

2. Zufallsvektoren

- Zufallsvektoren allgemein
- Diskreter Fall
- Multivariate Verteilungsfunktion
- Stetige Zufallsvektoren
- Unabhängigkeit von Zufallsvariablen
- Korrelationskoeffizienten

2 Wahrscheinlichkeitsrechnung - Zufallsvektoren

↔ bisher: Verteilungen einzelner Zufallsvariablen

↔ jetzt: **Ergebnis eines Zufallsexperimentes sind mehrere Zufallsvariablen**

Die Wirtschaftslage am Ende einer Periode wird als Zufallsvorgang betrachtet. Verschiedene statistische Variablen spiegeln die wirtschaftliche Situation wider.

X : Bruttoinlandsprodukt, Y : Inflationsrate, Z : Arbeitslosenquote

↔ von Interesse sind neben den einzelnen Verteilungen der Zufallsvariablen insbesondere auch die Zusammenhänge

↔ Bei geeigneter Modellierung liegt allen Zufallsvariablen dieselbe Grundgesamtheit Ω und dasselbe WS-Modell P zugrunde.

↔ Liegt $\omega \in \Omega$ vor, können die Werte der Zufallsvariablen direkt berechnet werden.

↔ Zusammenfassung der einzelnen Zufallsvariablen zu einem **Zufallsvektor**

Memo DuW: Zufallsvariablen

- ↪ Die von einer statistischen Variablen X erfassten Objektdaten $x = X(\omega)$ sind zufällige Werte. X wird daher auch als Zufallsvariable (ZV) bezeichnet.
- ↪ Für die Grundgesamtheit Ω liegt ein WS-Modell P vor, das sich auf die mit X erfassten Objektdaten überträgt. Sprechweise: **(induzierte) Verteilung** von X (Symbol $\mathcal{L}(X)$). Üblich sind folgende Schreibweisen:

Kurzform	ausführlich	Erläuterung
$P(X \in A)$	$P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A\})$	durch X induzierte WS von A
$P(X = x)$	$P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x\})$	Punkt-Wahrscheinlichkeit
$P(X \in [a; b])$	$P(\{\omega \in \Omega : a \leq X(\omega) \leq b\})$	Intervallwahrscheinlichkeit
$P(X \leq x)$	$P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\})$	Verteilungsfunktion (VF) $F_X(x)$ (in x)
$F_X^{-1}(t)$	$\inf\{x \in \mathbb{R} : F_X(x) \geq t\}$	Quantilfunktion (oft Umkehrfunktion von F_X)

- ↪ Oft wird explizites WS-Modell nicht für Grundgesamtheit, sondern nur für die von X angegebenen (meist reellen) Werte formuliert.
- diskrete ZV mit Dichte $f_X(x_i) = P(X = x_i)$ und $\sum_{i \in \mathbb{N}} P(X = x_i) = 1$
 - stetige ZV mit Dichte $f_X(x) = F'_X(x)$ mit VF F_X und $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) = 1$
- ↪ Bestimmung von Wahrscheinlichkeiten $P(X \in A)$ im Spezialfall:
- diskret: $P(X \in A) = \sum_{x_i \in A: f_X(x_i) > 0} P(X = x_i)$
 - stetig: $P(X \in]a; b]) = \int_a^b f_X(x) dx$ und $P(X = b) = 0$, $-\infty \leq a < b$

Definition (Zufallsvektor, multivariate Zufallsvariable, MZV)

Gegeben Zufallsvariablen $X_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$ auf einem WS-Raum (Ω, P) :

- ↪ Der Vektor $X = (X_1, \dots, X_n)$ heißt dann **Zufallsvektor**.
- ↪ X_1, \dots, X_n heißen **Komponenten** des Zufallsvektors.
- ↪ X ist eine (multivariate) Zufallsvariable (MZV) mit Werten in \mathbb{R}^n und besitzt eine Verteilung .
 $\mathcal{L}(X)$ wird als **gemeinsame** Verteilung der X_1, \dots, X_n bezeichnet.
- ↪ Unter einer k -variaten (bzw. k -dimensionalen) **Randverteilung** versteht man die gemeinsame Verteilung der ZV X_{i_1}, \dots, X_{i_k} für eine gegebene Wahl von Indizes $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$.
 Spezialfall ($k = 1$): univariate Randverteilungen $\mathcal{L}(X_i)$.

$\mathcal{L}(X)$ ist i.a. kompliziert und nur im Spezialfall diskreter oder stetiger Zufallsvektoren einfach zu beschreiben (s.u. Spezialfälle).

Beispiele

↪ Werfen von zwei W4-Würfeln:

$$\begin{aligned}\Omega &= \{(1, 1), (1, 2), \dots, (1, 4), (2, 1), \dots, (2, 4), \dots, (4, 4)\} \\ P(\{(\omega_1, \omega_2)\}) &= 1/16 \\ X(\omega) &= X((\omega_1, \omega_2)) := |\omega_1 - \omega_2| \quad \text{abs. Differenz der Würfelaugen} \\ Y(\omega) &= Y((\omega_1, \omega_2)) := \omega_1 + \omega_2 \quad \text{Augensumme}\end{aligned}$$

(X, Y) ist ein Zufallsvektor.

↪ Körpergröße und Gewicht:

$$\begin{aligned}\Omega &= \{\omega = (\omega_K, \omega_G) \mid \omega_K, \omega_G > 0\} \\ X((\omega_K, \omega_G)) &:= \omega_G \\ Y((\omega_K, \omega_G)) &:= \omega_K\end{aligned}$$

(X, Y) ist ein Zufallsvektor. Das zugehörige P ist hier unspezifiziert.

3.) (endliche) Bernoulli-Kette:

N unabhängige Wiederholungen desselben Bernoulli-Experiments.

$$\begin{aligned}\Omega &= \{\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N) \mid \omega_n = \text{Erfolg oder } \omega_n = \text{Mißerfolg}\} \\ \text{Sei } X_n(\omega_1, \dots, \omega_n) &:= \begin{cases} 1 & \omega_n = \text{Erfolg} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad i = 1, \dots, N\end{aligned}$$

$X := (X_1, X_2, \dots, X_N)$ ist ein Zufallsvektor.

Versuchswiederholungen als Zufallsvektor:

- ↪ Konstruiere einen N -dimensionalen Stichprobenraum
- ↪ definiere identische Zufallsvariablen auf den einzelnen Komponenten ω_i des Stichprobenraums
- ↪ fasse diese Zufallsvariablen zu einem Vektor zusammen

X_n ist Bernoulli-verteilte Zufallsvariable auf Ω . Das einzelne Bernoulli-Experiment ist definiert auf der Grundgesamtheit $\Omega_1 := \{\omega \mid \omega = \text{Erfolg oder } \omega = \text{Mißerfolg}\}$. Die Bernoulli-Kette ist definiert auf der Grundgesamtheit $\Omega = \Omega_1 \times \dots \times \Omega_n$.

