

Arbeitsberichte des Instituts für Wirtschaftsinformatik
Herausgeber: Prof. Dr. J. Becker, Prof. Dr. H. L. Grob, Prof. Dr. S. Klein,
Prof. Dr. H. Kuchen, Prof. Dr. U. Müller-Funk, Prof. Dr. G. Vossen

Arbeitsbericht Nr. 133

**Ziffernanalyse zur Betrugserkennung in
Finanzverwaltungen – Prüfung von
Kassenbelegen**

Stephan Dlugosz (ZEW Mannheim), Ulrich Müller-Funk

ISSN 1438-3985

Inhaltsverzeichnis

Tabellenverzeichnis	3
Abbildungsverzeichnis	4
Symbolverzeichnis	5
I Einleitung	6
1 Ziffernanalyse	7
1.1 Grundlagen der Ziffernanalyse	8
1.2 Aktuelle Praxis der Ziffernanalyse	10
1.3 Forschungsziel	12
2 Manuell erzeugte Zufallszahlen	14
2.1 Determinanten der menschlichen (Un-)Fähigkeit zur Generierung von Zufallszahlenfolgen	14
2.2 Eigenschaften manuell erzeugter Zufallszahlenfolgen: Typische Strukturen und Abweichungen vom Zufall	16
2.3 Potentiale für die Betrugserkennung mittels Ziffernanalyse	17
II Ziffernverteilungen	19
3 Erste Ziffern	20
3.1 Benford's-Law als Verteilung	20
3.2 Theoretische Herleitung für Benford's-Law	24
3.3 Simulationen	27
3.4 Empirische Befunde für Benford's-Law	30
3.5 Eignung der Ziffernanalyse auf Basis der ersten Ziffern für die Betrugsaufdeckung in Daten der Finanzbehörden	31
4 Letzte Ziffern	32
4.1 Gleichverteilung der letzten Ziffern von reellen Zahlen	32
4.2 Gleichverteilung der letzten Ziffer für Summen von natürlichen Zufallsvariablen	35
III Abweichungsanalyse	39
5 Chi-Quadrat Verteilungstest	40
5.1 Optimalität der Chi-Quadrat-Teststatistik	40
5.2 Bestimmung der Verteilung der Chi-Quadrat Statistik	41

6	Tests auf Unabhängigkeit der letzten Ziffern	44
6.1	Stochastische Unabhängigkeit der letzten Ziffer von Zufallsvariablen	44
6.2	Tests zur Prüfung der stochastischen Unabhängigkeit	45
IV	Empirie	48
7	Praktischer Einsatz der Ziffernprüfung bei der Finanzverwaltung	49
7.1	Datengrundlage	49
7.2	Ein kombinierter Test auf Gleichverteilung und Zufälligkeit	50
7.3	Technische Umsetzung für die Anwendung in der Außenprüfung	52
8	Erste empirische Resultate	56
8.1	Einige Einzelfälle	56
8.2	Resultate und Anwendungsempfehlungen	59
9	Fazit	62
	Literaturverzeichnis	64
	Anhang	70
A	Beweise	70
B	Weitere Ergebnisse auf Basis vorhandener Datenreihen	70
B.1	Beispielfall C	70
B.2	Beispielfall D	71
B.3	Beispielfall E	73
B.4	Beispielfall F	73
B.5	Beispielfall G	74
B.6	Beispielfall H	76
B.7	Beispielfall I	81
B.8	Beispielfall J	82
B.9	Beispielfall K	86
B.10	Beispielfall L	89

Tabellenverzeichnis

Tab. 1.1	Häufigkeiten der ersten vier Ziffern nach Benford's-Law	10
Tab. 3.1	Wahrscheinlichkeiten der Ziffermengen $\{k-1, k, k+1\}$	29
Tab. 8.1	Ergebnisse des Tests für korrekte Daten	57
Tab. 8.3	Minimale Anzahl Verkäufe pro Tag (n) und Korrekturen	58
Tab. 8.2	Häufigkeiten bestimmter Preise auf der Speisekarte	58
Tab. 8.4	Ergebnisse aus dem Beispielfall B	59
Tab. 8.5	Erkennungsraten der einzelnen Testverfahren in der Übersicht	60
Tab. 8.6	Erkennungsraten der nach Westberg kombinierten Testverfahren in der Übersicht (kombinierter Test)	60
Tab. 8.7	Erkennungsraten der integrierten, kombinierten Testverfahren in der Übersicht (kombinierte Hypothese)	61

Abbildungsverzeichnis

Abb. 3.1	Verteilung der Häufigkeiten der ersten Ziffern einer Zahl im Zehnersystem nach Benford's-Law	21
Abb. 3.2	Stetige Dichte nach Benford's-Law	21
Abb. 3.3	Erste signifikante Ziffern einer Paretoverteilung mit Erwartungswert 10 und Varianz 3	28
Abb. 3.4	Erste signifikante Ziffern einer Lognormalverteilung mit Erwartungswert 6 und Varianz 2	28
Abb. 3.5	Erste signifikante Ziffern einer Gammaverteilung mit Erwartungswert 8 und Varianz 9	29
Abb. 4.1	Normalverteilung und ihre Bereiche mit Gleichverteilung auf der letzten Ziffer vor dem Dezimaltrennzeichen	34
Abb. 4.2	Lognormalverteilung und ihre Bereiche mit Gleichverteilung auf der letzten Ziffer vor dem Dezimaltrennzeichen	34
Abb. 4.3	Gammaverteilung und ihre Bereiche mit Gleichverteilung auf der letzten Ziffer vor dem Dezimaltrennzeichen	34
Abb. 5.1	Korrektur der χ^2 -Statistik	43

Symbolverzeichnis

$d_b^{(n)}(x)$	n -te interessante (erste bzw. letzte) Ziffer zur Basis b von x
$d(\mathbf{X}, i)$	absolute Häufigkeit der Zahl i im Datensatz \mathbf{X}
$L_b(x \ell)$	ℓ -te Abschnittsmantisse zur Basis b der Zahl x
$m_b(x)$	Mantisse zur Basis b der Zahl x
\mathcal{M}_b	Mantissen- σ -Algebra zur Basis b
\exists	es gibt (min.) ein
$\text{sgn}(\cdot)$	signum (Vorzeichen)
$\text{Bin}(p)$	Binomialverteilung mit Erfolgswahrscheinlichkeit p
\mathbb{Z}	Menge der ganzen Zahlen
\mathbb{N}	Menge der natürlichen Zahlen
\mathbb{R}	Menge der reellen Zahlen
∞	unendlich
$\bigcup_{i=1}^n m_i$	Vereinigungsmenge aus den Mengen m_i
$x \bmod y$	Rest von x bei Teilung durch y
$\sum_{i=1}^n x_i$	Summe über die Zahlenfolge x_i
$\int_a^b f(x)dx$	Integral der Funktion f über x im Intervall a bis b
\forall	für alle
$\mathbb{E}(X)$	Erwartungswert der Zufallsvariable X
$\text{Var}(X)$	Varianz der Zufallsvariable X
$\mathbb{1}_x(y)$	Indikatorfunktion: =1 falls $y \in x$, 0 sonst
ggt	größter gemeinsamer Teiler
$\lfloor \rfloor$	abrunden
$\log_b(\cdot)$	Logarithmus zur Basis b
$\ln(\cdot)$	natürlicher Logarithmus
$\mathcal{B}(I)$	Borelmengen für das Intervall I
$f \circ g(\cdot)$	Verknüpfung der Funktionen f und g , d. h. $g(f(\cdot))$
$f^{-1}(\cdot)$	Umkehrfunktion der Funktion f
$O(\cdot)$	Größenordnung eines Einflusses, z. B. $O(n)$ lineares Wachstum in n
$\wp(M)$	Potenzmenge zur Menge M
$\sigma(M)$	σ -Algebra zur Menge M

Teil I

Einleitung

1 Ziffernanalyse

Statistische Datenanalyse hat primär die Zielsetzung, allgemeine Muster aufzudecken oder Eingabe-Ausgabe-Beziehungen zu erklären bzw. zu prognostizieren. Daneben sind aber auch Fragestellungen von Interesse, in denen individuelle Auffälligkeiten ausgemacht werden sollen, d. h. Abweichungen von einem (zu präzisierenden) „Normalfall“. Beispiele hierzu bilden die Identifikation von „Hochbegabten“ oder diejenige von „Außersinnlicher Wahrnehmung“.

Ökonomisch interessanter ist die Aufdeckung von Betrugsfällen in der Finanzverwaltung oder in der Versicherungswirtschaft. Solche Abweichungen vom Normalfall sind nicht durch die erhobenen Attribute erklärbar, sondern resultieren aus nicht erfassbaren latenten Variablen, wie etwa „mangelndem Rechtsbewusstsein“. Der wichtigste Anknüpfungspunkt zur Entwicklung von Aufdeckungsverfahren besteht darin, nach Verletzungen an sich plausibler Grundannahmen zu suchen. Hierzu eignen sich speziell Abweichungen von Symmetrien oder allgemeineren Invarianzen. Die Einzelabweichungen werden dann zu Größen verdichtet, deren Verteilung weitgehend verteilungsfrei ist. Beispielsweise wird man Betrugsverhalten in einem iterierten fairen Zwei-Personen-Nullsummen-Spiel über die jeweiligen Anzahlen an Gewinnen („1“) und Verlusten („-1“) aufzudecken versuchen. Die Fairness des Spieles würde sich im Modell in der Symmetrieannahme an die Verteilung der Auszahlungen an Spieler 1 niederschlagen. Auffällig könnten dann sein:

- Abhängigkeiten und Inhomogenitäten unter den Werten $\text{sgn}(X_n)$
- Abweichungen zwischen der Verteilung von $\frac{1}{2} \sum_n (1 + \text{sgn}(X_n))$ und $\text{Bin}(n, \frac{1}{2})$.

Der Benford-Ansatz zur Überprüfung von Finanzdaten basiert auf einer Analyse der Ziffernverteilung. Als Normalfall unterstellt wird hierbei eine „Gleichverteilung“. Diese lässt sich nun etwa für die erste (nicht-verschwindende) Ziffer fordern oder aber für die gesamte Mantisse. Bei der zweiten Alternative ist zu präzisieren, was unter der Gleichverteilung einer unendlichen Zahlengesamtheit zu verstehen ist. Dies erfolgt mathematisch dadurch, dass die Größe einer solchen Menge bei Bewegung invariant sein soll. „Bewegung“ kann dabei entweder als eine additive Operation (Translation) verstanden werden oder aber als eine multiplikative (Dilatation). Auszuzeichnen ist daher — abstrakter gesehen — eine algebraische Verknüpfung sowie — aus technischen Gründen — eine topologische Struktur. Ihre Fundierung erfährt die Benford-Analyse im Rahmen invarianter Maße auf (kompakten, kommutativen) Gruppen, angewandt auf die Mantissengruppe. Mantissen leiten sich nun von der multiplikativen Struktur reeller Zahlen ab und erweisen sich als recht spröde gegenüber der additiven. Dies wird schon daran deutlich, dass das additive Analogon zu (1.1) unten leider nicht gilt. Daraus ergeben sich für den Benford-Ansatz recht unmittelbar Schwierigkeiten bei dessen Rechtfertigung, da sich die untersuchten Zahlenbestände oft durch eine additive Zusammenfassung (über Zeiteinheiten, Einzelumsätze etc.) ergeben. Falls die Zahlen zuvor weiterverarbeitet wurden, dann reichen schon Rundungsfehler um die als Normalfall unterstellte Verteilung eventuell zu zerstören (Mochty, 2002).

Das Einsatzspektrum der Ziffernanalyse auf Basis der ersten Ziffern ist aus theoretischer (vgl. Abschnitt 3.2) und auch empirischer Sicht (vgl. Abschnitt 3.4) sehr beschränkt. Schon seit län-

gerem wurde daher die Verwendung der letzten Ziffern postuliert, deren Eignung als Referenzverteilung für die Betrugserkennung in Kapitel 4 in zweierlei Weise nachgewiesen wird.

Auch wenn eine plausible Referenzverteilung gegeben ist, so bleibt doch die Frage, in welcher Weise Menschen mit „mangelndem Rechtsbewusstsein“ von genau dieser Referenz abweichen, zumal diese — im Gegensatz zum bereits beschriebenen Nullsummenspiel — nicht unmittelbar mit einem Vorteil für die betreffende Person verbunden ist. Daher wird in Kapitel 2 kurz auf die Fähigkeit des Menschen, sich „zufällig“ — also „natürlich“ — zu verhalten eingegangen. Je größer dieser Unterschied zwischen unveränderten und veränderten Zahlenfolgen ist, desto eindeutiger sind problematische Folgen zu identifizieren. Dies beeinflusst direkt die Erkennungs- bzw. Aufdeckungsraten, welche die Einsatzfähigkeit der Ziffernanalyse in der Betrugserkennung bestimmen. Daher wird in Kapitel 8 auf einige empirische Resultate aus der Praxis der Steuerprüfung eingegangen.

1.1 Grundlagen der Ziffernanalyse

Unter dem Begriff der Ziffernanalyse wird üblicherweise ein Ansatz zur Betrugserkennung verstanden, bei dem aus den zu untersuchenden Daten Statistiken über die Ziffern gebildet werden. Die Zahl als ganzes – also ihr Wert – wird dabei ignoriert.

Es werden üblicherweise die ersten oder die letzten Ziffern von Zahlen betrachtet. In ihrer Bedeutung für die Größenordnung der Zahl stellt die erste Ziffer ein interessantes Untersuchungsobjekt dar. Für die letzte Ziffer spricht die strukturelle Vergleichbarkeit von Zahlenfolgen aus unterschiedlichen Quellen. Es wird später gezeigt, dass die letzten Ziffern in einem Datensatz unabhängig und identisch gleichverteilt sind, sofern diese einem Summationsprozess von unabhängigen Summanden entstammt (vgl. Abschnitt 4.2 bzw. Abschnitt 6.1).

Die ersten Ziffern werden mit Hilfe der Mantisse bestimmt:

Definition 1.1 (Mantisse)

Für $x \in \mathbb{R}^+$, $b \in \mathbb{N}^{\geq 2}$ heißt die eindeutig bestimmte Zahl $m_b(x) \in \mathbb{M} = [1, b)$, für die gilt:

$$\exists p \in \mathbb{Z} : x = m_b(x) \cdot b^{e_b(x)} ,$$

die Mantisse von x (zur Basis b), wobei $e_b(x) \in \mathbb{Z}$ den Exponenten bezeichnet.

