45
	1	0.05	0.1	0.1	0.25
	2	0.05	0.05	0.2	0.3
	f_{X_2}	0.2	0.45	0.35	1

$$E(X_1X_2) = 0 \cdot (0.1 + \cdots + 0.05) + 1 \cdot (0.1) + 2 \cdot (0.05 + 0.1) + 4 \cdot (0.2) = 1.2$$

$$E(X_1) = 0 \cdot 0.45 + 1 \cdot 0.25 + 2 \cdot 0.3 = 0.85$$

$$E(X_1^2) = 0 \cdot 0.45 + 1 \cdot 0.25 + 2^2 \cdot 0.3 = 1.45, \qquad var(X_1) = 1.45 - 0.85^2 = 0.7275$$

$$E(X_2) = 0 \cdot 0.2 + 1 \cdot 0.45 + 2 \cdot 0.35 = 1.15$$

$$E(X_2^2) = 0 \cdot 0.2 + 1 \cdot 0.45 + 2^2 \cdot 0.35 = 1.85, \qquad var(X_2) = 1.85 - 1.15^2 = 0.5275$$

$$cov(X_1, X_2) = 1.2 - 0.85 \cdot 1.15 = 0.2225$$

$$cor(X_1, X_2) =$$

Beispiel: Wartung einer Maschine

	X_1/X_2	Defekt II 0	1	2	f_{X_1}
Defekt I	0	0.1	0.3	0.05	0.45
	1	0.05	0.1	0.1	0.25
	2	0.05	0.05	0.2	0.3
	f_{X_2}	0.2	0.45	0.35	1

$$E(X_1X_2) = 0 \cdot (0.1 + \cdots + 0.05) + 1 \cdot (0.1) + 2 \cdot (0.05 + 0.1) + 4 \cdot (0.2) = 1.2$$

$$E(X_1) = 0 \cdot 0.45 + 1 \cdot 0.25 + 2 \cdot 0.3 = 0.85$$

$$E(X_1^2) = 0 \cdot 0.45 + 1 \cdot 0.25 + 2^2 \cdot 0.3 = 1.45, \qquad var(X_1) = 1.45 - 0.85^2 = 0.7275$$

$$E(X_2) = 0 \cdot 0.2 + 1 \cdot 0.45 + 2 \cdot 0.35 = 1.15$$

$$E(X_2^2) = 0 \cdot 0.2 + 1 \cdot 0.45 + 2^2 \cdot 0.35 = 1.85, \qquad var(X_2) = 1.85 - 1.15^2 = 0.5275$$

$$cov(X_1, X_2) = 1.2 - 0.85 \cdot 1.15 = 0.2225$$

$$cor(X_1, X_2) = 0.2225/\sqrt{0.7275 \cdot 0.5275} \approx 0.359$$

Übung: Berechnen Sie in der Situation des zweifachen W4-Würfelwurfes (s.o.) die Korrelation von $X = |X_1 - X_2|$, $Y = X_1 + X_2$

Beispiel stetige gemeinsame Dichtefunktion

$$f_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = \begin{cases} \frac{1}{2}x_1 + \frac{3}{2}x_2 & 0 \leq x_1, x_2 \leq 1, \\ 0 & sonst \end{cases}$$

mit Randdichten $f_{X_1}(x_1) = \frac{1}{2}x_1 + \frac{3}{4}$, $f_{X_2}(x_2) = \frac{3}{2}x_2 + \frac{1}{4}$ (auf [0; 1])

$$E(X_1X_2) = \int_0^1 \int_0^1 xy\left(\tfrac{1}{2}x + \tfrac{3}{2}y\right)dxdy = \int_0^1 \tfrac{1}{2}x^2dx \int_0^1 ydy + \int_0^1 xdx \int_0^1 \tfrac{3}{2}y^2dy = \cdots = \tfrac{1}{3}$$

$$E(X_1) = \int_0^1 x\left(\tfrac{1}{2}x + \tfrac{3}{4}\right)dx = \cdots = \tfrac{13}{24}$$