Diskreter Fall – Gemeinsame Dichtefunktion

- ↪ Ein Zufallsvektor $X = (X_1, \dots, X_N)$ heißt **diskret**, wenn er höchstens Werte in einer abzählbaren Menge \mathcal{M} isolierter Vektoren (x_1, \dots, x_N) annimmt. Die möglichen Werte werden **Realisationen** genannt.
- ↪ Ist ein MZV diskret, ist auch die zugehörige gemeinsame Verteilung diskret.
- ↪ Für einen MZV (X_1, \dots, X_N) ist die **gemeinsame diskrete Dichtefunktion** definiert als

$$f_{X_1, \dots, X_N}(x_1, \dots, x_N) = \begin{cases} P(X_1 = x_1, \dots, X_N = x_N) & \text{für } (x_1, \dots, x_N) \in \mathcal{M} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Es gilt (bzw. muss gelten, damit eine diskrete Dichte vorliegt):

$$\square f_{X_1, X_2, \dots, X_N}(x_1, \dots, x_N) \geq 0 \quad \square \sum_{(x_1, \dots, x_N) \in \mathcal{M}} f_{X_1, \dots, X_N}(x_1, \dots, x_N) = 1$$

Die diskrete Dichte wird (für $N = 2$) meist tabellarisch dargestellt (analog zur Kontingenztafel der deskriptiven Statistik)

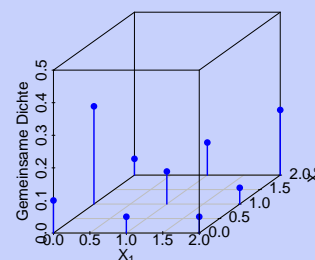
Wartung einer Maschine:

X_1 : Anzahl Defekte vom Typ I im Wartungszeitraum

X_2 : Anzahl Defekte vom Typ II im Wartungszeitraum

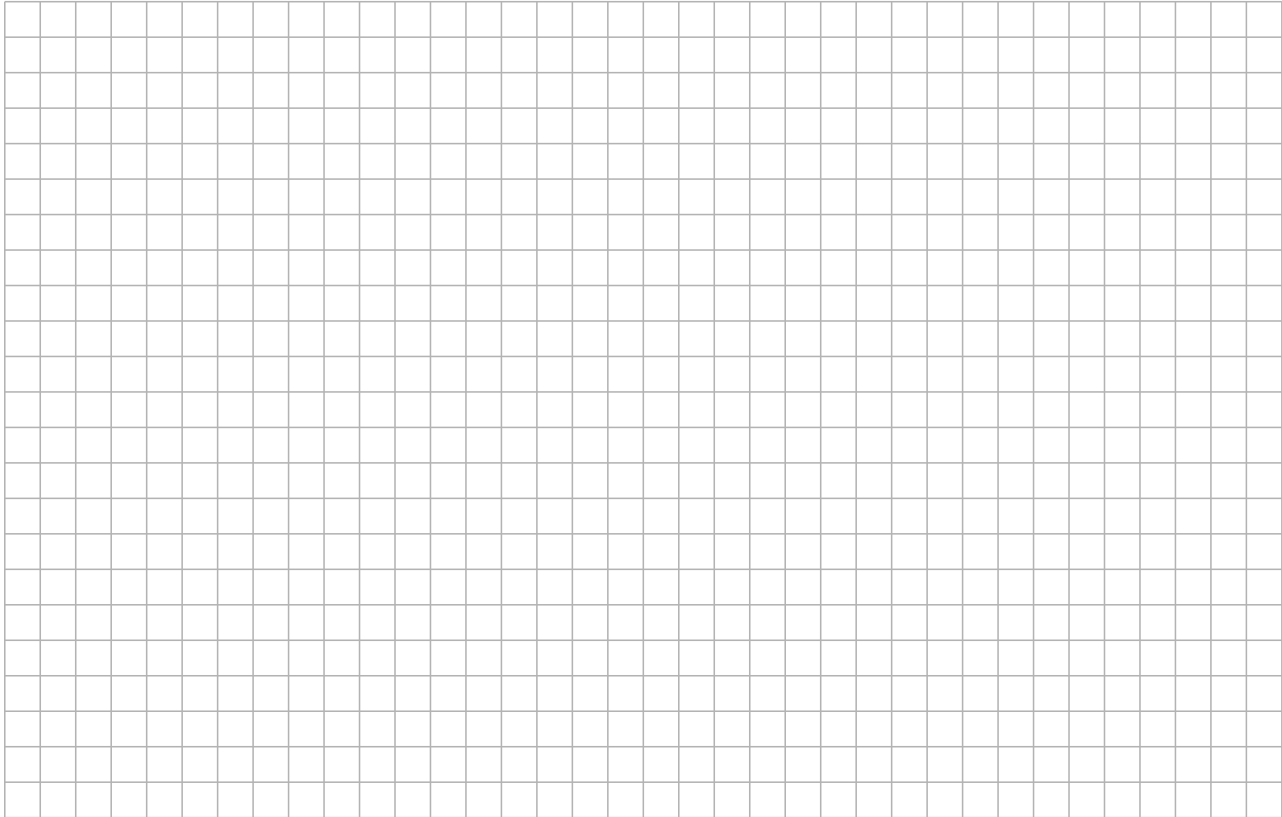
Gemeinsame Wahrscheinlichkeiten (z.B. $P(X_1 = 0, X_2 = 0) = 0.1$):

		Defekt II		
		0	1	2
Defekt I	0	0.1	0.3	0.05
	1	0.05	0.1	0.1
	2	0.05	0.05	0.2



Übung: Zweifacher W4-Würfelwurf mit den Würfeln X_1, X_2 .

Bestimmen Sie die Verteilung des Zufallsvektors $(X, Y) = (|X_1 - X_2|, X_1 + X_2)$



Wie ist die Wahrscheinlichkeit, dass X einen bestimmten Wert annimmt, unabhängig von den Realisierungen der anderen Komponenten des Zufallsvektors?

Sind X und Y diskrete Zufallsvektoren mit gemeinsamer diskreter Dichte $f_{X,Y}$, dann werden die Dichtefunktionen

$$f_X(x_k) := \sum_i f_{X,Y}(x_k, y_i) \quad \text{und} \quad f_Y(y_k) := \sum_i f_{X,Y}(x_i, y_k)$$