In b -Entwicklung ergibt sich:

$$m_b(x) = d_1(x), d_2(x) d_3(x) \dots$$

mit der führenden Ziffer $d_1(x) \in \{1, \dots, b-1\}$ und den weiteren Ziffern (digits) $d_j(x) \in \{0, \dots, b-1\}$. Offensichtlich gilt:

$$m_b(xy) = m_b(x)m_b(y) \pmod{b} \quad (1.1)$$

Zwei Mantissen $m_b(x), m'_b(x) \in \mathbb{M}$ können folgendermaßen verknüpft werden:

$$m_b \circ m'_b = \begin{cases} m_b m'_b & m_b m'_b < b \\ \frac{m_b m'_b}{b} & \text{sonst} \end{cases} \quad (1.2)$$

Mit dieser Festlegung bildet (\mathbb{M}, \circ) eine kommutative Gruppe. Versieht man diese noch mit der Quotiententopologie, dann ist (\mathbb{M}, \circ) kompakt und ermöglicht eine (eindeutige) invariante Längenmessung in Form einer Wahrscheinlichkeitsverteilung $\mu(\cdot) : 1 \leq c < d < b$ (Müller-Funk, Dlugosz, 2008)

$$\mu([c, d]) := \log_b(d) - \log_b(c) \quad (1.3)$$

Tabelle 1.1 zeigt diese nach Benford benannte Verteilung für die Basis $b = 10$.

Die letzten Ziffern werden hingegen folgendermaßen bestimmt:

Definition 1.2 (Letzte Ziffern)

Für $x \in (0, \infty)$, $b \in \mathbb{N}^{>1}$ und $l \in \mathbb{Z}$ bildet $d_k^{(b)}(x) \in B = \{0, b-1\}$ mit

$$d_k^{(b)} : \mathbb{N}_0 \rightarrow B \\ x \mapsto \lfloor \frac{x}{b^{k-1}} \rfloor - b \lfloor \frac{x}{b^k} \rfloor$$

die k -letzten Ziffern von x (zur Basis b) ab.

Die folgenden Beispiele verdeutlichen diese Definitionen:

Beispiel 1.3

1. $m_{10}(12345) = 1,2345$
2. $d_1^{(10)}(12345) = 5$, $d_2^{(10)}(12345) = 4$, $d_3^{(10)}(12345) = 3$

Üblicherweise wird für die Basis b der Wert 10 gewählt.

Um nun auf Basis dieser Ziffernverteilungen Analysen durchführen zu können, welche die Identifikation von in sich unplausiblen Datensätzen ermöglichen, sind drei Dinge erforderlich:

1. Existenz einer eindeutigen Referenzverteilung.
2. Begründete Erwartbarkeit von Abweichungen von der Referenzverteilung im Falle von Datenveränderungen.
3. Ein effizienter statistischer Test auf signifikante Abweichungen von der Referenz.

Diese drei Punkte sind zu klären, bevor eine Analyse durchgeführt werden kann.

Ziffer	Position in der Zahl				Ziffer	Position in der Zahl			
	Erste	Zweite	Dritte	Vierte		Erste	Zweite	Dritte	Vierte
0		0,1197	0,1018	0,1002	5	0,0792	0,0967	0,0998	0,1000
1	0,3010	0,1139	0,1014	0,1001	6	0,0669	0,0934	0,0994	0,0999
2	0,1761	0,1088	0,1010	0,1001	7	0,0580	0,0904	0,0990	0,0999
3	0,1249	0,1043	0,1006	0,1000	8	0,0512	0,0876	0,0986	0,0999
4	0,0969	0,1003	0,1002	0,1000	9	0,0458	0,0850	0,0983	0,0998

Tab. 1.1: Häufigkeiten der ersten vier Ziffern nach Benford’s-Law

1.2 Aktuelle Praxis der Ziffernanalyse

Basierend auf den Arbeiten von NIGRINI (1996, 1997), NIGRINI, MITTERMAIER (1997) wurde die Ziffernanalyse insbesondere von BLENKERS (2003) und SOSNA (2004, 2005) in das deutsche Finanzbehördensystem eingeführt. Derzeit wird die intern als „Chi-Quadrat-Test“ benannte Methodik insbesondere bei der Analyse von Tagesendsalden verwendet. Die wichtigste Kennzahl ist dabei (im Gegensatz zu den Arbeiten von NIGRINI) der Test auf Gleichverteilung der Endziffer bzw. der letzten ganzen Euroziffer (letzte Ziffer vor dem Dezimaltrennzeichen).

Die Annahme der Gleichverteilung wird mit Benford’s-Law (Benford, 1938) begründet (vgl. Tabelle 1.1). Es lässt sich dann leicht nachweisen, dass sich die Verteilung der weiter „hinten“ liegenden Ziffern der Gleichverteilung annähert. Damit handelt es sich hierbei also nicht wirklich um die „letzte“ Ziffer der Zahl, sondern um die „letzte“ Ziffer ihrer Mantisse.¹ Wie in Tabelle 1.1 dargestellt, kann bereits ab der 5ten Stelle in der Mantisse eine Gleichverteilung unterstellt werden.

Die Gültigkeit von Benford’s-Law wurde bisher nur in wenigen Einzelfällen empirisch erbracht (vgl. Abschnitt 3.4). Eine befriedigende theoretische Erklärung für das Auftreten von Benford’s-Law und die notwendigen Voraussetzungen sind bisher nur für sehr spezielle Fälle erbracht worden wie beispielsweise lange Multiplikationsketten (vgl. Abschnitt 3.2). Somit stellt sich die Frage, ob die Gleichverteilung auch für andere Mantissenverteilungen im Limes gegeben ist (vgl. dazu Abschnitt 4.1).

Anwendung der Ziffernanalyse bei der Überprüfung von Tagesendsalden

Die in der Finanzverwaltung verwendete Methodik „Chi-Quadrat-Test“ basiert auf der Gleichverteilungsannahme der letzten Euro-Ziffer. Da die betrachteten Zahlen nicht immer die gleiche Stelligkeit aufweisen, handelt es sich also nicht immer um dieselbe Stelle in der Mantisse, weshalb das oft als Begründung zitierte Benford’s-Law gar nicht direkt greift. Es ergibt sich vielmehr eine Mischverteilung aus Ziffern der Mantisse, wobei — wie bereits angemerkt — für Zahlen größer als zehntausend die Gleichverteilungsannahme für die letzten Ziffern gerechtfertigt ist.

¹ Auch hier kommt eine asymptotische Betrachtung zum Tragen, so dass unter „letzter“ Ziffer der Limes verstanden wird.

Neben dem Test auf Gleichverteilung der letzten Ziffer vor dem Dezimaltrennzeichen werden auch Tests auf Gleichverteilung auf der vorletzten und der ersten Ziffer hinter dem Dezimaltrennzeichen verwendet. Die in den Arbeiten von NIGRINI vorgestellten Tests auf Verteilung der ersten Ziffern werden hingegen nicht bei der Prüfung von Kassenbelegen eingesetzt (Nigrini, 1996; Nigrini, Mittermaier, 1997).

Bei sämtlichen Tests wird der χ^2 -Anpassungstest genutzt, um die Signifikanz von Abweichungen nachzuweisen.

$$\chi^2 = \frac{\sum_{i=1}^{10} [d(\mathbf{X}, i) - \frac{n}{10}]^2}{\frac{n}{10}}, \quad (1.4)$$

wobei $d(\mathbf{X}, i)$ die Anzahl der Ziffer i als Endziffer im Datensatz \mathbf{X} beschreibt. Da es sich bei diesem Test um einen asymptotischen Test handelt, sind ausreichende Besetzungen der einzelnen Zellen notwendig, welche bei maximal 365 Tagesendsalden innerhalb eines Jahres nur knapp erreicht werden können.

Ein weiteres Problem bei dieser Vorgehensweise sind geringe Zahlenwerte (z. B. lediglich zwei- und dreistellige Zahlen) im Datensatz. Diese werden entweder in die Untersuchung einbezogen (obwohl nach Benford's-Law dann die letzten Ziffern *nicht* gleichverteilt sein können) oder ignoriert, was die Problematik hinsichtlich der Asymptotik des χ^2 -Tests verschärft.

Juristische Anmerkungen

Die Methodik des „Chi-Quadrat-Test“ wurde nicht nur für interne Zwecke bei der Steuerung der Prüfungsintensität verwendet, sondern auch als Begründung für die Ablehnung der Ordnungsmäßigkeit der Buchführung. Die Zahlung der damit verbundenen Zuschätzungen wurden nachfolgend von den betroffenen Steuerpflichtigen zur Aussetzung vor Gericht getragen. Urteile zu diesem Thema ergaben sich daher in den Jahren 2003 bis 2005 (Blenkers, 2003; Wähnert, 2007).

Grundsätzlich wird dabei die Anwendbarkeit des vorliegenden „Chi-Quadrat-Test“ akzeptiert (FG Münster v. 10.11.2003 – 6 V 4562/03 E,U und FG Hamburg v. 24.06.2005 I 153/04), allerdings nicht ausschließlich, sondern nur in Kombination mit anderen Verfahren. Dies könnte beispielsweise ein „Zeitreihenvergleich“ sein (FG Münster v. 10.11.2003 – 6 V 4562/03 E,U). Des weiteren werden für die Anwendung der Methodik mindestens 5 Datenpunkte pro Klasse (FG Münster v. 10.11.2003 – 6 V 4562/03), bzw. insgesamt mindestens 500 Werte (FG Münster v. 14.08.2003 – 8 V 2651/03) verlangt.

Bei der Überprüfung von Tagesumsätzen ist dies also bei 365 Tagen im Jahr unmöglich. Außerdem wird noch eine gewisse Größe des Betriebes, also vermutlich der Anzahl der Transaktionen, und eine gewisse Vielzahl der Produkte verlangt (FG Münster v. 10.11.2003 – 6 V 4562/03), wobei eine genaue Festlegung dort nicht erfolgt ist.

Eine detailliertere Betrachtung der aktuellen Rechtsprechung im Zusammenhang mit der Ziffernanalyse geben unter anderen TREDE U. A. (2009).

1.3 Forschungsziel

Folgende Punkte sind zu klären, um die Gültigkeit dieses Ansatzes nachweisen zu können:

1. Die Annahme der Gleichverteilung auf den letzten Ziffern in einem unmanipulierten Datensatz ist zu überprüfen, bzw. es sind Kriterien anzugeben, unter denen die Gleichverteilung der letzten Ziffern berechtigterweise angenommen werden kann.
2. Die Annahme der Nicht-Gleichverteilung der letzten Ziffern in einem manuell generierten Datensatz ist zu überprüfen.
3. Eignung des χ^2 -Tests für den Vergleich der erhobenen Verteilung (Empirie) mit der erwarteten Verteilung (Theorie) im Rahmen des vorliegenden Multinomialmodells.

Damit ergeben sich (nicht zuletzt aus den Urteilen der Finanzgerichte) die folgenden Problemfelder:

1. Konkretisierung der „ausreichenden Produktvielfalt“
2. Bestimmung der „ausreichenden Anzahl Transaktionen“
3. Auswahl eines geeigneten Tests auf Gleichverteilung

Während die beiden ersten Problemfelder die Gültigkeit der Gleichverteilungsannahme umschreiben und zwei mögliche Kriterien für diese enthalten, wird beim dritten Problemfeld auf den häufig recht geringen Datenumfang eingegangen, welcher zu berücksichtigen ist.

Gliederung der Arbeit

Die Arbeit gliedert sich in vier große Bereiche: Der erste Bereich gibt einen Überblick über den Ansatz der Ziffernanalyse zur Betrugserkennung. Neben notwendigen Definitionen wird auch die menschliche (Un-)Fähigkeit, Zufallszahlenfolgen zu erzeugen, diskutiert. Im zweiten Bereich werden verschiedene Ansätze vorgestellt, um „echte“, d. h. unveränderte Ziffernverteilungen zu beschreiben. Diese bilden die Referenz, mit der die empirisch beobachteten Verteilungen verglichen werden können. Für diesen Vergleich muss auf Statistiken zurückgegriffen werden — hier vor allem die χ^2 -Statistik — um Abweichungen zwischen der erwarteten (Referenz-)Verteilung und der beobachteten Verteilung zu bestimmen und beurteilen zu können. Diese werden im dritten Teil behandelt. Im vierten Teil schlussendlich, werden einige Kennziffern ermittelt, um die Effektivität der Ziffernanalyse bei der Prüfung von Kassenbelegen in der Kleingastronomie abschätzen zu können.

Dem ersten, oben genannten, Problemfeld wird im Kapitel 4 dieser Arbeit nachgegangen. Der Nachweis basiert im Abschnitt 4.2 auf der Konstruktion von homogenen Markoffketten zur Beschreibung der Verteilung der letzten Ziffern. Es wird die Gleichverteilung der letzten Ziffern bei Summen von Zufallsvariablen jeweils zunächst asymptotisch bewiesen und eine Schätzung der Konvergenzgeschwindigkeit vorgestellt. Dabei wird ein — insbesondere für die Praxis — relevanter Kriteriensatz erarbeitet. Zuvor wird im Abschnitt 4.1 kurz ein zweiter Ansatz

vorgestellt, mit dem über in der Finanzwirtschaft häufig verwendete stetige Verteilungen eine Schätzung der „richtigen“ Verteilung der letzten Mantissenziffer vorgenommen werden kann. Außerdem wird in Abschnitt 4.1 die Verteilung der letzten Ziffer vor dem Dezimaltrennzeichen bei einigen — in der Modellbildung beliebten — stetigen Verteilungen durch Simulationen untersucht.

Auf das zweite und dritte Problemfeld wird in Kapitel 5 eingegangen und verschiedene denkbare Alternativen theoretisch auf ihre Eignung für den vorliegenden Zweck überprüft.

Einen vollkommen anderen Ansatz, der nicht auf einer Hypothese über die (Rand-)Verteilung der letzten Ziffern beruht, wird in Kapitel 6 untersucht. Insbesondere aus Kapitel 2 wird ersichtlich, dass der Mensch keinen perfekten Zufall generieren kann; selbst wenn eine exakte Gleichverteilung entsteht, sind die einzelnen Zufallszahlen zumeist assoziiert. Daher kann man auch den Grad an Assoziation in der Folge der Zufallszahlen, genau genommen, deren letzter Ziffer, überprüfen. Dies führt zu Tests auf stochastische Unabhängigkeit von Ziffernfolgen.

In Kapitel 7 wird die benötigte Software für den praktischen Einsatz der Ziffernanalyse bei der Prüfung von Kassenbelegen vorgestellt. Weiterhin wird die Ermittlung der erforderlichen Daten diskutiert. Die Effizienz der Ziffernanalyse kann mit den empirischen Resultaten abgeschätzt werden, die in Kapitel 8 vorgestellt werden.