$$E(X_1^2) = \int_0^1 x^2\left(\tfrac{1}{2}x + \tfrac{3}{4}\right)dx = \cdots = \tfrac{3}{8} \qquad var(X_1) = \tfrac{3}{8} - \left(\tfrac{13}{24}\right)^2 = \tfrac{47}{576}$$

$$E(X_2) = \int_0^1 y\left(\tfrac{3}{2}y + \tfrac{1}{4}\right)dy = \cdots = \tfrac{5}{8}$$

$$E(X_2^2) = \int_0^1 y^2\left(\tfrac{3}{2}y + \tfrac{1}{4}\right)dy = \cdots = \tfrac{11}{24} \qquad var(X_2) = \tfrac{11}{24} - \left(\tfrac{5}{8}\right)^2 = \tfrac{13}{192}$$

$$cov(X_1,X_2) = \tfrac{1}{3} - \tfrac{13}{24} \cdot \tfrac{5}{8} = -\tfrac{1}{192}$$

$$cor(X_1,X_2) = -\tfrac{1}{192} \Big/ \sqrt{\tfrac{47}{576} \cdot \tfrac{13}{192}} = \cdots = -\sqrt{3/611} \approx 0.07$$

Übung: Berechnen Sie $cor(X, Y)$ für $f_{X,Y}(x, y) = \frac{12}{7}x(x + y)\mathbb{1}_{[0;1]^2}(x, y)$

$\hookrightarrow$ Kovarianz und Pearson-Korrelation haben empirische Analoga (DuW)

- ☐ $s_{xy} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$ (und $s_x = \sqrt{s_{xx}}$, $s_y = \sqrt{s_{yy}}$)
- ☐ $r_{xy} = \frac{s_{xy}}{s_x s_y}$

$\hookrightarrow$ Kovarianz und Pearson-Korrelation haben empirische Analoga (DuW)

- $s_{xy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$ (und $s_x = \sqrt{s_{xx}}$, $s_y = \sqrt{s_{yy}}$)
- $r_{xy} = \frac{s_{xy}}{s_x s_y}$

$\hookrightarrow$ Bei u.i.v.-Folgen von MZV $(X_1, Y_1), \ldots, (X_n, Y_n), \ldots$ gelten auch hier GGZ

$\hookrightarrow$ Kovarianz und Pearson-Korrelation haben empirische Analoga (DuW)

- $s_{xy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$ (und $s_x = \sqrt{s_{xx}}$, $s_y = \sqrt{s_{yy}}$)
- $r_{xy} = \frac{s_{xy}}{s_x s_y}$

$\hookrightarrow$ Bei u.i.v.-Folgen von MZV $(X_1, Y_1), \ldots, (X_n, Y_n), \ldots$ gelten auch hier GGZ

$\hookrightarrow$ z.B. bei existierenden Varianzen $var(X_i), var(Y_i)$ mit WS 1:

$$s_{XY} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y}) \quad \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \quad cov(X, Y)$$

$\hookrightarrow$ Kovarianz und Pearson-Korrelation haben empirische Analoga (DuW)

- ☐ $s_{xy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$ (und $s_x = \sqrt{s_{xx}}$, $s_y = \sqrt{s_{yy}}$)
- ☐ $r_{xy} = \frac{s_{xy}}{s_x s_y}$

$\hookrightarrow$ Bei u.i.v.-Folgen von MZV $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n), \dots$ gelten auch hier GGZ

$\hookrightarrow$ z.B. bei existierenden Varianzen $var(X_i), var(Y_i)$ mit WS 1:

$$s_{XY} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y}) \quad \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \quad cov(X, Y)$$

$$r_{XY} = \frac{s_{XY}}{s_Y s_Y} \quad \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \quad \frac{cov(X, Y)}{\sqrt{var(X)var(Y)}} = cor(X, Y)$$

$\hookrightarrow$ Rückschluss von Daten auf Grundgesamtheit ist (bei „ausreichend großen“ Stichproben) prinzipiell möglich (z.B. Korrelationstests).