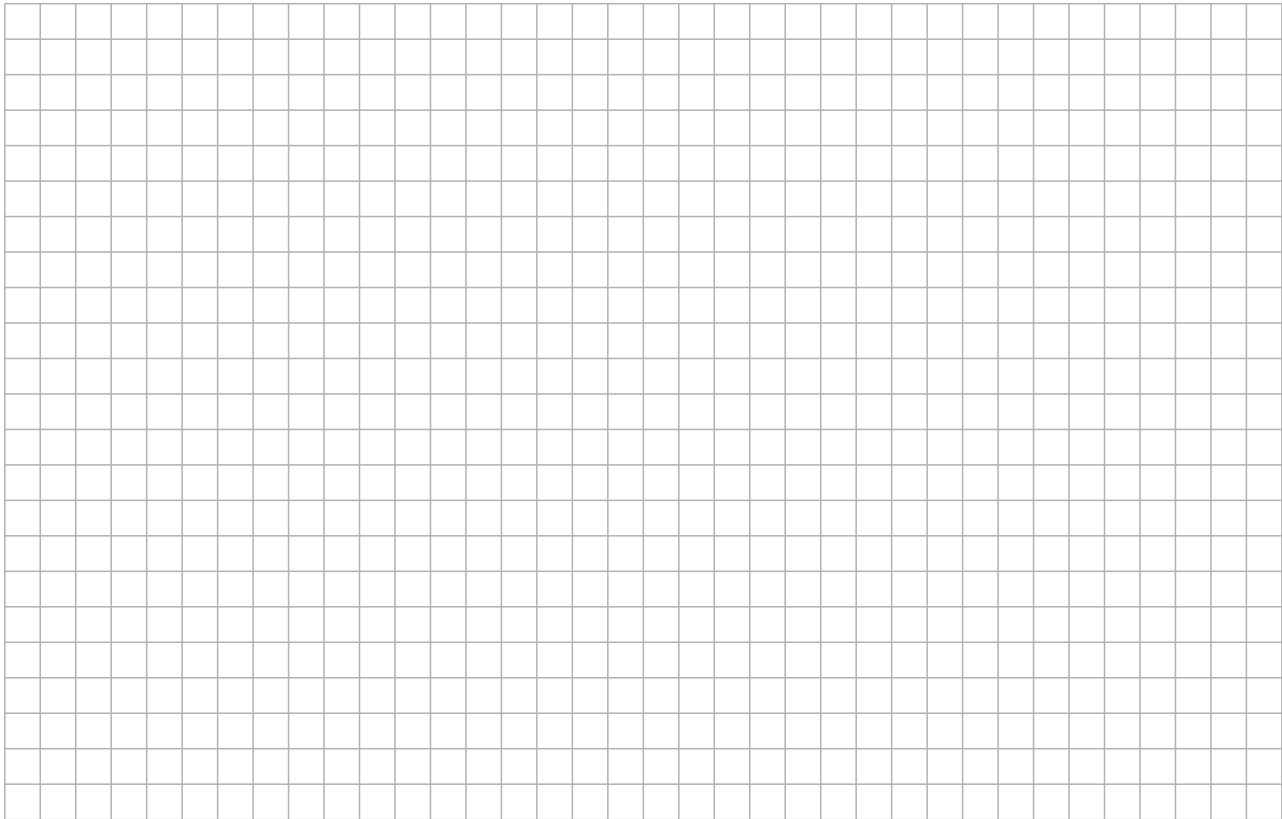
diskrete Randdichtefunktionen von X und Y genannt.

Wartung einer Maschine:

Die Randdichten errechnen sich durch Bildung der Zeilen-/Spaltensummen.

		Defekt II			
		0	1	2	f_{X_1}
Defekt I	X_1/X_2				
	0	0.1	0.3	0.05	0.45
	1	0.05	0.1	0.1	0.25
2	0.05	0.05	0.2	0.3	
	f_{X_2}	0.2	0.45	0.35	1

Übung: Berechnen Sie in der Situation des zweifachen W4-Würfelwurfes (s.o.) die Randverteilungen von $(X, Y) = (|X_1 - X_2|, X_1 + X_2)$



- ↔ die diskreten Randdichten lassen sich aus der gemeinsamen Dichte errechnen
 ↔ die Umkehrung gilt i.a. nicht.

Wartung einer Maschine

		Defekt II			f_{X_1}
		0	1	2	
Defekt I	0	0.1 + ε	0.3 - ε	0.05	0.45
	1	0.05 - ε	0.1 + ε	0.1	0.25
	2	0.05	0.05	0.2	0.3
f_{X_2}		0.2	0.45	0.35	1

Für jedes $0 \leq \varepsilon \leq 0.05$ definiert die Tabelle gemeinsame Dichten mit unterschiedlichen gemeinsamen Verteilungen, aber identischen Randdichten.

Multinomial-Experiment und Multinomialverteilung

- ↪ Verallgemeinerung des Bernoulli-Experimentes. Statt zwei jetzt $K + 1$ verschiedene Ausgänge eines Einzel-Experimentes
 - Ausgänge mit WS $p_1, \dots, p_{K+1} \geq 0, p_1 + \dots + p_{K+1} = 1$
 - Ausgänge verschiedener Einzelexperimente als st.u. angenommen
 z.B. Qualitätssicherung: Statt defekt/intakt jetzt Qualitätsstufen.
- ↪ Experiment wird n -mal wiederholt. X_1, \dots, X_{K+1} zählen, wie oft Ausgang $1, \dots, K + 1$ eintritt.
- ↪ Die Verteilung des Zufallsvektors (X_1, \dots, X_K) heißt **Multinomialverteilung** mit Parametern n, p_1, \dots, p_K .
Beachte: p_{K+1}, X_{K+1} werden hierbei nicht mitgeführt.

- ↪ gemeinsame Dichte für $(x_1, \dots, x_K) \in \mathbb{N}_0^K$

$$f(x_1, \dots, x_K) = \begin{cases} \frac{n!}{x_1! \cdots x_K! x_{K+1}!} p_1^{x_1} \cdots p_K^{x_K} p_{K+1}^{x_{K+1}} & \text{für } x_1 + \dots + x_K \leq n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(mit $p_{K+1} = 1 - p_1 - \dots - p_K, X_{K+1} = n - X_1 - \dots - X_K$)

Dazu kombinatorisches Argument:

- Partitioniere die Menge $\{1, \dots, n\}$ der Versuche in $K + 1$ Mengen der Mächtigkeiten x_1, \dots, x_{K+1} .
Es gibt $\frac{n!}{x_1! \cdots x_{K+1}!}$ Möglichkeiten (Multinomialkoeffizient, vgl. DuW)
- Jede Partition legt ein n -Tupel von Versuchsausgängen fest (x_1 -mal Ausgang $1, \dots, x_{K+1}$ -mal Ausgang $K + 1$.
Weil die Experimente unabhängig und gleichartig sind, trägt jeder derartige Ausgang dieselbe WS $p_1^{x_1} \cdots p_{K+1}^{x_{K+1}}$.

Beispiel: Schokohasen

Ein **Beutel** enthält 12 Schokohasen, davon fünf aus Vollmilch-, vier aus Zartbitter- und drei aus weißer Schokolade.

- ↪ Nach und nach werden Schokohasen gezogen, der Typ notiert und wieder zurückgelegt.
- ↪ Wie ist die Wahrscheinlichkeit, dass von sechs gezogenen Schokohasen 3 aus Vollmilch-, 2 aus Zartbitter- und 1 aus weißer Schokolade sind?
- ↪ Multinomialverteilung mit $n = 6, p_1 = \frac{5}{12}, p_2 = \frac{4}{12} \Rightarrow p_3 = 1 - \frac{9}{12} = \frac{3}{12}$

$$f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = \frac{6!}{3!2!1!} \left(\frac{5}{12}\right)^3 \left(\frac{4}{12}\right)^2 \left(\frac{3}{12}\right)^1 = \frac{625}{5184} \approx 0.12$$

- ↪ Werden nur die Kategorien „Vollmilch“ und „Nicht-Vollmilch“ unterschieden, so wird die Multinomialverteilung zur Binomialverteilung:

$$p = \frac{5}{12}, B(k|p, n) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \binom{6}{3} \left(\frac{5}{12}\right)^3 \left(\frac{7}{12}\right)^3 = 0.28$$

Übung: Auf einem siebentägigen Skiseminar des Instituts wird täglich eine/r der 15 Teilnehmenden (2 Professoren, 5 Mitarbeiter, 8 Studierende) ausgelost, um den Getränkevorrat zu verwalten (mehrmalige Auslosung möglich).

- ↪ Mit welcher WS werden 1 Mitarbeiter und 6 Studierende ausgelost?
- ↪ Mit welcher WS werden nur Mitarbeiter und Studierende ausgelost?