Abschließend werden in Kapitel 9 ein (sehr grobes) Vorgehensmodell für die Ziffernanalyse als Entscheidungshilfe vorgestellt und Kritik geäußert; es werden die Einschränkungen des Verfahrens erläutert, sowie weiterer Forschungsbedarf festgehalten.

2 Manuell erzeugte Zufallszahlen

In der psychologischen Literatur sind verschiedenste Studien zum Thema Mensch und Zufall dokumentiert (bspw. Bar-Hillel, Wagenaar, 1991; Brugger, 1997). Dabei sind neben der Zufälligkeit auch verschiedene Faktoren untersucht worden, welche die Qualität generierter Zufallszahlenfolgen bzw. die Wahrnehmung von Zufall beeinflussen.

Es wurden dabei die beiden Aspekte „Beurteilung von Zufälligkeit“ und „Erzeugung von Zufallsereignissen“ untersucht und jeweils ähnliche Abweichungen vom wahren Zufall festgestellt (Bar-Hillel, Wagenaar, 1991). Da für die Arbeit nur die Erzeugung von Zufallszahlenfolgen von Interesse ist, sollen nur Arbeiten mit dem Fokus auf Erzeugung von Zufallszahlenfolgen — insbesondere Folgen über den Bereich 0 bis 9 — betrachtet werden.

Im Rahmen der Forschung zu Benford's-Law wurde auch die Verteilung der ersten Ziffern von durch Menschen erzeugten Zufallszahlen untersucht und sowohl eine signifikante Abweichung von der nach Benford's-Law erwarteten Verteilung² als auch von der Gleichverteilung festgestellt (Hill, 1988). Allerdings scheinen die Mantissenverteilungen der von den Probanden erzeugten Zahlen irgendwo zwischen der Gleichverteilung und Benford's-Law zu liegen und sich manchmal auch nicht wirklich allein auf der ersten Ziffer zu unterscheiden (Diekmann, 2007). Ähnliche Resultate ergeben sich auch für die letzten Ziffern (Mosimann u. a., 1995).

Im Folgenden soll der Fokus auf einstelligen Ziffern liegen, auch wenn zu erwarten ist, dass bei mehrstelligen Zahlen die Ziffern anders erzeugt werden. Dabei sollen — nach einer kurzen Einführung in die psychologische Theorie zur menschlichen Fähigkeit, Zufallszahlenfolgen zu erzeugen — die beiden statistisch interessierenden Eigenschaften Gleichverteilung und Unabhängigkeit betrachtet werden, auf welche die — an späterer Stelle dieser Arbeit vorgestellten — beiden wichtigsten statistischen Tests auf „Natürlichkeit“ von Ziffernfolgen basieren.

2.1 Determinanten der menschlichen (Un-)Fähigkeit zur Generierung von Zufallszahlenfolgen

Manuell erzeugte Zufallszahlenfolgen unterscheiden sich nicht generell in einer vorbestimmten Weise von echten Zufallsfolgen. Neben individuellen Einflüssen spielen Faktoren wie Zeitdruck, statistische Ausbildung und Alter eine entscheidende Rolle.

Zeit

Gibt man einem Probanden die Rate vor, mit der er Zufallsereignisse produzieren soll, so kann beobachtet werden, dass mit der Steigerung der Produktionsrate die Fähigkeit zufällige Ergebnisse zu produzieren abnimmt.

BADDELEY hat gezeigt, dass Probanden bei 4, 2, 1 und $\frac{1}{2}$ Sekunden Zeit für die rein zufällige Nennung eines der 26 Buchstaben des Alphabets einen mit der Geschwindigkeit fallenden

² Im Zusammenhang mit Finanzdaten und vor allem auch mit dem bewussten Versuch der Manipulation unter Bekanntheit von Benford's-Law (Watrin u. a., 2008).

Informationsgehalt³ der Zufallsfolge generieren. Weiterhin wurde festgestellt, dass die Probanden mit steigendem Zeitdruck eine höhere Rate an Stereotypen, also Digrammen mit im Alphabet aufeinander folgenden Buchstaben, erzeugten. Ebenfalls steigt mit der Generationsrate die Anzahl der wiederholten Digramme (Baddeley, 1966). Ähnliche Resultate wurden auch von anderen Forschern erzielt (Rabinowitz u. a., 1989; Towse, 1998).

Alter der Person

VAN DER LINDEN U. A. haben in einem Versuchsaufbau, welcher dem von BADDELEY (1966) entspricht, den Einfluss des Alters auf die Fähigkeit, gute Zufallsfolgen erzeugen zu können, untersucht. Dabei war auffällig, dass für Ältere mit steigender Geschwindigkeit eine größere Abweichung von der erwarteten Zufälligkeit eintrat. Dieser Effekt war schon bei der relativ geringen Rate von 4 Sekunden zwischen den einzelnen Anforderungen signifikant (Van der Linden u. a., 1998).

Auch RABINOWITZ U. A. haben versucht, abhängig vom Alter, unterschiedliche Algorithmen bei der Zufallszahlengenerierung zu identifizieren. Dazu wurden a-priori verschiedene Regeln erstellt und anschließend überprüft, inwiefern diese Regeln genutzt werden konnten, um die Antworten der Probanden (Kinder, Jugendliche und junge Erwachsene) vorauszusagen. In ihren Untersuchungen erreichten College-Studenten maximal einen Anteil reinen Zufalls von etwa 75% (Rabinowitz u. a., 1989), bei den jüngeren Teilnehmern lag der Anteil signifikant darunter.

Statistische Bildung

NEURINGER hat gezeigt, dass die Qualität der Zufallsfolgen, die ein Mensch erzeugt, durch Erlernen von Eigenschaften stochastischer Folgen stark verbessert werden kann (Neuringer, 1986).

CHAPANIS kommt zu einem ähnlichen Ergebnis: In einer Vergleichsstudie zwischen sechs Studenten aus „statistikfernen“ Studiengängen und fünf Studenten mit mindestens einjähriger Statistikbildung und gewisser Erfahrung auf dem Gebiet des Zufalls sowie dem Verfasser der Studie. Es konnte gezeigt werden, dass insbesondere bei der Unabhängigkeit der Ziffern (gemessen an Stereotypen in Ziffernpärchen und Zifferntriplets) statistisch gebildete Personen eine zufälliger, d. h. weniger abhängige Folge generiert haben (Chapanis, 1995).

Weitere Einflussfaktoren

Ebenfalls spielt es eine Rolle, ob ungeordnete (den Probanden unbekannt) Symbole oder geordnete Elemente (wie Zahlen oder Buchstaben) gewählt werden sollen. Auch die Art der Wiedergabe (mündlich, Tastendruck, schriftlich) spielt eine Rolle, insbesondere im Zusammenhang mit der Zeit. Die besten Ergebnisse lassen sich per Tastendruck mit unbekannt Symbolen erzielen, da der gesamte Bereich der Möglichkeiten quasi vor dem Probanden ausgebreitet liegt aber keinerlei Ordnung aufweist (Towse, 1998).

³ Die Information beschreibt den nicht-komprimierbaren und damit musterfreien Anteil einer Nachricht. Der Informationsgehalt wird üblicherweise mit der Formel $\log_2 n - \frac{1}{n} \sum n_i \log_2 n_i$ bestimmt.

Auch die Anzahl der Möglichkeiten spielt eine Rolle (Towse, 1998) und ob die Probanden parallel andere Aufgaben zu erledigen hatten (Wolitzky, Spence, 1968).

2.2 Eigenschaften manuell erzeugter Zufallszahlenfolgen: Typische Strukturen und Abweichungen vom Zufall

In der Psychologie wird seit über 50 Jahren die menschliche Fähigkeit zur Erzeugung von Zufallszahlen diskutiert. Ein Modell geht davon aus, dass es zwischen echten und manuell generierten Zufallsfolgen drei Merkmale gibt, die sich besonders unterscheiden (Rabinowitz, 1970; Ginsburg, Karpiuk, 1994; Rabinowitz u. a., 1989):

- **Zyklen**
Menschen tendieren dazu, alle Zahlen durch zu wechseln, was zu verringerter empirischer Varianz bei der Schätzung der Anteile der einzelnen Ziffern führt, da die Ziffern relativ exakt gleich häufig erscheinen. Dies wird häufig mit Hilfe der Lückenanalyse, also der Betrachtung der Abstände zwischen zwei Auftreten derselben Zahl, gemessen.
- **Serien**
Serien sind scheinbare Muster in den generierten Daten wie bspw. aufsteigende, absteigende Folgen oder Wiederholungen von Digrammen (zwei nebeneinander stehende Ziffern). Auch hier unterschätzt der Mensch üblicherweise die Häufigkeit derartiger Muster.
- **Wiederholungen**
Unter Wiederholungen werden Pärchen von nebeneinander stehenden Zahlen verstanden. Überprüft wird die Anzahl der Wiederholungen mit Hilfe der Digrammanalyse oder auch mit dem Poker-Test.

Alle diese Effekte erzeugen je eine charakteristische Abhängigkeitsstruktur auf den Daten, welche generell als Abweichung von der Unabhängigkeit statistisch nachgewiesen werden kann. Spezifische Tests für jede dieser Abweichungen können allerdings höhere Erkennungsraten bei gegebenem Fehlalarmrisiko erreichen.

Ziffernpräferenzen

RATH hat in einer Studie gezeigt, dass bei der Aufgabe, eine Folge von 2500 zufälligen⁴ Zahlen zwischen 0 und 9 zu generieren, kleinere Zahlen gegenüber Größeren bevorzugt werden, wobei die Null allerdings ebenfalls vermieden wurde. Die Hypothese der Gleichverteilung der Ziffern konnte für den Großteil der Probanden auf dem 5%-Niveau verworfen werden. Alle Probanden scheiterten bei dem Test auf Gleichverteilung der Differenzen aufeinander folgender Ziffern (Rath, 1966).

CHAPANIS hat in einem Experiment demonstriert, dass es keine globalen, für alle Menschen gültigen Präferenzen hinsichtlich der Wahl bestimmter Ziffern bei der Generierung von Zufallszahlen gibt. Übereinstimmungen zwischen den Menschen gibt es wohl nur bei der Darstellung

⁴ Unter „zufällig“ soll hier unabhängig und gleichverteilt verstanden werden.

von zwei- und dreifachen Ziffernwiederholungen, welche im Vergleich zu einer rein zufälligen Zufallszahlenfolge zu selten auftreten (Chapanis, 1995).

Abhängigkeiten innerhalb der generierten Zufallszahlenfolge

In einem psychologischen Experiment haben sowohl WADDELL U. A. als auch CHAPANIS festgestellt, dass der beste Prädiktor für die nächste Zahl in einer von einem Menschen generierten Zufallszahlenfolge die aktuelle Zahl ist (Waddell u. a., 1985; Chapanis, 1995). Der Mensch erzeugt seine Zufallszahlenfolge also nicht gedächtnislos, was zu einer stochastischen Abhängigkeit der Zahlen in der Folge führt. Häufig wird dabei das Auftreten von auf- bzw. absteigenden Folgen unter den Ziffern (nach numerischen oder lexikographischen Ordnungen) entweder weit über- oder unterschätzt (Teraoka, 1963; Chapanis, 1995).

Sogar bei nur zwei Möglichkeiten konnte gezeigt werden, dass Menschen dazu tendieren, eher die Alternative zu wählen als eine Wiederholung desselben Symbols zu notieren (Bakan, 1960).

2.3 Potentiale für die Betrugserkennung mittels Ziffernanalyse

Die menschliche Fähigkeit gute Zufallszahlen zu erzeugen schwankt stark mit den Einflussfaktoren Alter, Zeit und statistische Bildung, wobei allerdings lediglich die Intensität der grundlegenden Abweichungen durch diese beeinflusst wird.

Für die Entwicklung von Tests zur Unterscheidung von rein natürlichen Prozessen und manuell Beeinflussten können folgende Eigenschaften von manuell erzeugten Zufallszahlen festgehalten werden:

- a) Trotz des Auftrags, eine möglichst gute Gleichverteilung auf den Daten zu generieren, besitzen Menschen eine gewisse Tendenz bestimmte Zahlen über- bzw. unterrepräsentiert oft zu wählen. Dabei spielen persönliche Faktoren eine große Rolle, so dass weder global gültige Präferenzen noch Abneigungen gegenüber bestimmten Zahlen auszumachen sind. Damit sollte ein Test auf gleiche Wahrscheinlichkeit für alle Ziffern für alle denkbaren Abweichungen geeignet sein.
- b) Menschen sind nicht in der Lage, stochastisch unabhängige Folgen von Zahlen zu bilden. Dabei lässt das „Gedächtnis“ allerdings mit dem Abstand der Zahlen in der Folge ab, so dass auch die Intensität der Abhängigkeit der Zahlen in der Folge ebenfalls abnimmt. Es wird damit ausreichend sein, bei der Überprüfung der Unabhängigkeit die jeweils direkt vorangegangenen Zahlen zu einer bestimmten Zahl in der Folge zu betrachten.

Diese Resultate sind insofern kritisch zu sehen, als dass weder die Methodik ausgereift noch die Anzahl der Versuchsteilnehmer an den einzelnen Studien besonders groß gewesen wäre. Weiterhin wurden auch keine Untersuchungen durchgeführt, bei denen Menschen Zufallszahlenfolgen mit einer bestimmten Zielsetzung (wie bspw. Fehlangaben in Steuererklärungen) erstellen sollten. Die grundlegende Problematik der Messbarkeit von „Zufall“ ist insofern bekannt, als dass es keine einfache, mathematisch prüfbare Definition von Zufall gibt (Wagenaar, 1972).

Dennoch kann durch die große Vielzahl verschiedener methodischer Ansätze und Studien festgehalten werden, dass von Menschen erzeugte Zufallszahlen in den zwei genannten Aspekten von echtem Zufall signifikant abweichen.

Teil II

Ziffernverteilungen

3 Erste Ziffern

Die Ziffernanalyse versucht mit Hilfe ungewöhnlichen Ziffernverteilungen in den Zahlen auf Unregelmäßigkeiten in der zugrunde liegenden Datenbasis zu schließen. Daher ist es notwendig, den „Normalfall“ für die betrachteten Ziffern der zu analysierenden Datensätze zu definieren.

Im Rahmen der Betrugserkennung haben – insbesondere auf Grund ihres Wertes – zunächst die ersten Ziffern Interesse geweckt. Diesen wurde Benford’s-Law als „naturegegebene“ Verteilung unterstellt, welche im folgenden Abschnitt genauer betrachtet wird. In späteren Arbeiten wurde Benford’s-Law dann als Spezialfall einer einparametrischen Power-Law-Familie identifiziert und diese als flexible Alternative für die Ziffernanalyse vorgeschlagen (Rodriguez, 2004a). Dass auch diese Familie mit ihren monoton fallenden Ziffernverteilungen noch nicht ausreichend ist um allgemeingültige Referenzverteilungen beschreiben zu können, wird in den restlichen Abschnitten dieses Kapitels demonstriert.