Gemeinsame Verteilungsfunktion

Die **gemeinsame (kumulative) Verteilungsfunktion** F_X eines Zufallsvektors $X := (X_1, X_2, \dots, X_N)$ von Zufallsvariablen $X_n, n = 1, \dots, N$, ist definiert als

$$F_{X_1, X_2, \dots, X_N}(x_1, x_2, \dots, x_N) := P(\{\omega | X_1(\omega) \leq x_1, X_2(\omega) \leq x_2, \dots, X_N(\omega) \leq x_N\})$$

$$\forall x_n \in \mathbb{R}, n = 1, \dots, N$$

↪ da die einzelnen Komponenten die Messbarkeitseigenschaft besitzen, gilt dies auch für den zugehörigen Zufallsvektor, denn

$$\begin{aligned} & \{\omega | X_1(\omega) \leq x_1, X_2(\omega) \leq x_2, \dots, X_N(\omega) \leq x_N\} \\ &= \{\omega | X_1(\omega) \leq x_1\} \cap \{\omega | X_2(\omega) \leq x_2\} \cap \dots \cap \{\omega | X_N(\omega) \leq x_N\} \in \mathcal{A} \end{aligned}$$

↪ dies ist insbesondere gültig, weil sämtliche Zufallsvariablen von demselben $\omega \in \Omega$ abhängen

Diskreter bivariater Fall:

$$F_{X,Y}(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y) = \sum_{x_i \leq x} \sum_{y_j \leq y} f_{X,Y}(x_i, y_j)$$

Wartung einer Maschine

X : Anzahl Defekte vom Typ I im Wartungszeitraum

Y : Anzahl Defekte vom Typ II im Wartungszeitraum

Die Einträge der Verteilungsfunktion (links) ergeben sich durch Addition des Eintrags der Dichtefunktion summiert zu den Zellwerten, die links und oberhalb liegen:

$f_{X,Y}(x,y)$

		Defekt II		
		0	1	2
Defekt I	0	0.1	0.3	0.05
	1	0.05	0.1	0.1
	2	0.05	0.05	0.2

$F_{X,Y}(x,y)$

		Defekt II		
		0	1	2
Defekt I	0	0.1	0.4	0.45
	1	0.15	0.55	0.7
	2	0.2	0.65	1

Diskreter bivariater Fall:

$$F_{X,Y}(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y) = \sum_{x_i \leq x} \sum_{y_j \leq y} f_{X,Y}(x_i, y_j)$$

Wartung einer Maschine

X : Anzahl Defekte vom Typ I im Wartungszeitraum

Y : Anzahl Defekte vom Typ II im Wartungszeitraum

Die Einträge der Verteilungsfunktion (links) ergeben sich durch Addition des Eintrags der Dichtefunktion summiert zu den Zellwerten, die links und oberhalb liegen:

$f_{X,Y}(x, y)$

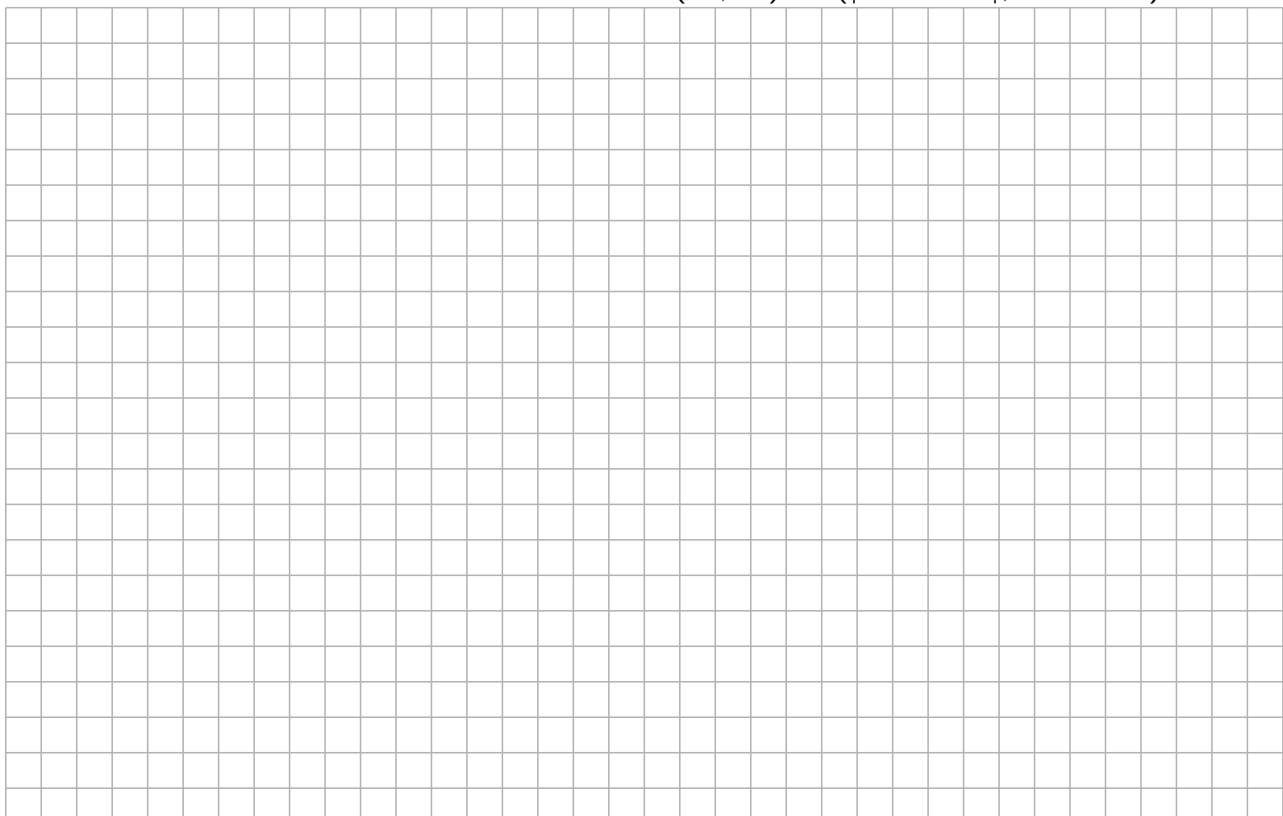
$F_{X,Y}(x, y)$

		Defekt II		
		0	1	2
Defekt I	0	0.1	0.3	0.05
	1	0.05	0.1	0.1
	2	0.05	0.05	0.2

		Defekt II		
		0	1	2
Defekt I	0	0.1	0.4	0.45
	1	0.15	0.55	0.7
	2	0.2	0.65	1

Übung: Zweifacher W4-Würfelwurf mit den Würfeln X_1, X_2 .

Bestimmen Sie die VF des Zufallsvektors $(X, Y) = (|X_1 - X_2|, X_1 + X_2)$



Eigenschaften der gemeinsamen Verteilungsfunktion $F = F_{X,Y}$ (Bivariater Fall)

i) $F(-\infty, y) := \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x, y) = 0 = \lim_{y \rightarrow -\infty} F(x, y) =: F(x, -\infty)$ und

$$F(\infty, \infty) := \lim_{x \rightarrow \infty, y \rightarrow \infty} F(x, y) = 1$$

ii) Seien $x_1 < x_2$ und $y_1 < y_2$. Dann gilt:

$$P(x_1 < X \leq x_2, y_1 < Y \leq y_2) = F(x_2, y_2) - F(x_2, y_1) - F(x_1, y_2) + F(x_1, y_1)$$

iii) F ist rechtsstetig in jedem Argument, d.h.

$$\lim_{h \downarrow 0} F_{X,Y}(x+h, y) = \lim_{h \downarrow 0} F_{X,Y}(x, y+h) = F_{X,Y}(x, y)$$

Korrespondenzsatz

Jede Funktion $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, 1]$ mit den Eigenschaften i) und iii) und der Eigenschaft

$$F(x_2, y_2) - F(x_2, y_1) - F(x_1, y_2) + F(x_1, y_1) \geq 0 \quad \forall x_1 < x_2, y_1 < y_2 \quad (*)$$

legt auf eindeutige Art und Weise eine bivariate Verteilung auf \mathbb{R}^2 fest.

(mit Verallgemeinerung von (*) auf multivariate Verteilungen übertragbar)

Wartung einer Maschine

$F_{X,Y}(x, y)$	Defekt II			$f_{X,Y}(x, y)$	Defekt II		
	0	1	2		0	1	2
0	0.1	0.4	0.45	0	0.1	0.3	0.05
1	0.15	0.55	0.7	1	0.05	0.1	0.1
2	0.2	0.65	1	2	0.05	0.05	0.2

$$f_{X,Y}(1, 2) = P(0 < X \leq 1, 1 < Y \leq 2) = 0.7 - 0.55 - 0.45 + 0.4 = 0.1$$

Die diskrete Dichte (und damit die bivariate Verteilung von X, Y) lässt sich aus $F_{X,Y}$ also „rekonstruieren“.

↔ $F_X(x) := F_{X,Y}(x, \infty)$ und $F_Y(y) := F_{X,Y}(\infty, y)$ werden
Randverteilungsfunktionen von X und Y genannt

$F_{X,Y}(x, y)$		Defekt II			Randverteilungsfunktion von X
		0	1	2	
Defekt I	0	0.1	0.4	0.45	Randverteilungsfunktion von Y
	1	0.15	0.55	0.7	
	2	0.2	0.65	1 ; 1	

(bei endlich-diskreten Verteilungen als untere Zeile/rechte Spalte der Tabelle zu $F_{X,Y}$ ablesbar)

Stetige Zufallsvektoren

Ein Zufallsvektor (X_1, \dots, X_N) heißt **N-dimensionaler stetiger Zufallsvektor**, wenn mit einer geeigneten Funktion $f_{X_1, \dots, X_N} \geq 0$ für die multivariate VF gilt:

$$F_{X_1, \dots, X_N}(x_1, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_N} \cdots \int_{-\infty}^{x_1} f_{X_1, \dots, X_N}(u_1, \dots, u_N) du_1 \dots du_N$$

Die Funktion f_{X_1, \dots, X_N} heißt **gemeinsame Dichtefunktion** der Zufallsvariablen X_1, \dots, X_N . Die zu einem stetigen Zufallsvektor gehörende gemeinsame Verteilungsfunktion heißt **absolut stetig**.

Sei (X, Y) ein 2-dimensionaler stetiger Zufallsvektor. Dann läßt sich die gemeinsame Dichtefunktion $f_{X,Y}$ aus der gemeinsamen Verteilungsfunktion berechnen:

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{\partial^2 F_{X,Y}(x, y)}{\partial x \partial y}$$

Randdichten

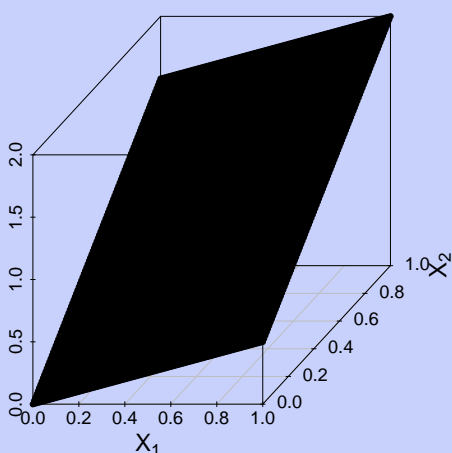
Wenn (X, Y) ein 2-dimensionaler stetiger Zufallsvektor ist, dann werden die Dichtefunktionen

$$f_X(x) := \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y) dy \quad \text{und} \quad f_Y(y) := \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y) dx$$

stetige Randdichtefunktionen von X bzw. Y genannt.

Beispiel stetige gemeinsame Dichtefunktion

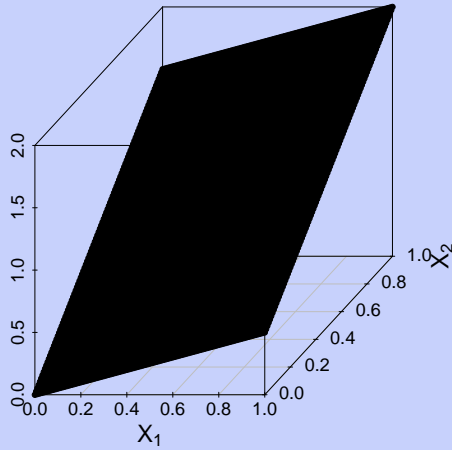
$$f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{1}{2}x_1 + \frac{3}{2}x_2 & 0 \leq x_1, x_2 \leq 1, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$



$$\begin{aligned} & \int_0^1 \int_0^1 f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^1 \left(\frac{1}{2}x_1 + \frac{3}{2}x_2 \right) dx_1 \right) dx_2 \\ &= \int_0^1 \left(\frac{1}{2} \cdot \left[\frac{x_1^2}{2} \right]_0^1 + \frac{3}{2}x_2 \cdot \left[x_1 \right]_0^1 \right) dx_2 \\ &= \int_0^1 \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{2}x_2 \right) dx_2 \\ &= \frac{1}{4} \cdot \left[x_2 \right]_0^1 + \frac{3}{2} \cdot \left[\frac{x_2^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1 \end{aligned}$$

$f_{X_1, X_2}(x_1, x_2)$ ist eine Dichte:

$$f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{1}{2}x_1 + \frac{3}{2}x_2 & 0 \leq x_1, x_2 \leq 1, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

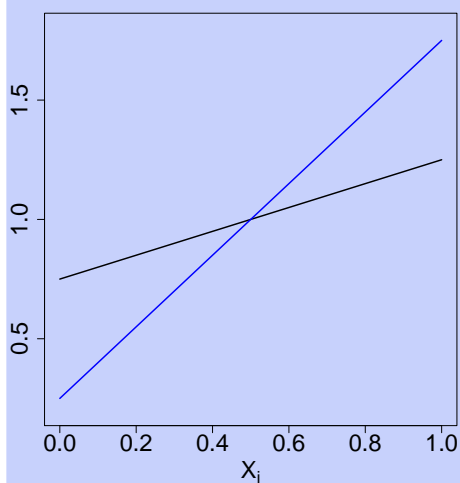


Randdichten:

$$\begin{aligned} f_{X_1}(x_1) &= \int_0^1 \left(\frac{1}{2}x_1 + \frac{3}{2}x_2 \right) dx_2 \\ &= \frac{1}{2}x_1 + \frac{3}{2} \left[\frac{x_2^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2}x_1 + \frac{3}{4} \end{aligned}$$

$$f_{X_2}(x_2) = \int_0^1 \left(\frac{1}{2}x_1 + \frac{3}{2}x_2 \right) dx_1 = \frac{3}{2}x_2 + \frac{1}{4}$$

$$f_{X_1, X_2} = \begin{cases} \frac{1}{2}x_1 + \frac{3}{2}x_2 & 0 \leq x_1, x_2 \leq 1, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$



Randdichten:

$$\begin{aligned} f_{X_1}(x_1) &= \int_0^1 \left(\frac{1}{2}x_1 + \frac{3}{2}x_2 \right) dx_2 \\ &= \frac{1}{2}x_1 + \frac{3}{2} \left[\frac{x_2^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2}x_1 + \frac{3}{4} \end{aligned}$$

$$f_{X_2}(x_2) = \int_0^1 \left(\frac{1}{2}x_1 + \frac{3}{2}x_2 \right) dx_1 = \frac{3}{2}x_2 + \frac{1}{4}$$

↔ jede Randdichte lässt sich aus der gemeinsamen Dichte bestimmen, umgekehrt gilt das nicht:

Beispiel (Übung)

$$f_{X,Y}(x,y,\alpha) := f_X(x)f_Y(y)[1 + \alpha \cdot (2F_X(x) - 1)(2F_Y(y) - 1)] \quad \forall -1 \leq \alpha \leq 1$$

mit Randdichten f_X, f_Y und Randverteilungen F_X, F_Y . Dann gilt:

- (i) $f_{X,Y}$ ist eine bivariate stetige WS-Dichte für jedes α
- (ii) f_X und f_Y sind Randdichten von $f_{X,Y}$ für jedes α .