3.1 Benford’s-Law als Verteilung

Das nach Benford benannte Gesetz wurde von NEWCOMB 1881 zum ersten Mal formuliert (Newcomb, 1881), geriet aber wieder in Vergessenheit bis es als Benford’s-Law 1938 wiederentdeckt wurde (Benford, 1938, 554):

$$P(\text{erste signifik. Ziffer} = d) = \log_b(1 + d^{-1}) \quad d = 1, \dots, b-1$$
$$P(\text{zweite signifik. Ziffer} = d) = \sum_{i=1}^{b-1} \log_b(1 + (i \cdot 10 + d)^{-1}) \quad d = 0, 1, \dots, b-1$$

Unter einer signifikanten Ziffer werden dabei die entsprechenden Ziffern der Mantisse zur Basis b verstanden (vgl. auch Definition 1.1):

Definition 3.1 (Signifikante Ziffern)

Die n -te Ziffer der Darstellung von $m_b(x)$, symbolisiert durch $d_b^{(n)}(x)$, wird n -te signifikante Ziffer von x (zur Basis b) genannt.

Die Verteilung der Mantisse im Zehnersystem ist in der Abbildung 3.1 grafisch dargestellt. Es ergeben sich für das Zehnersystem die bereits in der Tabelle 1.1 dargestellten Wahrscheinlichkeiten für die ersten Ziffern. Auffällig ist die mit der Ziffernposition in der Mantisse zunehmende Gleichverteilung.

Auf Basis der Mantisse kann auch eine stetige Version von Benford’s-Law definiert werden:

$$f_b(t) = \frac{1}{t \ln b} \quad t \in [1, b), \quad (3.1)$$

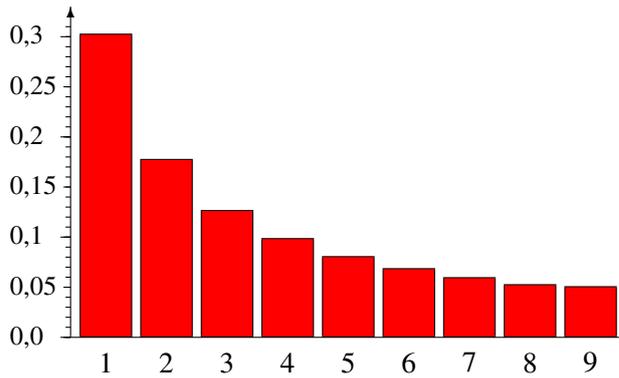


Abb. 3.1: Verteilung der Häufigkeiten der ersten Ziffern einer Zahl im Zehnersystem nach Benford's-Law

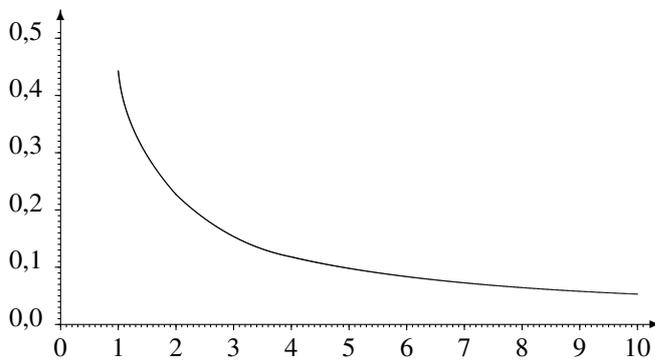


Abb. 3.2: Stetige Dichte nach Benford's-Law

wobei t über die Mantissenfunktion aus der Zahl gewonnen wird. Die Mantissendichte nach diesem stetigen Benford's-Law ist in der Abbildung 3.2 für die Basis $b = 10$ dargestellt.⁵

Eigenschaften und Charakteristika von Benford's-Law

Sei X eine Zufallsvariable mit Dichtefunktion (3.1), dann sind mit

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \frac{b-1}{\ln b} \\ \text{Var}(X) &= \frac{b^2}{2} - \left(\frac{b}{\ln b}\right)^2 \end{aligned} \tag{3.2}$$

⁵ Für die nachfolgende Betrachtung von Benford's-Law ist es notwendig, für die Wahrscheinlichkeitsverteilung über die Ziffern eine Algebra zu formulieren, welche die Mantissen beschreibt:

Definition 3.2 (Mantissen- σ -Algebra)
 Die von der Signifikante-Ziffer-Funktion erzeugte σ -Algebra

$$\mathcal{M}_b := \sigma \left(d_b^{(i)}, i \in \mathbb{N} \right) := \sigma \left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \left(d_b^{(i)} \right)^{-1} (\emptyset(\{0, \dots, b\})) \right)$$

wird Mantissen- σ -Algebra genannt.

Erwartungswert und Varianz gegeben.

Das Besondere an Benford's-Law sind die speziellen, charakteristischen Eigenschaften „Skaleninvarianz“ und „Summeninvarianz“. Die dritte Eigenschaft „Basisinvarianz“ wird zwar häufig auch als eine typische Eigenschaft von Benford's-Law erwähnt, sie ist aber im Gegensatz zu den beiden anderen nicht charakteristisch, d. h. auch andere Verteilungen sind (unter bestimmten Voraussetzungen) basisinvariant.

Bevor jedoch diese Eigenschaften beschrieben werden, sei Benford's-Law als Haar-Maß auf dem Einheitskreis charakterisiert, was die Beweise zu den genannten charakteristischen Eigenschaften erleichtert.

Lemma 3.3 (Mantissen-Transformation)

Sei $b \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ eine Basis. Die Abbildung zwischen den Maßräumen, welche durch den Übergang zur Betrachtung der Mantissen führt

$$\begin{aligned} (\mathbb{R}^+, \mathcal{M}) &\rightarrow ([1, b), \mathcal{B}[1, b)) \\ P &\mapsto P^{\mathcal{M}_b} := P \circ m_b^{-1} \end{aligned} \tag{3.3}$$

ist epimorph (homomorph und surjektiv) und messbar.

Dieses projizierte Wahrscheinlichkeitsmaß auf diesem Restklassenring der Mantissen kann reskaliert werden:

Lemma 3.4 (Logarithmische Reskalierung)

Sei $b \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ wieder eine Basis. Die Abbildung zwischen den Maßräumen

$$\begin{aligned} ([1, b), \mathcal{B}[1, b)) &\rightarrow ([0, 1), \mathcal{B}[0, 1)) \\ P^{\mathcal{M}_b} &\mapsto P^{\mathcal{M}_b} \circ \log_b^{-1} \end{aligned} \tag{3.4}$$

ist isomorph und messbar.

Beweis. Ergibt sich automatisch aus den Eigenschaften des Logarithmus. □

Damit ergibt sich für den Wahrscheinlichkeitsraum $([0, 1), \mathcal{B}[0, 1), \hat{P})$ die Verteilung

$$\hat{P}([0, c)) = \log_b(\log_b^{-1}(c)) = c \tag{3.5}$$

und damit eine einfache Längenmessung, womit es sich hierbei um ein Lebesgue-Maß handelt.

Durch diese bijektive Reskalierung mit dem Logarithmus können Skalierungsoperationen (Multiplikation) auf Mengen aus M mit Hilfe von Translationen (Addition) modulo eins von Mengen aus $\mathcal{B}[0, 1)$ beschrieben werden. Hier bildet $([0, 1), +)$ offensichtlich eine algebraische Gruppe.

Dies impliziert:

Satz 3.5

Benford's-Law ist die Gleichverteilung über $[0, 1)$ bezüglich dem Haar-Maß.

Beweis. Sei $[a, b) \in [0, 1)$ ein beliebiges Intervall und $\mu(x) = \frac{1}{x}$ das Haar-Maß auf diesem Intervall. Dann gilt:

$$\mu([a, b)) = \int_a^b \frac{1}{t} dt = \log(b) - \log(a)$$

□

Unter der Skaleninvarianz wird Folgendes verstanden (Hill, 1995b, S. 892):

Definition 3.6 (Skaleninvarianz)

Ein Wahrscheinlichkeitsmaß P auf $(\mathbb{R}, \mathcal{M}_b)$ heißt skaleninvariant, falls

$$\forall \alpha > 0, S \in \mathcal{M}_b : P(\alpha S) = P(S).$$

HILL hat gezeigt, dass diese Eigenschaft charakteristisch ist (Hill, 1995b):

Satz 3.7

Ein Wahrscheinlichkeitsmaß P auf $(\mathbb{R}, \mathcal{M}_b)$ ist genau dann skaleninvariant, wenn P die logarithmische Verteilung ist.

Der etwas ungewöhnliche Begriff der Summeninvarianz ist wie folgt definiert (Allaart, 1995, S. 4):

Definition 3.8 (Summeninvarianz)

Ein Wahrscheinlichkeitsmaß P auf $(\mathbb{R}, \mathcal{M}_b)$ heißt summeninvariant, falls

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \exists c(k) \in \mathbb{R} \quad \forall z_1 \in \{1, \dots, 9\}, z_2, \dots, z_k \in \{0, \dots, 9\} : \\ \mathbb{E} [m_b(x) \cdot \mathbb{1}_{\{d_1=z_1, \dots, d_k=z_k\}}(x)] = \int_{\mathbb{R}^+} m_b(x) \cdot \mathbb{1}_{\{d_1=z_1, \dots, d_k=z_k\}}(x) dP(x) = c(k).$$

Bemerkung 3.9

Anschaulich lässt sich die Summeninvarianz folgendermaßen beschreiben:

Nimmt man die Zahlen eines kleinen Ausschnitts und addiert diese mit ihren Wahrscheinlichkeiten gewichtet auf, so erhält man für jedes gleich große Teilintervall des Intervalls $[1, b)$ denselben Wert.

ALLAART hat gezeigt, dass auch diese Eigenschaft charakteristisch ist (Allaart, 1995):

Satz 3.10

Ein Wahrscheinlichkeitsmaß P auf $(\mathbb{R}, \mathcal{M}_b)$ ist genau dann summeninvariant, wenn P die logarithmische Verteilung ist.

Unter Basisinvarianz wird in diesem Zusammenhang verstanden (Hill, 1995a, S. 891):

Definition 3.11 (Basisinvarianz)

Ein Wahrscheinlichkeitsmaß P auf $(\mathbb{R}, \mathcal{M}_b)$ heißt basisinvariant, falls

$$\forall m \in \mathbb{N}, S \in \mathcal{M}_b : P(S^{1/m}) = P(S).$$

Bemerkung 3.12

Diese Definition von Basisinvarianz ist recht speziell, denn normalerweise würde man erwarten, dass die Basisinvarianz gegenüber jeder Basis und nicht nur bei durch Potenzen verbundene Basen gilt.

Satz 3.13

Ein Wahrscheinlichkeitsmaß P auf $(\mathbb{R}, \mathcal{M}_b)$ ist genau dann basisinvariant, wenn es ein $q \in [0, 1]$ gibt, so dass

$$P = qP^* + (1 - q)P_b$$

mit P^* ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{M}_b)$ und

$$P^*(m_b^{-1}(E)) = \begin{cases} 1 & 1 \in E \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \forall E \in \mathcal{B}[1, b]$$

und P_b die logarithmische Verteilung ist.

Damit ist Benford's-Law zwar basisinvariant, aber jede Mischung von Benford's-Law mit der Dirac-Verteilung in 1 ist ebenfalls basisinvariant.

Zusammenfassend kann man diese drei Eigenschaften mit folgendem Implikationsschema darstellen:

$$\begin{array}{ccccc} \text{Skaleninvarianz} & \Leftrightarrow & \text{Benford's-Law} & \Leftrightarrow & \text{Summeninvarianz} \\ & & \Downarrow & & \\ & & \text{Basisinvarianz} & & \end{array}$$

Insbesondere die direkt eingebaute, charakterisierende Skaleninvarianz lässt Benford's-Law als ideale Verteilung geeignet erscheinen, da so unabhängig von der Skalierung (insbes. Wahl der Währung) eine Untersuchung vorgenommen werden kann (Nigrini, Mittermaier, 1997). Dabei muss angemerkt werden, dass zwar das Verfahren (also die gebildeten Statistiken oder zumindest die darauf aufsetzenden Tests), nicht aber die Verteilung der Zahlen skaleninvariant sein muss. Somit ist diese Eigenschaft zwar praktisch, aber nicht zwingend notwendig, um die Ziffernanalyse zur Betrugserkennung einsetzen zu können.

3.2 Theoretische Herleitung für Benford's-Law

Für die Betrugsaufdeckung ist nun entscheidend, wann die Mantissenverteilung (1.1) bzw. (3.1) denn nun — zumindest approximativ — zugrunde gelegt werden kann. Hierzu existieren sowohl zahlentheoretische Dichteaussagen (Diaconis, 1977) wie auch wahrscheinlichkeitstheoretische Grenzwertsätze (Schatte, 1988; Boyle, 1994).

Die meisten Dichteaussagen bemühen dabei die recht unhandliche H_∞ -Summation. Diese hat

sich schon früh in der Literatur eingebürgert (Flehinger, 1966), kanonischer scheint jedoch die Riesz-Summation zu sein. Der Grund hierfür wird nach dem folgenden Dichtesatz deutlich werden, der an eine Arbeit von STIGLER anknüpft (Stigler, 1945; Raimi, 1976). Für dessen Formulierung benötigen wir noch folgende Bezeichnungen:

$$\begin{aligned} R(d) &= \{x \in]0, \infty[: m(x) \leq m\} \quad (m \leq b) \\ &= \bigcup_k [b^k, (m+1)b^k[\\ \mathbf{1}_m(x) &= \begin{cases} 1 & x \in R(d) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

Nun kann gezeigt werden:

Satz 3.14 (Müller-Funk, Dlugosz 2008)

In den obigen Bezeichnungen gilt für $x \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} a) \quad & \frac{1}{\ln x} \int_1^x \mathbf{1}_m(y) \frac{1}{y} dy \rightarrow \log_b(m+1) \\ b) \quad & -\frac{1}{\ln x} \int_{\frac{1}{x}}^1 \mathbf{1}_m(y) \frac{1}{y} dy \rightarrow \log_b(m+1) \end{aligned}$$

Die Aussage a) besagt nun etwa, dass die relative Anzahl der Zahlen y in $[1, x[$, deren führende Ziffer m nicht übersteigen, approximativ durch die Ziffernverteilung (3.1) beschrieben wird, d. h. für die Dichte von $R(d)$ gilt

$$\frac{\text{Länge}(R(d) \cap [1, x])}{\text{Länge}([1, x])} \rightarrow \log_b(m+1) .$$

Wesentlich hierbei ist, dass auf \mathbb{R}^+ jeweils das bzgl. der Multiplikation invariante Maß $\frac{dy}{y}$ gewählt wird und nicht — wie in der Arbeit von STIGLER — einfach das translationsinvariante Maß dy . Auch für diskrete Zahlenmengen (Zufallsfolgen) führt dieser Ansatz zu vernünftigen Resultaten. Hier ergibt dies gerade das Riesz'sche Limitierungsverfahren

$$(a_n)_{n \geq 1} \mapsto \frac{1}{\log n} \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{k} .$$

Folgende Größe hat sich als hilfreich erwiesen, um zu entscheiden, welche stetigen Verteilungen Benford'sche Erste-Ziffer-Verteilungen aufweisen:

$$U := Y - [Y] \quad \text{mit } Y := \log_b(X)$$

Solle U über $[0, 1)$ eine Gleichverteilung aufweisen, wären die ersten Ziffern von X nach Benford's-Law verteilt (Dümbgen, Leuenberger, 2008).