Unabhängigkeit von Zufallsvariablen

Zufallsvariablen X_1, \dots, X_N heißen **(stochastisch) unabhängig** (st.u.), wenn für alle Ereignisse A_1, \dots, A_N gilt:

$$P(X_1 \in A_1, \dots, X_N \in A_N) = P(X_1 \in A_1) \times \dots \times P(X_N \in A_N)$$

Für diskrete und stetige Zufallsvariablen mit der gemeinsamen Verteilungsfunktion F_{X_1, \dots, X_N} und gemeinsamer Dichtefunktion f_{X_1, \dots, X_N} lauten gleichwertige Kriterien für st.U.:

- (i) $F_{X_1, \dots, X_N}(x_1, x_2, \dots, x_N) = \prod_{i=1}^N F_{X_i}(x_i) \quad \forall x_1, \dots, x_N$
- (ii) $f_{X_1, \dots, X_N}(x_1, x_2, \dots, x_N) = \prod_{i=1}^N f_{X_i}(x_i) \quad \forall x_1, \dots, x_N$

u.i.v.-Folgen

Eine Folge $X_1, X_2, \dots, X_N, \dots$ von Zufallsvariablen heißt **u.i.v.-Folge**, wenn sie alle dieselbe Verteilung haben und je endlich viele stochastisch unabhängig sind.

Beispiel

$$f_{X,Y}(x,y) := e^{-(x+y)} \quad \text{für } x, y > 0$$

Für die Randdichten gilt:

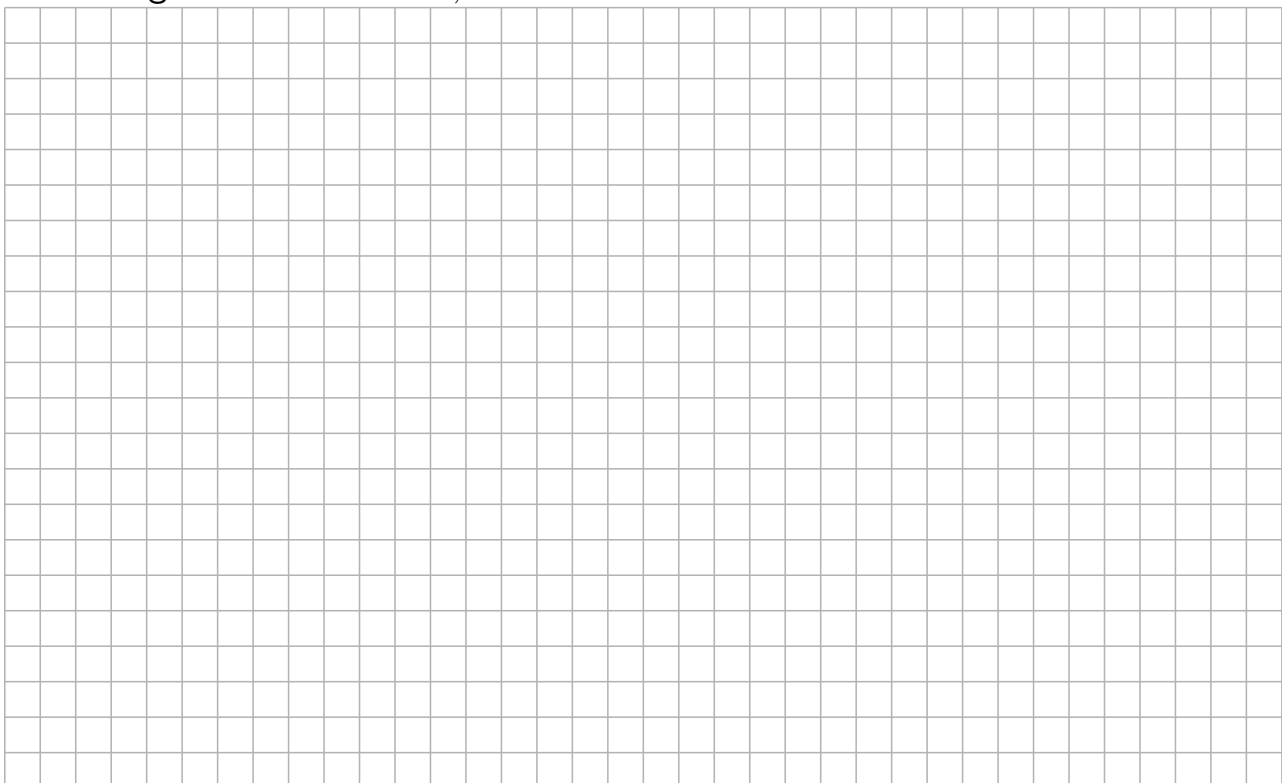
$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y) dy = \int_0^{\infty} e^{-(x+y)} dy \\ &= e^{-x} \int_0^{\infty} e^{-y} dy = e^{-x} \cdot [-e^{-y}]_0^{\infty} = e^{-x} [0 - (-1)] = e^{-x} \end{aligned}$$