Für exponential-verteilte Zufallsvariablen konnte gezeigt werden, dass deren Erste-Ziffer-Ver-

teilung Benford's-Law zwar sehr nah kommt, aber unter keiner Parameterwahl exakt erreicht wird (Engel, Leuenberger, 2003; Miller, Nigrini, 2006). Weitere Verteilungen wurden bislang nur in Simulationen überprüft (vgl. Abschnitt 3.3).

Da einzelne (klassische) Verteilungen eher keine Benford'sche Erste-Ziffer-Verteilungen besitzen, muss eine geschickte Mischung von Verteilungen zum Ziel führen, wie auch BENFORD sie darstellte (Benford, 1938). Somit geht ein häufig angeführtes Argument auf einen Satz von HILL zurück, in dem er zeigt, dass gewisse Konstruktionen von Wahrscheinlichkeitsmaßen zu Benford's-Law führen (Hill, 1995b). Dazu wird die Vorstellung einer Mischung von Daten aus verschiedenen Quellen verwendet, welche als \mathbb{M} -zufällige k -Stichprobe bezeichnet wird: Ziehe unabhängig k Elemente aus einer zufällig ausgewählten Verteilung aus einer Menge von Wahrscheinlichkeitsverteilungen \mathbb{M} . Sei $\mathbf{E}(\mathbb{M})$ die erwartete Verteilung zur Wahrscheinlichkeitsverteilung \mathbb{M} ($(\mathbf{E}\mathbb{M})(B) = \mathbb{E}(\mathbb{M}(B))$) für alle Borel-Mengen $B \subset \mathbb{R}$.

Satz 3.15 (Hill 1995b)

Sei \mathbb{M} ein Wahrscheinlichkeitsmaß über $(\mathbb{R}^+, \mathcal{M})$. Dann sind äquivalent:

- (i) Der Erwartungswert von \mathbb{M} ist basisinvariant und $\mathbf{E}\mathbb{M}$ ist frei von Gitterpunkten⁶,
- (ii) $\mathbb{E}[\mathbb{M}(t)] = \log_b t$ für alle $t \in [1, b)$ für ein beliebiges $b \geq 2$,
- (iii) jede \mathbb{M} -zufällige k -Stichprobe hat eine skaleninvariante Mantissenverteilung
- (iv) $\mathbf{E}\mathbb{M}$ ist frei von Gitterpunkten, und jede \mathbb{M} -zufällige k -Stichprobe hat eine basisinvariante Mantissenverteilung,
- (v) für jede \mathbb{M} -zufällige k -Stichprobe X_1, X_2, \dots gilt

$$n^{-1} \#\{i \leq n : m_b(X_i) \in [1/b, t/b)\} \rightarrow \log_b t \quad \forall t \in [1, b)$$

für ein beliebiges $b \geq 2$.

Dieses Resultat ist wahrscheinlichkeitstheoretisch von Bedeutung — nicht aber statistisch, da die Voraussetzungen für eine derartige Mischung empirisch nicht zugänglich sind.

Das wichtigste wahrscheinlichkeitstheoretische Resultat, welches auf die log-Verteilung führt, ist (Schatte, 1988):

Satz 3.16

Seien X_1, X_2, \dots unabhängig identisch verteilte positive Zufallsvariablen, dann gilt für

- $T_N = m_b \left(\prod_i X_i \right) : P(T_N < t) \rightarrow \log_b(t)$
- $S_N = m_b \left(\sum_i X_i \right) : P(S_N < t) \rightarrow \log_b(t)$ in H_∞

⁶ Für alle Punkte $x \in \mathcal{X}$ gilt: $P(X = x) = 0$.

Wesentlich ist die erste Aussage in Satz 3.16, da diese nicht auf das H_∞ Konstrukt zurückgreifen muss und somit eine direkte und intuitive Anwendung ermöglicht: Produkte langer Multiplikationsketten weisen eine nach Benford's-Law verteilte Erste-Ziffern Verteilung auf.

Mit Ausnahme dieser Erklärungen zum Auftreten von Benford's-Law als Grenzverteilung nach Rechenoperationen (Satz 3.16) ist keiner der vorgestellten Ansätze geeignet, um ein Auftreten von Benford's-Law in einem speziellen Anwendungsfall begründen zu können.

3.3 Simulationen

In diesem Abschnitt soll auf die (nicht unbedingt mit Benford's-Law konforme) Verteilung der Mantissen bzw. der ersten signifikanten Ziffern eingegangen werden. Ziel ist dabei eine Erklärung für das (Nicht-)Auftreten von Benford's-Law zu geben. Vergleichbare Analysen wurden schon von LEEMIS U. A. durchgeführt, wobei für einige Verteilungen bei bestimmten Parameterkonstellationen eine sehr gute Anpassung an Benford's-Law nachgewiesen werden konnten (Leemis u. a., 2000). Aber auch dort wurde schon darauf hingewiesen, dass die Anpassung stark von der Wahl der Parameter abhängt.

Folgende Vermutungen sind dazu zu überprüfen:

1. Nicht jede Verteilung hat eine mit Benford's-Law konforme Mantissenverteilung.
2. Nicht jede Verteilung besitzt eine monoton fallende Mantissenverteilung.
3. Die höchste Wahrscheinlichkeit weist zumeist diejenige erste Ziffer auf, welche mit der ersten signifikanten Ziffer des Modalwerts identisch ist.
4. Mit steigender Varianz werden die Mantissenverteilungen der Benford'schen optisch ähnlicher.
5. Linksschiefe Verteilungen haben eine linksschiefe Mantissenverteilung und rechtsschiefe Verteilungen haben eine eher rechtsschiefe Mantissenverteilung der ersten signifikanten Ziffern.

Dazu werden Simulationen durchgeführt, welche zunächst den Einfluss der Parameter auf die Mantissenverteilung untersuchen. Um sinnvolle Ergebnisse bei der auf Simulationen basierten Untersuchung der Mantissenverteilungen erhalten zu können, muss die Anzahl der simulierten Zahlen n ausreichend groß gewählt werden. Mit $n = 20000$ ist dieser Wert derart gegeben, dass eine Abweichung von mindestens 0,1 Prozentpunkten an einer Stelle der Erste-Ziffer-Verteilung höchstens mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,6% auftreten kann.

Da der Umfang der gemachten Simulationen den Rahmen dieses Berichts sprengen würde, sollen nur einige der Ergebnisse hier dargestellt werden.

In Abbildung 3.3 erkennt man deutlich, dass die Abweichungen von der Benford'schen Verteilung unter bestimmten Bedingungen sehr groß sein können. Aus der in Abbildung 3.4 dargestellten Verteilung der ersten signifikanten Ziffern der Lognormalverteilung kann man leicht

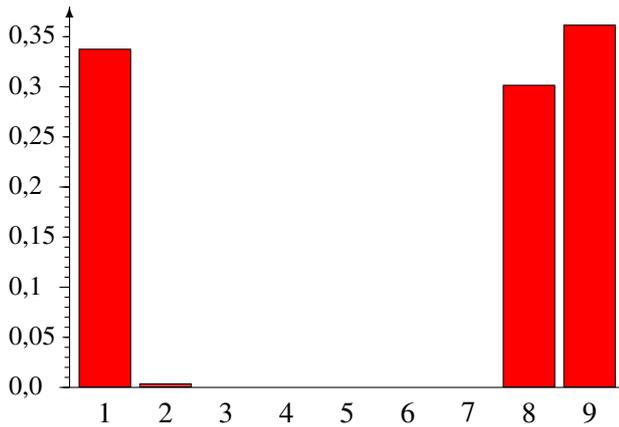


Abb. 3.3: Erste signifikante Ziffern einer Paretoverteilung mit Erwartungswert 10 und Varianz 3

die dritte Hypothese generieren, denn der Modalwert der Lognormalverteilung mit dem Erwartungswert 6 und der Varianz 2 beträgt ungefähr 5,5. Auch bei der Gammaverteilung ergibt sich ein ähnliches Bild, wobei hier auf Grund der größeren Varianz der genannte Effekt nicht so ausgeprägt ist (vgl. Abbildung 3.5).

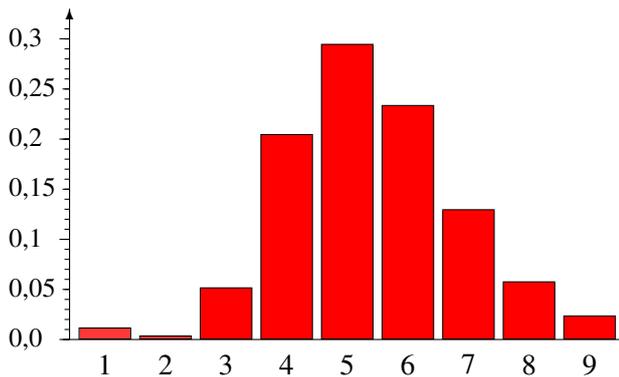


Abb. 3.4: Erste signifikante Ziffern einer Lognormalverteilung mit Erwartungswert 6 und Varianz 2

Insgesamt konnten in den gemachten Simulationen alle genannten Hypothesen unterstützt werden (Dlugosz (2004)).

Generell scheint mit wachsender Variabilität der Zufallsvariablen auch die Ähnlichkeit zu Benford's-Law bei der Verteilung der ersten Ziffer zu steigen (vgl. dazu auch Leemis u. a., 2000).⁷ Diese Ergebnisse motivieren die Formulierung des Satzes 3.17.⁸

Satz 3.17 (Beweis siehe Anhang A)

Sei X eine Zufallsvariable mit einer stetigen Wahrscheinlichkeitsdichte mit existierender Varianz $\sigma^2 \leq \mathbb{E}(X) > 10$. Weiter sei k die erste Ziffer von $\mathbb{E}(X)$. Dann gilt:

Die Wahrscheinlichkeit der Ziffernmengenge $\{k - 1, k, k + 1\}$ der zugehörigen Erste-Ziffer-Verteilung beträgt mindestens $1 - k \cdot 10^{-1}$. (Die Mengen $\{k - 1, k, k + 1\}$ sind dabei als Abschnitte auf

⁷ Für die Lognormalverteilung kann man zeigen, dass mit $\sigma^2 \rightarrow \infty$ Benford's-Law gilt (Rodriguez, 2004b).

⁸ Beweise zu den Sätzen dieser Arbeit befinden sich im Anhang A.

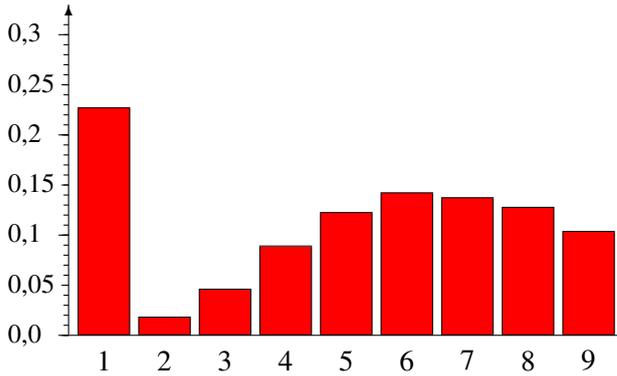


Abb. 3.5: Erste signifikante Ziffern einer Gammaverteilung mit Erwartungswert 8 und Varianz 9

Ziffern- menge	Wahrscheinlichkeit nach BL	min. Wert nach Sätzen 3.17 und 3.19			
		$FSD(\mathbb{E}(X))$	$\mathbb{E}(X) < 100$	$10 < \mathbb{E}(X) < 100$	$\sigma_X < \frac{\mathbb{E}(X)}{10}$
{9, 1, 2}	0,523	1	0,9	0,99	0,99
{1, 2, 3}	0,602	2	0,8	0,98	0,96
{2, 3, 4}	0,398	3	0,7	0,97	0,91
{3, 4, 5}	0,289	4	0,6	0,96	0,84
{4, 5, 6}	0,243	5	0,5	0,95	0,75
{5, 6, 7}	0,204	6	0,4	0,94	0,64
{6, 7, 8}	0,176	7	0,3	0,93	0,51
{7, 8, 9}	0,155	8	0,2	0,92	0,36
{8, 9, 1}	0,398	9	0,1	0,91	0,19

Tab. 3.1: Wahrscheinlichkeiten der Ziffernmengen $\{k - 1, k, k + 1\}$ nach Benford's-Law im Vergleich zu den im Satz 3.17 bzw. Satz 3.19 ermittelten

einem geschlossenen Ring zu betrachten, d. h. im Fall $k = 1$ gilt $k - 1 = 9$ und im Fall $k = 9$ ist $k + 1 = 1$.)

Bemerkung 3.18

Insbesondere folgt aus Satz 3.17, dass Verteilungen mit einem Variationskoeffizienten kleiner 1 (d. h. die Varianz ist kleiner als der Erwartungswert) nicht Benford's-Law folgen können, denn für die Mengen $\{k - 1, k, k + 1\}$ gilt die Tabelle 3.1.

Diese Aussage lässt sich mit folgendem Satz für große Werte von $\mathbb{E}(X)$ noch verfeinern:

Satz 3.19 (Beweis siehe Anhang A)

Sei X eine Zufallsvariable mit einer stetigen Wahrscheinlichkeitsdichte mit existierender Standardabweichung $\sigma \cdot 10 \leq \mathbb{E}(X)$. Weiter sei k die erste Ziffer von $\mathbb{E}(X)$. Dann gilt:

Die Wahrscheinlichkeit der Ziffernmenge $\{k - 1, k, k + 1\}$ der zugehörigen Erste-Ziffer-Verteilungen beträgt mindestens $1 - \left(\frac{k}{10}\right)^2$. (Die Mengen $\{k - 1, k, k + 1\}$ sind dabei als Abschnitte auf einem geschlossenen Ring zu betrachten, das heißt im Fall $k = 1$ gilt $k - 1 = 9$ und im Fall $k = 9$ ist $k + 1 = 1$.)