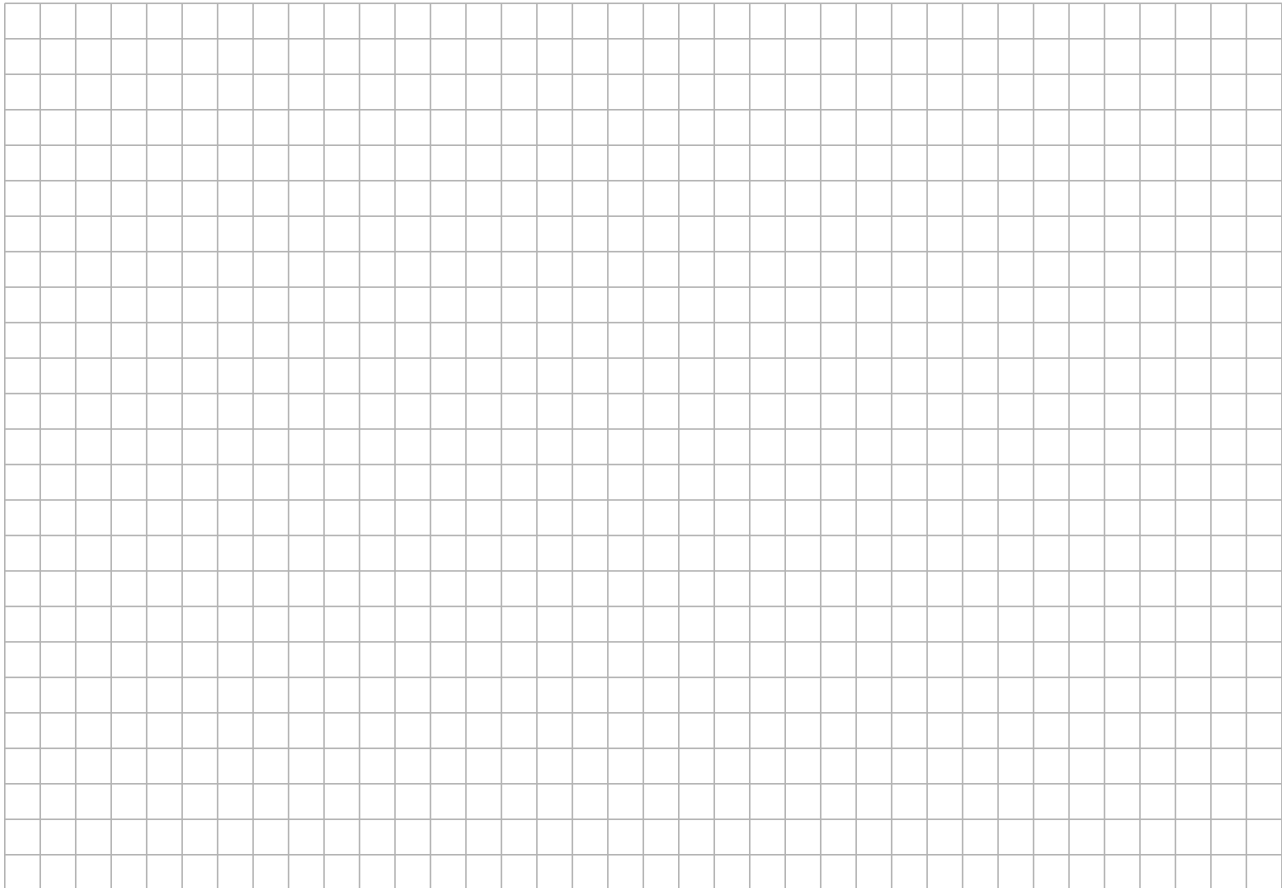
$$f_Y(y) = e^{-y} \quad \text{analog}$$

$$\Rightarrow f_{X,Y}(x,y) = e^{-(x+y)} = e^{-x} e^{-y} = f_X(x) f_Y(y)$$

\Rightarrow X und Y sind stochastisch unabhängig

Übung: Prüfen Sie, dass $f(x,y) = f_{X,Y}(x,y) = \frac{12}{7}x(x+y)$ auf $[0;1] \times [0;1]$ eine WS-Dichte ist und berechnen Sie die Randverteilungen sowie die gemeinsame Verteilungsfunktion. Sind X, Y st.u.?





Zusammenhang zwischen st.u. Ereignissen und st.u. Zufallsvariablen:

Memo DuW: Stochastische Unabhängigkeit von Ereignissen

- ↔ Zwei Ereignisse A, B heißen st.u., wenn $P(A \cap B) = P(A)P(B)$
- ↔ Ereignisse A_1, \dots, A_n heißen st.u., wenn für jede beliebige Auswahl von $k \leq n$ Ereignissen A_{i_1}, \dots, A_{i_k} gilt $P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \times \dots \times P(A_{i_k})$

Memo DuW: Indikatorfunktion eines Ereignisses A

$$\mathbb{1}_A(\omega) := \begin{cases} 1 & \text{falls } \omega \in A \\ 0 & \text{falls } \omega \notin A \end{cases}$$

Sie ist eine Zufallsvariable mit Bernoulli-Verteilung $\mathcal{B}(1, p)$, $p = P(A)$.

St.U. von Ereignissen vs. st.U. von Zufallsvariablen

Ereignisse A_1, \dots, A_n sind st.u. genau dann, wenn die ZV $\mathbb{1}_{A_1}, \dots, \mathbb{1}_{A_n}$ st.u. sind.

Memo DuW: Momente einer Zufallsvariable

↪ Für eine (messbare) Funktion $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und eine Zufallsvariable X ist

$$E(g(X)) = \begin{cases} \sum_k g(x_k) \cdot f_X(x_k) & \text{diskreter Fall} \\ \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot f_X(x) dx & \text{stetiger Fall} \end{cases}$$

↪ Spezialfälle:

- Erwartungswert $E(X)$ (mit $g(x) = x$)
- Varianz $\text{var}(X) = E(X - E(X))^2 = E(X^2) - (E(X))^2$

↪ Regeln für ZV X, Y (sofern Erwartungswerte existieren) und $a, b, c \in \mathbb{R}$

- $E(\mathbb{1}_A) = P(A)$.
- $E(aX + bY + c) = aE(X) + bE(Y) + c$
- $\text{var}(aX + b) = a^2 \text{var}(X)$ für
- X, Y st.u. $\Rightarrow E(XY) = E(X)E(Y)$
- X, Y , st.u. $\Rightarrow \text{var}(X + Y) = \text{var}(X) + \text{var}(Y)$

↪ SGGZ:

Für u.i.v. X_1, X_2, \dots mit ex. Erwartungswert gilt $\bar{X}_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} E(X_1)$ mit WS 1.

Korrelationskoeffizienten

Welche Kennzahlen beschreiben den Grad des (linearen) Zusammenhangs zwischen Zufallsvariablen X, Y ?

Seien X, Y Zufallsvariablen mit Dichtefunktion $f_{X,Y}$ und existierenden Varianzen.

Kovarianz: $\text{cov}(X, Y) := E((X - EX)(Y - EY)) = E(XY) - E(X)E(Y)$

Dabei: $E(XY) = \sum_{k,i} x_k \cdot y_i \cdot f_{X,Y}(x_k, y_i)$ (diskreter Fall)

$E(XY) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot y \cdot f_{X,Y}(x, y) dx dy$ (stetiger Fall)

Pearson-Korrelation: $\text{cor}(X, Y) := \text{cov}(X, Y) / \sqrt{\text{var}(X)\text{var}(Y)}$

↪ Mit $\rho = \text{cor}(X, Y)$ gilt $-1 \leq \rho \leq 1$ und

$|\rho| = 1 \Leftrightarrow \exists a, b, c \in \mathbb{R}$, mit $ab\rho < 0$ und $aX + bY = c$ fast sicher

↪ X, Y stochastisch unabhängig $\Rightarrow \text{cov}(X, Y) = \text{cor}(X, Y) = 0$

(Umkehrung falsch).