3.4 Empirische Befunde für Benford's-Law

Prinzipiell können alle Beispiele für die Anwendung von Benford's-Law (vgl. Abschnitt 3.5) auch als empirische Untersuchungen der Gültigkeit desselben gelten. Allerdings würde dies voraussetzen, dass die Daten unverfälscht sind, was bei den meisten Anwendungsfällen nicht sichergestellt werden kann.

Eine dieser Ausnahmen ist die Arbeit von DE CEUSTER U. A., in der sie zeigen, dass es keine der von vielen anderen Autoren vermuteten psychologischen Barrieren auf den Aktienmärkten gibt (Scott, Fasli, 2001). Dazu müssen sie lediglich die Annahme der Gleichverteilung der ersten Ziffern durch Benford's-Law ersetzen. Den Änderungen an den Aktienkursen liegt auf Grund der Renditeüberlegungen der Marktteilnehmer eher ein multiplikativer als ein additiver Prozess zugrunde. Benford's-Law kann daher gerechtfertigterweise als Referenzverteilung angenommen werden.

Ohne theoretische Fundierung hat BENFORD eine empirische Untersuchung vorgestellt, welche zu seinem Gesetz geführt hat (Benford, 1938). Der „Datensalat“, den er zusammengetragen hat, ist von SCOTT, FASLI ein weiteres Mal untersucht worden. Diese zerlegten den Datensatz nach seinen Quellen und fanden teilweise stark von Benford's-Law abweichende Erste-Ziffer-Verteilungen (Scott, Fasli, 2001). Sie untersuchten darüber hinaus verschiedene weitere Datenquellen (Fließmengen in Flüssen, Einwohnerzahl und Fläche der Länder der Erde, Klimatische Daten, Pro-Kopf-Kriminalfälle in Boston u. a.). Dabei wiesen landwirtschaftliche Kennzahlen wie Ackergröße, Erntemenge etc. die größte Nähe zu Benford's-Law auf. Sie untersuchten ebenfalls Finanzdaten in Form des Dow-Jones, Privatkrediten und Konsumaufwendungen. Von den insgesamt 230 untersuchten Datensätzen erfüllten allerdings nur 29 das 5% Signifikanzniveau für Konformität mit Benford's-Law (Scott, Fasli, 2001, S. 7).

BUSTA, SUNDHEIM führten als erste Untersuchungen zur Konformität von Angaben in amerikanischen Steuererklärungen der Jahre 1982/83 mit Benford's-Law durch (Busta, Sundheim, 1992b). Sie fanden auf der ersten Ziffer eine recht gute Konformität mit Benford's-Law, auf der zweiten und dritten Ziffer allerdings eine relative Überrepräsentanz der Ziffern 0 und 5, was vermutlich auf Rundungen zurückzuführen ist (Busta, Sundheim, 1992b, S. 15).

NIGRINI betrachtete analoge Daten für die Jahre 1985/88; allerdings nur die gezahlten und empfangenen Zinszahlungen (Nigrini, 1996). Bei diesen Angaben konnte in einer Studie aus Holland⁹ eine hohe Konformität mit Benford's-Law auf den ersten beiden Ziffern festgestellt werden, wobei die Angaben mit Hilfe direkter Mitteilungen der beteiligten Banken an die Finanzbehörden überprüfbar waren (Nigrini, 1996, S. 75). Nach NIGRINI folgen die entsprechenden Angaben auf den US-Steuererklärungen jedoch nicht Benford's-Law. Er führt dies auf fehlerhafte Angaben der Steuerpflichtigen zurück, was auf Grund fehlender (Steuer-)Mitteilungen der Banken jedoch nicht nachprüfbar ist.

POSCH hat Steuererklärungen eines Finanzamts aus Nordrhein-Westfalen für das Jahr 2001 *sachbereichsweise* auf Benford's-Law untersucht und dabei unterschiedliche Ergebnisse erhalten. Übereinstimmungen mit Benford's-Law ergaben sich dabei nur im Sachbereich 18 (Mantelbogen). Insbesondere der Sachbereich 47/48 (Einkünfte aus nicht-selbständiger Arbeit) ist

⁹ Leider findet sich in der Studie Nigrini (1996) keine exakte Quellenangabe.

nicht logarithmisch verteilt, obwohl hier aus sachlichen Gründen (Arbeitgebermeldungen) keine Manipulationen zu erwarten sind (Posch, 2004a,b).

Keine der bisher publizierten Studien analysiert die spezielle Datenstruktur, welche die Tagesumsatzmeldungen beschreibt. Durch die additive Struktur der Daten ist jedoch anzunehmen, dass sie nicht Benford's-Law genügen. Die empirischen Untersuchungen deuten durchaus darauf hin, dass es ein (vom konkreten Fall abhängiges) Erste-Ziffer-Gesetz gibt, welches stetig und streng monoton fallend ist. Daher wurde in der Literatur versucht, Benford's-Law mit (mindestens) einem Parameter zu versehen (Rodriguez, 2003; Hürlimann, 2003, 2006). Die gewonnene Flexibilität bei der Wahl der Hypothese scheint empirisch zwar gerechtfertigt, eine theoretische Begründung ist jedoch weder für die zugrunde liegende Annahme der Monotonie noch der Unimodalität möglich; im Gegenteil, sie lassen sich sogar widerlegen (vgl. Abschnitt 3.3).

3.5 Eignung der Ziffernanalyse auf Basis der ersten Ziffern für die Betrugsaufdeckung in Daten der Finanzbehörden

Auch wenn Benford's-Law als eine Art „Naturgesetz für Zahlen“ nur in speziellen Situationen theoretisch zu rechtfertigen ist, gibt es in der wissenschaftlichen Literatur viele Anwendungsbeispiele, in denen Benford's-Law eingesetzt wurde.

Im betriebswirtschaftlichen Kontext gibt es zahlreiche Arbeiten im Bereich der Wirtschaftsprüfung (Albrecht u. a., 2000; Albrecht, Albrecht, 2002; Amershi, 2000; Busta, Weinberg, 1998; Ettredge, Srivastava, 1999; Green, Choi, 1997; Knechel, 1986, 1988; Kumar, Bhattacharya, 2002; McKee, 2006; Nigrini, Mittermaier, 1997), der internen Revision (Nigrini, 2000; Quick, Wolz, 2003) und der Finanzierung (insbesondere Aktienmarktanalysen) (Burke, 2001; De Ceuster u. a., 1998; Doucouliagos, 2004). Ein Großteil der Arbeiten sind jedoch dem Gebiet der Steuerprüfung zuzurechnen (Busta, Sundheim, 1992a; van Caneghem, 2004; Carslaw, 1988; Cleary, Thibodeau, 2005; Christian, Gupta, 1993; Durtschi u. a., 2004; Nigrini, 1996; Niskanen, Keloharju, 2000; Skousen u. a., 2004; Thomas, 1989; Watrin u. a., 2008).

Weitere Anwendungen finden sich in der Psychologie, Numerik, bei der Sicherstellung der Sicherheit von Computer- und Telekommunikationsnetzwerken, den Naturwissenschaften, der Theologie und bei der Überprüfung von Forschungsergebnissen (siehe Schäfer u. a., 2004; Hürlimann, 2006; Diekmann, 2007; Tödter, 2009, etc.).

Benford's-Law ist nicht die einzige Möglichkeit, wie die ersten Ziffern von Zahlen verteilt sein können. Weitere Möglichkeiten ergeben sich prinzipiell durch die Verwendung von allgemeineren Erste-Ziffer-Gesetzen. Simulationen zeigen jedoch, dass es keine allgemeinen Prinzipien für die Verteilung der ersten Ziffern gibt. Dies gestaltet eine Überprüfung von Datensätzen im Rahmen der Ziffernanalyse auf Basis der ersten Ziffern. Der Einsatz von Benford's-Law zur Betrugserkennung in Tagesumsätzen mit Hilfe der ersten Ziffern ist derzeit nicht zu rechtfertigen.

4 Letzte Ziffern

Da es — wie gesehen — schwer fällt, eine verbindliche Erste-Ziffer-Verteilung zu bestimmen, sind andere als die ersten Ziffern als Basis für die Analyse vorgeschlagen worden (Mosimann u. a., 1995; Nigrini, Mittermaier, 1997; Nigrini, 2000; Mosimann u. a., 2002). Insbesondere wurden weitere Ziffern der Mantisse — inklusive ihrer Kombinationen — als auch bestimmte (Ziffern-)Positionen relativ zum Dezimaltrennzeichen vorgeschlagen. Hierbei hat sich (aus Anwendersicht) insbesondere die letzte Ziffer vor dem Dezimaltrennzeichen als robust erwiesen.¹⁰

Während die „letzte“ Ziffer für natürliche Zahlen intuitiv definiert ist, ist dies für reelle Zahlen a-priori unklar. Zwei verschiedene Konzepte sind denkbar: 1) Betrachtung der k -ten Stelle der Mantisse mit $k \rightarrow \infty$ und 2) Betrachtung einer bestimmten, festen Position innerhalb der Zahl; z. B. die Stelle direkt vor dem Dezimaltrennzeichen.

4.1 Gleichverteilung der letzten Ziffern von reellen Zahlen

Zunächst sei eine Mantissen betrachtet. In diesem Rahmen werden die Ziffern im Limes der Mantisse als „letzte“ Ziffern verstanden; konkret also die Verteilung von $\lim_{n \rightarrow \infty} m_n(X)$. Es kann gezeigt werden, dass diese letzten Ziffern asymptotisch unabhängig und identisch gleichverteilt sind (Hill, Schürger, 2005). Dieses Resultat kann auf Abschnitte der Mantisse verallgemeinert werden:

Satz 4.1 (Dlugosz, Müller-Funk 2009, Theorem 1)

Sei $X > 0$ eine Zufallsvariable mit Verteilung F und stetiger Dichte $f = F'$. Dann gilt für alle $\ell > 1$ und $1 \leq k_r < b$ ($1 \leq r \leq \ell$):

$$P(m_n(X) = k_1, \dots, m_{n+\ell-1} = k_\ell) \rightarrow_{n \rightarrow \infty} b^{-\ell}$$

Die Aussage kann auf verschiedenste Weise ergänzt werden. Beispielsweise kann man auch zeigen, dass unter der Lipschitz-Annahme für f die Konvergenzgeschwindigkeit in der Größenordnung $O(n^{-1})$ liegt.

Verteilung der letzten Ziffer vor dem Dezimaltrennzeichen von ausgewählten klassischen Verteilungen

In der Anwendung wird man sich eher für bestimmte, „in der Mitte“ der Mantisse liegende Positionen interessieren, da reale Zahlenmengen keine sehr langen nicht-trivialen Mantissen aufweisen. Als erstes Beispiel dient die letzte Ziffer vor dem Dezimaltrennzeichen.

¹⁰ Diese Ziffernposition wird bei der Steuerprüfung durch die Finanzbehörden unter dem Namen „Chi-Quadrat-Test“ eingesetzt. Sie ist seltener als die Cent-Ziffern von Rundungen betroffen und daher vergleichsweise robust.

Sei F also eine beliebige positive Verteilungsfunktion. Zu bestimmen sind dann die Abschnitte

$$\sum_{k \in \mathbb{N}_0} \int_{k \cdot 10 + d}^{1 + d + k \cdot 10} F(x) dx \quad \forall d \in \{0, \dots, 9\} \quad (4.1)$$

Leider ist diese unendliche Summe nicht immer einfach algebraisch zu bestimmen. Daher müssen diese alternativ mit Hilfe von Simulationen approximiert werden.

Simulationen

Dazu werden $n = 5.000$ unabhängig identisch verteilte Zufallsvariablen der Verteilung F mit einem Erwartungswert im Intervall $\mu \in (-100, 100)$ (F positiv für ganz \mathbb{R}) bzw. $\mu \in (1, 200)$ (F positiv nur für $\mathbb{R}^{>0}$) und Standardabweichungen im Intervall $\sigma \in (1, 21)$ simuliert und deren letzte Ziffer bestimmt. Anschließend wird ein Plot angefertigt, in dem auf der Parameterebene mit Graustufungen die Wahrscheinlichkeit (p -value) einer Abweichung von der unterstellten Gleichverteilung dargestellt wird. Als Test auf Gleichverteilung wird der bereits erwähnte χ^2 -Anpassungstest verwendet.¹¹

Die Idee dazu ist ziemlich einfach:

1. Wahl der stetigen Verteilung für die Umsätze.
2. Prüfen der Gleichverteilung auf der letzten Ziffer für plausible Parameterkombinationen.

Leider ist die Auswahl interessanter stetiger Verteilungen nicht trivial. Allein die Frage, ob die Verteilung unimodal ist oder nicht, wird schon problematisch, denn Unimodalität scheint praxisfern. Beispielsweise ist eine Unterscheidung der Umsätze in Arbeits- und Feiertagsumsätze plausibel, was durch die Mischung zu einer bimodalen Verteilung führen würde. Generell ist die Identität der Parameter über die Tage hinweg allerdings nicht erforderlich. Denn solange für alle Komponenten der Mischverteilung die Gleichverteilung auf der letzten Ziffer gegeben ist, gilt diese auch für deren Mischverteilung.

Im folgenden wird nun demonstriert, dass bei drei wichtigen zweiparametrischen Verteilungen ((Log-)Normalverteilung, Gammaverteilung) in dem praxisnahen Parameterbereich (d. h. für ausreichend große Erwartungswert und Varianz) eine Gleichverteilung der letzten Ziffer vorliegt.

Bei den rechten Grafiken sind jeweils auf der x -Achse die Varianz und auf der y -Achse der Erwartungswert der Verteilung abgetragen. Eingezeichnet sind dann die p -values des χ^2 -Anpassungstests auf Gleichverteilung für die letzte Ziffer vor dem Dezimaltrennzeichen, wobei eine dunkle Färbung Ablehnung der Hypothese hindeutet (kleine p -values).

¹¹ Vergleiche Kapitel 5 zur besonderen Eignung dieses Tests in diesem Fall.