Beispiel: Wartung einer Maschine

		Defekt II			f_{X_1}
		0	1	2	
Defekt I	0	0.1	0.3	0.05	0.45
	1	0.05	0.1	0.1	0.25
	2	0.05	0.05	0.2	0.3
f_{X_2}		0.2	0.45	0.35	1

$$E(X_1 X_2) = 0 \cdot (0.1 + \dots + 0.05) + 1 \cdot (0.1) + 2 \cdot (0.05 + 0.1) + 4 \cdot (0.2) = 1.2$$

$$E(X_1) = 0 \cdot 0.45 + 1 \cdot 0.25 + 2 \cdot 0.3 = 0.85$$

$$E(X_1^2) = 0 \cdot 0.45 + 1 \cdot 0.25 + 2^2 \cdot 0.3 = 1.45, \quad \text{var}(X_1) = 1.45 - 0.85^2 = 0.7275$$

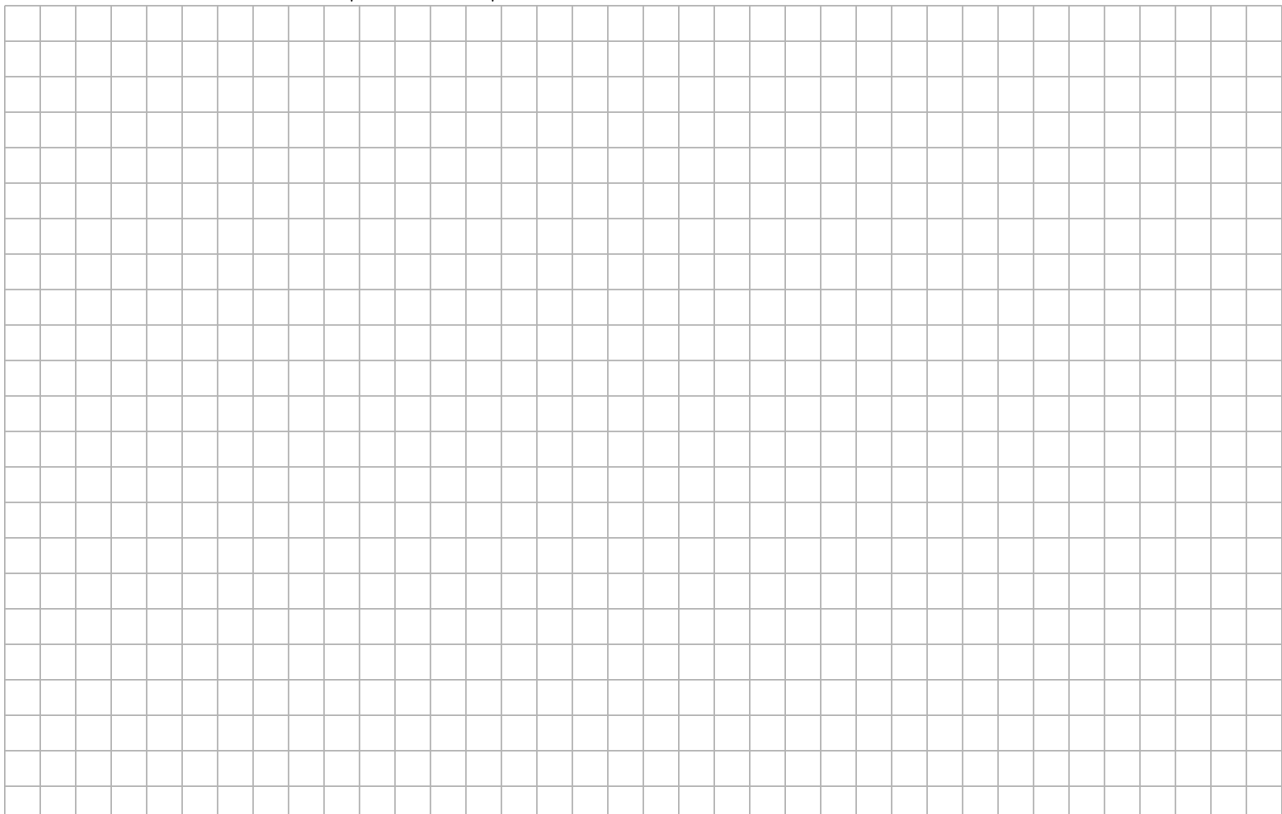
$$E(X_2) = 0 \cdot 0.2 + 1 \cdot 0.45 + 2 \cdot 0.35 = 1.15$$

$$E(X_2^2) = 0 \cdot 0.2 + 1 \cdot 0.45 + 2^2 \cdot 0.35 = 1.85, \quad \text{var}(X_2) = 1.85 - 1.15^2 = 0.5275$$

$$\text{cov}(X_1, X_2) = 1.2 - 0.85 \cdot 1.15 = 0.2225$$

$$\text{cor}(X_1, X_2) = 0.2225 / \sqrt{0.7275 \cdot 0.5275} \approx 0.359$$

Übung: Berechnen Sie in der Situation des zweifachen W4-Würfelwurfes (s.o.) die Korrelation von $X = |X_1 - X_2|$, $Y = X_1 + X_2$



Beispiel stetige gemeinsame Dichtefunktion

$$f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{1}{2}x_1 + \frac{3}{2}x_2 & 0 \leq x_1, x_2 \leq 1, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

mit Randdichten $f_{X_1}(x_1) = \frac{1}{2}x_1 + \frac{3}{4}$, $f_{X_2}(x_2) = \frac{3}{2}x_2 + \frac{1}{4}$ (auf $[0; 1]$)

$$E(X_1 X_2) = \int_0^1 \int_0^1 xy \left(\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}y \right) dx dy = \int_0^1 \frac{1}{2}x^2 dx \int_0^1 y dy + \int_0^1 x dx \int_0^1 \frac{3}{2}y^2 dy = \dots = \frac{1}{3}$$

$$E(X_1) = \int_0^1 x \left(\frac{1}{2}x + \frac{3}{4} \right) dx = \dots = \frac{13}{24}$$

$$E(X_1^2) = \int_0^1 x^2 \left(\frac{1}{2}x + \frac{3}{4} \right) dx = \dots = \frac{3}{8} \quad \text{var}(X_1) = \frac{3}{8} - \left(\frac{13}{24} \right)^2 = \frac{47}{576}$$

$$E(X_2) = \int_0^1 y \left(\frac{3}{2}y + \frac{1}{4} \right) dy = \dots = \frac{5}{8}$$

$$E(X_2^2) = \int_0^1 y^2 \left(\frac{3}{2}y + \frac{1}{4} \right) dy = \dots = \frac{11}{24} \quad \text{var}(X_2) = \frac{11}{24} - \left(\frac{5}{8} \right)^2 = \frac{13}{192}$$

$$\text{cov}(X_1, X_2) = \frac{1}{3} - \frac{13}{24} \cdot \frac{5}{8} = -\frac{1}{192}$$

$$\text{cor}(X_1, X_2) = -\frac{1}{192} / \sqrt{\frac{47}{576} \cdot \frac{13}{192}} = \dots = -\sqrt{3/611} \approx 0.07$$

Übung: Berechnen Sie $\text{cor}(X, Y)$ für $f_{X, Y}(x, y) = \frac{12}{7}x(x+y)\mathbb{1}_{[0;1]^2}(x, y)$

↪ Kovarianz und Pearson-Korrelation haben empirische Analoga (DuW)

$$\square s_{xy} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) \quad (\text{und } s_x = \sqrt{s_{xx}}, s_y = \sqrt{s_{yy}})$$

$$\square r_{xy} = \frac{s_{xy}}{s_x s_y}$$

↪ Bei u.i.v.-Folgen von MZV $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n), \dots$ gelten auch hier GGZ

↪ z.B. bei existierenden Varianzen $\text{var}(X_i), \text{var}(Y_i)$ mit WS 1:

$$s_{XY} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \text{cov}(X, Y)$$

$$r_{XY} = \frac{s_{XY}}{s_X s_Y} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{var}(X)\text{var}(Y)}} = \text{cor}(X, Y)$$

↪ Rückschluss von Daten auf Grundgesamtheit ist (bei „ausreichend großen“ Stichproben) prinzipiell möglich (z.B. Korrelationstests).

Literatur I

zum Teil angelehnt an: Vorlesung Statistik für Ökonomen, TU Dortmund,
WS 2010/2011, Dr. Hendrik Hansen