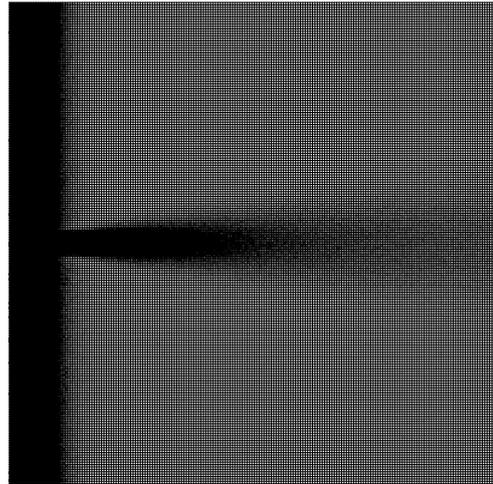
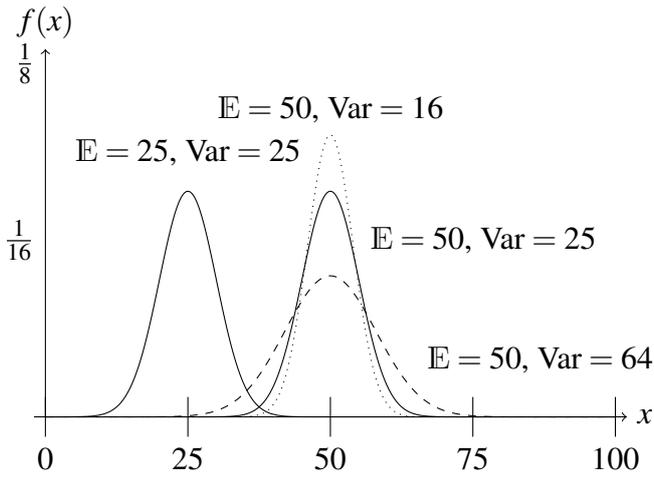


Abb. 4.1: Normalverteilung und ihre Bereiche mit Gleichverteilung auf der letzten Ziffer vor dem Dezimaltrennzeichen

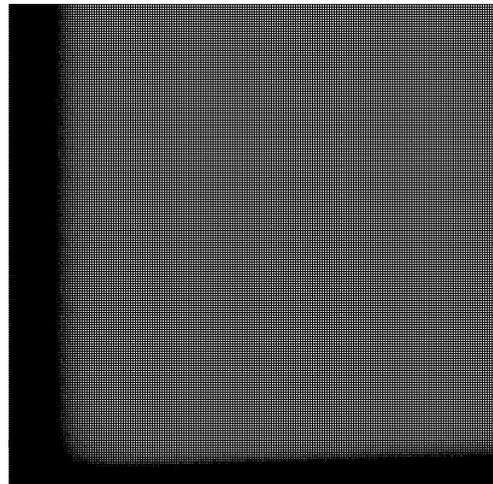
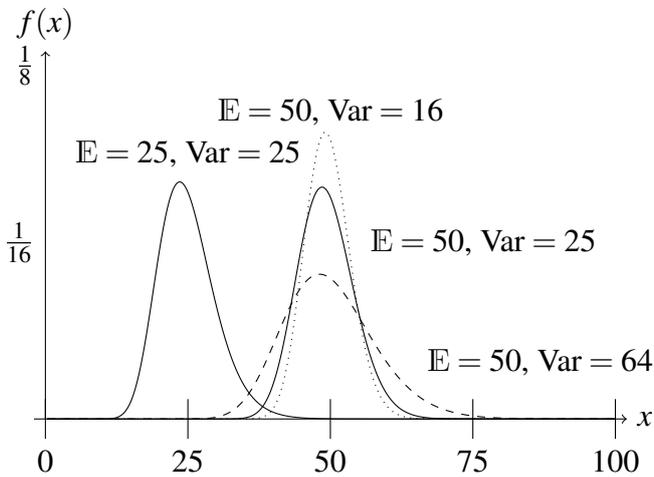


Abb. 4.2: Lognormalverteilung und ihre Bereiche mit Gleichverteilung auf der letzten Ziffer vor dem Dezimaltrennzeichen

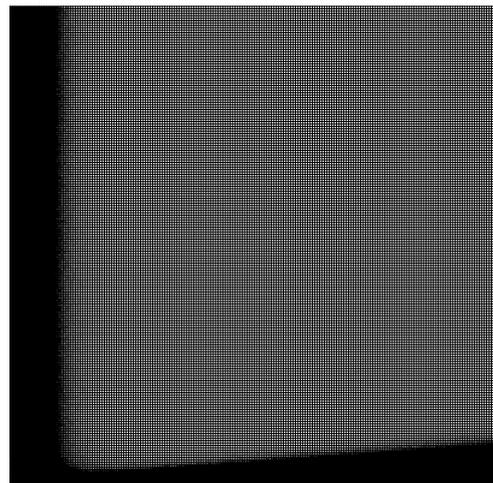
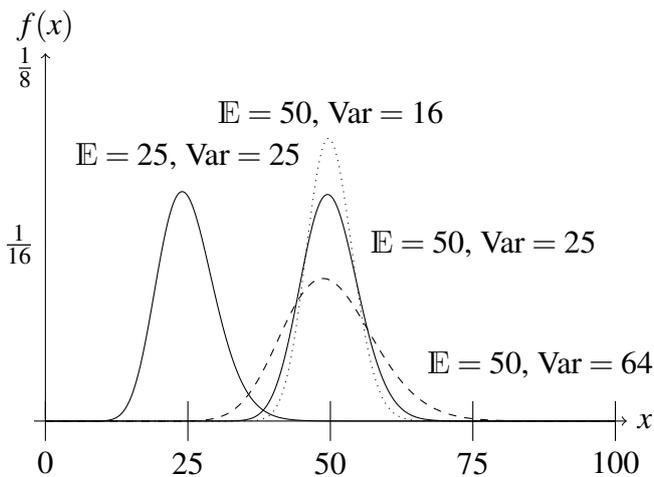


Abb. 4.3: Gammaverteilung und ihre Bereiche mit Gleichverteilung auf der letzten Ziffer vor dem Dezimaltrennzeichen

In den aufgeführten Beispiele erkennt man deutlich, dass Wahrscheinlichkeit für eine Gleich-

verteilung auf der letzten Ziffer vor dem Dezimaltrennzeichen sowohl mit der Streuung als auch dem Erwartungswert ansteigt.

Diese Resultate besitzen lediglich eine begrenzte Aussagekraft, da ein allgemeiner Beweis für die Gleichverteilung der letzten Ziffern für Verteilungen mit bestimmten (plausiblen und dennoch praxisrelevanten) Annahmen ein weitaus besseres Resultat darstellen würde. Die Gleichverteilung auf der letzten Ziffern kann also, wie die Simulationen gezeigt haben, nicht generell für alle Parameterkombinationen einer Verteilung erreicht werden. Dies bedeutet, dass zumindest einige Anforderungen an die ersten Momente zu stellen sind, was deren Größe bzw. Verhältnisse zueinander betrifft.

4.2 Gleichverteilung der letzten Ziffer für Summen von natürlichen Zufallsvariablen

In diesem Abschnitt wird nun die letzte Stelle von natürlichen Zahlen betrachtet. Im Gegensatz zu der unhandlichen Limes-Definition ist die Definition der „letzten“ Ziffer für ganze Zahlen weitaus intuitiver.

Entstamme die zu untersuchende Zahlenfolge $X_i \in \mathbb{N}$ folgendem Bildungsschema: Seien $X_{ij} \in \mathbb{N}$ unabhängig identisch verteilte Zufallsvariablen (z. B. einzelne Umsätze j im Laufe eines Tages i). Die Folge $X_i \in \mathbb{N}$ ergibt sich nun als Rand dieser Zahlenfolge,

$$X_i = \sum_j X_{ij} , \quad (4.2)$$

kann also z. B. als Tagesumsatz interpretiert werden. Die Beschränkung auf ganzzahlige Werte stellt für die praktische Anwendung, da Geldwerte auch in der kleinsten Einheit der Währung (z. B. Euro-Cent) angegeben werden können, keine Einschränkung dar.

Für eine derartige Zahlenfolge gilt:

Satz 4.2 (Dlugosz, Müller-Funk 2009, Theorem 2)

Seien X_i unabhängig identisch verteilte Zufallsvariablen über \mathbb{N} und $i \in \{0, \dots, n\}$ mit $n \in \mathbb{N}$. Weiter beschreibe $d_1^{(|Z|)}(X_i)$ die letzte Ziffer der Zufallsvariable X_i bezüglich der Darstellung in einem Zahlensystem mit $|Z|$ Ziffern.

Falls

1. zunächst

- $P(d_1^{(|Z|)}(X_i) = z) \neq 0$ für ein $z \in Z$ mit $\text{ggT}(z, |Z|) = 1$ oder
- $P(d_1^{(|Z|)}(X_i) = z_1) \neq 0 \neq P(d_1^{(|Z|)}(X_i) = z_2)$ für $z_1, z_2 \in Z$ und $z_1 \neq z_2$ mit $\text{ggT}(z_1 + z_2 \text{ mod } |Z|, |Z|) = 1$

2. und dann noch

- $P(d_1^{(|Z|)}(X_i) = 0) \neq 0$ oder
- $P(d_1^{(|Z|)}(X_i) = z_1) \neq 0$ und $P(d_1^{(|Z|)}(X_i) = z_2) \neq 0$ für $z_1, z_2 \in Z$ mit $z_1 \neq z_2$ und $\text{ggT}(|z_1 - z_2|, |Z|) = 1$,

so gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left(d_1^{(|Z|)} \left(\sum_{i=0}^n X_i \right) = z \right) = \frac{1}{|Z|} \quad (4.3)$$

Konkreter kann man im Fall $|Z| = 10$ leicht sehen, dass dieses Resultat die gesuchte Referenzverteilung für die letzten Ziffern liefert:

Korollar 4.3 (Beweis siehe Anhang A)

Seien X_i unabhängig identisch verteilte Zufallsvariablen über \mathbb{N} und $i \in \{0, \dots, n\}$ mit $n \in \mathbb{N}$. Weiter beschreibe $d_1(X_i)$ die letzte Ziffer der Zufallsvariable X_i bezüglich der Darstellung in einem Zahlensystem mit 10 Ziffern ($Z = \{0, \dots, 9\}$).

Falls

1. zunächst

- $P(d_1(X_i) = z) \neq 0$ für $z \in \{1, 3, 7, 9\}$ oder
- $P(d_1(X_i) = z_1) \neq 0$ und $P(d_1(X_i) = z_2) \neq 0$ für $z_1, z_2 \in Z$ mit $z_1 \neq z_2$ für z_1, z_2 mit

z_1	2	4	5	5
z_2	5	5	6	8

2. und dann noch

- $P(d_1(X_i) = 0) \neq 0$ oder
- falls es z_1, z_2 mit $P(d_1(X_i) = z_1) \neq 0 \neq P(d_1(X_i) = z_2)$ und $z_1 \neq z_2$ mit

z_1	1	1	1	2	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6	7	8
z_2	2	4	8	3	5	9	4	6	5	7	6	8	7	9	8	9

so gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left(d_1 \left(\sum_{i=0}^n X_i \right) = z \right) = \frac{1}{10} \tag{4.4}$$

Damit ergibt sich ein klarer Kriteriensatz für die asymptotische Gleichverteilung der letzten Ziffern. Dazu ist lediglich eine Liste mit den möglichen Endziffern von Einzelumsätzen (z. B. eine Preisliste) notwendig.

Der Beweis zu Satz 4.2 ergibt sich über die stationäre Verteilung einer homogenen Markoffkette. Unter den genannten Voraussetzungen bleibt nur noch die Frage offen, nach wie vielen Übergängen, d. h. für die Praxis nach wie vielen Transaktionen von einer Gleichverteilung der letzten Ziffer ausgegangen werden kann. Dies hängt von den Wahrscheinlichkeiten der verschiedenen Endziffern ab (Dlugosz, Müller-Funk, 2009).

Generalisierung der Resultate auf weitere „letzte“ Ziffern

In der Realität werden Preislisten häufig in der letzten Ziffer von der 8, 9 oder der 0 und der 5 dominiert. Die Praxis reagiert darauf mit der Betrachtung der letzten ganzen Euro (DM) Ziffer (Drüen, 2004; Blenkers, 2003). Offensichtlich sind die Ergebnisse des vorangegangenen Kapitels auf die letzte „echte“ Ziffer beschränkt. Unter der letzten echten Ziffer sei die Ziffer an der letzten Stelle in den Zahlen verstanden, an der auch mindestens einmal eine Ziffer ungleich null auftritt. Sollte an dieser letzten echten Position keine Ergodizität für die Ziffernfolgen gegeben sein, so können die Ergebnisse aus dem vorangegangenen Kapitel nur durch Erweiterung der Betrachtung auf die letzten beiden Ziffern genutzt werden. Es ist zu erwarten, dass in diesem Fall (bei der Betrachtung der letzten beiden echten Ziffern) im Allgemeinen die Ergodizität und damit die asymptotische Gleichverteilung sichergestellt werden können, allerdings zu dem Preis einer quadratisch schlechteren Konvergenzgeschwindigkeit (Dlugosz, Müller-Funk, 2009, Theorem 7).

Dieses heuristische Vorgehen soll nun mit Hilfe der vorgestellten Resultate präzisiert und gleichzeitig verallgemeinert werden. Dazu ist wiederum zunächst die Ergodizität herzuleiten und anschließend die Konvergenzgeschwindigkeit zu betrachten.

Zunächst sei noch einmal angemerkt, dass die Betrachtung weiterer „letzter“ Ziffern nur möglich ist, falls diese auch sinnvoll und nicht-trivial definiert sind¹²; entweder schon bei den einzelnen X_{ij} oder zumindest bei den X_i . Im folgenden gehen wir davon aus, dass die entsprechenden Ziffern berechnet werden können.

Der erste Satz ist eigentlich eine Trivialität und soll nur der Vollständigkeit halber erwähnt sein.

Satz 4.4 (Dlugosz, Müller-Funk 2009, Theorem 4)

Unter den Voraussetzungen aus Satz 4.2 bei der Betrachtung der letzten Ziffer über Z , so gilt auch über $Z \times Z$, also über die letzten beiden Ziffern:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left(d_{21}^{(|Z|)} \left(\sum_{i=0}^n X_i \right) = z \right) = \frac{1}{|Z|^2} \quad (4.5)$$

Damit ergibt sich direkt (da dann jeder Zehnerblock gleich häufig ist):

Korollar 4.5

Unter den Voraussetzungen von Satz 4.4 sind auch die vorletzten Ziffern asymptotisch gleichverteilt.

Die vorletzten Ziffern werden üblicherweise erst dann berücksichtigt, wenn die Voraussetzungen von Satz 4.3 *nicht* erfüllt sind; falls also beispielsweise nicht alle möglichen Ziffern erreicht werden können (z. B. falls Einzelpreise nur auf 0 oder 5 enden, was Irreduzibilität der Übergangsmatrix impliziert).

Bemerkung 4.6

Falls ein $z \in Z \setminus 0$ gibt, so dass $P(d_1^{(|Z|)}(X) = z) > 0$, so tragen alle vorletzten Ziffern eine positive Wahrscheinlichkeit.

Dazu stellt sich die Frage, welche Formen die reduzierbare Matrix annehmen kann, ohne dass die letzte Stelle vollständig gestrichen werden kann, es also ein $z \in Z \setminus \{0\}$, so dass $P(d_1^{(|Z|)}(X) = z) > 0$.

Bemerkung 4.7

Sei A die quadratische Übergangsmatrix für die letzten Ziffern bei Addition für $|Z| = 10$. Weiter sei $I = \{i \in \{0, \dots, 9\} : v_i > 0\}$.

Falls

- $I \subset \{0, 2, 4, 6, 8\}$ oder
- $I \subset \{0, 5\}$

so ist A reduzibel.

Nun lässt sich zeigen, dass auch bei einer auf der letzten Ziffer reduzible Übergangsmatrix für die vorletzte Ziffer die Gleichverteilung ergibt:

¹² Das heißt die Zahlen müssen ausreichend groß sein, damit die k -letzte Ziffer auch in jeder Zahl enthalten ist.

Korollar 4.8 (zu Dlugosz, Müller-Funk 2009, Theorem 5)

Sei A die quadratische Übergangsmatrix für die letzten Ziffern bei Addition. Falls A wie in Bemerkung 4.7 reduzibel ist, es ein $z \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ gibt, so dass $P(d_1^{(|Z|)}(X) = z) > 0$ und A aperiodisch ist, so gilt für die vorletzte Ziffer der Summe $\sum_i X_i$

$$P\left(d_2^{(|Z|)}\left(\sum_i X_i\right) = z\right) = \frac{1}{10}. \quad (4.6)$$

In Satz 4.8 wird noch immer die Aperiodizität der Übergangsmatrix gefordert, was insbesondere auf den letzten Ziffern nicht unbedingt gegeben ist (z. B. wenn es ausschließlich 9er-Preise gibt). Dieser Fall soll in Satz 4.10 betrachtet werden. Zunächst ist allerdings anzumerken:

Bemerkung 4.9

Wenn es nur 9er-Preise gibt, werden auf der letzten Ziffer in dem rekursiven Prozess der Addition alle Ziffern durchlaufen (in der Reihenfolge 9, 8, 7 etc.); aber dieselbe Ziffer kann immer erst wieder nach exakt 10 Schritten erreicht werden. Dies nennt man periodisch mit Periode 10. Falls neben der 9 auch 5er Schritte möglich sind, ergibt sich eine Periode von 2, denn nach zwei 5er Schritten ist man wieder bei derselben Endziffer angelangt.

Korollar 4.10 (zu Dlugosz, Müller-Funk 2009, Theorem 6)

Sei A_1 die quadratische Übergangsmatrix über die letzte Ziffer und A_2 eine entsprechende Matrix über die letzten beiden Ziffern. Falls A_1 periodisch ist mit Periode $p \in P = \{2, 5, 10\}$ und falls A_2 irreduzibel ist, so gilt:

$$P\left(d_2^{(|Z|)}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = z\right) \rightarrow \frac{1}{10} \quad (4.7)$$

Kombiniert man Korollare 4.8 und 4.10, erhält man dasselbe Resultat auch für weitere vorletzte Ziffern (Dlugosz, Müller-Funk, 2009). Auch dies sind wieder nur asymptotische Aussagen, welche um Abschätzungen der Konvergenzgeschwindigkeit ergänzt werden müssen. Allerdings bleibt festzuhalten, dass die Konvergenzgeschwindigkeit in der Größenordnung von einer Potenz langsamer ist und somit die Betrachtung der „letzten“ Ziffern gegenüber den „vorletzten“ generell zu bevorzugen ist (vgl. dazu Theoreme 3 und 7 aus Dlugosz, Müller-Funk 2009).

Teil III

Abweichungsanalyse

5 Chi-Quadrat Verteilungstest

In den beiden vorangegangenen Kapiteln wurde dargestellt, in welchen Fällen für die ersten bzw. letzten Ziffern bestimmte, vorgegebene Verteilungen angenommen werden können. In diesen beiden Ansätzen zur Ziffernanalyse kann zum Vergleich von erwarteter und im konkreten Fall beobachteter Verteilung der Ziffern derselbe statistische Test angewendet werden: der χ^2 -Test.

Jeder mathematische Test besteht in seinem Kern aus einer Teststatistik, welche den Abstand zwischen Erwartung und Beobachtung quantifiziert. Im Fall des χ^2 -Tests ist es die χ^2 -Statistik. Es gibt allerdings mehr als eine Art, Distanzen zwischen Verteilungen zu berechnen. Damit stellt sich automatisch die Frage, welche Art der Distanzmessung das beste (sicherste) Urteil ermöglicht. Diese Frage lässt sich leider nur für den Fall der letzten Ziffern eindeutig klären (vgl. Abschnitt 5.1).

Wir haben in Abschnitt 4.2 gesehen, dass die Gleichverteilung der letzten Ziffern nur asymptotisch gegeben ist. Damit stellt sich die Frage, wie ggf. vorgegangen werden sollte, falls dieser Fall nicht angenommen werden kann. Es ergibt sich eine relativ leichte Möglichkeit, die Teststatistik zu korrigieren, welche allerdings zusätzliche Informationen benötigt (vgl. Abschnitt 5.2).

Seien nun $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_K)$ die absoluten Häufigkeiten bestimmter Ziffern auf Basis einer Stichprobe, welche durch unabhängiges Ziehen mit Zurücklegen aus den Ziffern $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_K)$ hervorgegangen ist. Unter Annahme der Stabilität der Wahrscheinlichkeiten für die einzelnen Ziffern erhält man die Realisierungen von unabhängig identisch multinomialverteilten Zufallsvariablen mit der Wahrscheinlichkeitsfunktion

$$f_{\mathbf{p}}(\mathbf{x}) = \frac{N!}{\prod_{k=1}^K n_k!} \prod_{k=1}^K p_k^{x_k} . \quad (5.1)$$

Sei nun die Hypothese einer bestimmten Verteilung \mathbf{p}_0 für die Ziffern zu prüfen. Die χ^2 Statistik

$$\chi^2 = \sum_{k=1}^K \frac{(E_k - O_k)^2}{E_k} = \sum_{k=1}^K \frac{(\frac{N}{p_k} - x_k)^2}{\frac{N}{p_k}} \quad (5.2)$$

bestimmt dabei die Summe der (normierten) quadratischen Abweichungen der beobachteten (O) von den erwarteten (E) absoluten Häufigkeiten. Die Normierung ist notwendig, damit sich (unabhängig von der konkreten Hypothese) die χ^2 -Verteilung als approximative Verteilung von χ^2 mit $K - 1$ Freiheitsgraden für $N \rightarrow \infty$ ergibt.

5.1 Optimalität der Chi-Quadrat-Teststatistik

Asymptotisch ist der χ^2 -Test unter der Annahme unabhängig identisch verteilter Zufallsvariablen effizient. Weitere, in der Literatur diskutierte, Teststatistiken sind asymptotisch äquivalent zur klassischen χ^2 -Teststatistik (Witting, Müller-Funk, 1995).

Bei endlichem Stichprobenumfang ist der χ^2 -Test der Beste, d. h. er besitzt die maximin Eigenschaft¹³ für den Fall gleicher Zellwahrscheinlichkeiten (Cohen, Sackrowitz, 1975). Dies ist bei einer anderen Referenzverteilung, wie beispielsweise Benford's-Law, nicht gegeben.

¹³ D. h. er hat den minimalen Fehler zweiter Art unter allen Tests mit gleichem Fehler erster Art.

Für die Bestimmung des p -Wertes des χ^2 -Tests ist die folgende Wahrscheinlichkeit in Bezug auf die empirisch ermittelte χ_x^2 -Statistik zu bestimmen (Cai, Krishnamoorthy, 2006, S. 153):

$$p(\chi_x^2) = P(X \geq \chi_x^2) = \sum_{x_1=0}^N \sum_{x_2=0}^{N-x_1} \cdots \sum_{x_{K-1}}^{N-\sum_{i=1}^{m-2} x_i} f_{\mathbf{p}}(\mathbf{x}|H_0) \mathbb{1}_{X \geq \chi_x^2} \quad (5.3)$$

Üblicherweise wird dafür die χ^2 -Verteilung mit $K - 1$ Freiheitsgraden gewählt. Da diese aber nur asymptotisch für $N \rightarrow \infty$ gilt, sollte bei kleinerem N eine andere Technik verwendet werden.

5.2 Bestimmung der Verteilung der Chi-Quadrat Statistik

Der größte Kritikpunkt am χ^2 -Test auf Verteilung ist die Bestimmung des kritischen Bereichs über diese nur approximativ gültige χ^2 -Verteilung. Approximative Techniken benötigen für valide Ergebnisse große Datenmengen, welche in diesem Fall nicht immer vorliegen (solange nur ein einzelnes Jahr betrachtet wird).¹⁴ Daher sollen Alternativen vorgestellt werden, mit denen auch bei geringer Stichprobengröße exakte Werte ermittelt werden können.

Es existieren zwei grundlegende Ansätze, um die exakte Verteilung der χ^2 -Statistik zu bestimmen:

1. Vollständige Enumeration aller Kombinationen und Addition der zugehörigen Wahrscheinlichkeiten
2. Approximative Berechnung (mit beliebiger, wählbarer Genauigkeit) durch Simulationen

Beim ersten Ansatz wächst die Zahl der aufzusummierenden möglichen Aufteilungen der N Elemente der Stichprobe auf die K Klassen exponentiell an. GOOD U. A. haben für eine Stichprobengröße von $N < 50$ rund $10^{\sqrt{N+2}-2}$ mögliche Partitionen von N bestimmt (Good u. a., 1970). Bei genauerer Betrachtung verringert sich diese Zahl jedoch, insbesondere da unter der Nullhypothese für alle Klassen die Wahrscheinlichkeit $1/K$ gilt. Sie kann nun mit folgender Formel, welche auf Euler zurückgeht, bestimmt werden (Berry u. a., 2004):

$$p(n) \approx \frac{1}{4n\sqrt{3}} \exp \left[\pi \sqrt{\frac{2n}{3}} \right] \quad (5.4)$$

Dennoch gibt es für den erwarteten Wert von $n \approx 300$ nach dieser Gleichung etwa 9,5 Milliarden Möglichkeiten, deren exakter Berechnung leider mit aktueller Hardware zu langwierig wäre. Daher sollte auf Verfahren zur Approximation der exakten Wahrscheinlichkeiten zurückgegriffen werden.

Monte-Carlo Test

Eine gut Alternative zur exakten Berechnung bietet ein Monte-Carlo Test, welcher auf der Simulation von Zufallszahlen basiert (Hope, 1968). Bevor dieses Verfahren im Zusammenhang mit

¹⁴ Der einfachste Ansatz, um insbesondere das Problem der zu frühen Ablehnung bei geringer Klassenbelegung der Nullhypothese zu korrigieren, ist die so genannte Yates-Korrektur (Yates, 1934):

$$\chi^2 = \sum_{k=1}^K \frac{(|E_k - O_k| - \frac{1}{2})^2}{E_k} = \sum_{k=1}^K \frac{(|\frac{N}{p_k} - x_k| - \frac{1}{2})^2}{\frac{N}{p_k}}$$

dem χ^2 -Test auf Verteilungshomogenität dargestellt wird, sei das Verfahren des Monte-Carlo Tests kurz vorgestellt.

Gegeben sei ein Testproblem mit Hypothese \mathbb{H} und Teststatistik T . Weiter sei eine Stichprobe vom Umfang n gegeben und die Teststatistik nehme für diese den Wert t an.

Nun werden bei einem zu prüfenden Datensatz vom Umfang n insgesamt k Stichproben mit je n Datenpunkten unter Beachtung der Nullhypothese simuliert. Für jede dieser k Stichproben wird die Teststatistik (t_i) bestimmt und die Anzahl (A) derjenigen Stichproben mit $t_i \geq t$ bestimmt.

Das Signifikanzniveau, d. h. der p -value ergibt sich dann aus

$$p = \frac{1 + A}{k + 1}$$

Mit der Anzahl der simulierten Stichproben steigt monoton auch die Güte des Tests (Hope, 1968). Offensichtlich ist diese Technik nicht auf die χ^2 -Statistik beschränkt sondern kann auch zusammen mit anderen Teststatistiken angewandt werden.

Vorteil dieser Technik ist die gute Eignung für geringe Stichprobenumfänge, bei denen eine Approximation der Verteilung der Teststatistik durch die χ^2 -Statistik nicht geeignet ist. Auf der anderen Seite hält sich aber im Gegensatz zu den exakten Methoden der Rechenaufwand in Grenzen, so dass auch relativ große Stichprobenumfänge geprüft werden können.

Korrektur der Chi-Quadrat-Teststatistik bei geringem Stichprobenumfang

In Abschnitt 4.2 haben wir gesehen, dass die Gleichverteilung auf der letzten Ziffer nur asymptotisch erreicht werden kann. Damit ist die χ^2 -Statistik für ein gegebenes n (Anzahl Transaktionen pro Tag) gegebenenfalls verzerrt. Den Einfluss der Konvergenz auf die χ^2 -Statistik kann folgendermaßen abgeschätzt werden:

Satz 5.1 (Beweis siehe Anhang A)

Sei n die minimal zu erwartende Anzahl der Übergänge und λ_ beschreibe den zweitgrößten Eigenwert der Übergangsmatrix bei Addition der letzten Ziffern. Dann gilt:*

$$|Z| \sum_z \left(p^n(z) - \frac{1}{|Z|} \right)^2 \leq \sum_{m=1}^{|Z|-1} (\lambda_*)^{2n}$$

und sei X_1, \dots, X_ℓ eine unabhängig identisch verteilte Stichprobe mit den empirischen Häufigkeiten \tilde{p} , dann gilt:

$$\chi^2 \geq |Z| \sum_z \left(\tilde{p}(z) - \frac{1}{|Z|} \right)^2 - (|Z| - 1)(\lambda_*)^{2n}$$

Sollten zusätzlich zu der Preisliste auch Information über die relativen Verkaufshäufigkeiten der Produkte (bspw. aus Warengruppenberichten oder plausiblen Annahmen über Branchenkenntnisse) verfügbar sein, kann der Wert der χ^2 -Statistik korrigiert werden.

Mit dem Resultat aus Satz 5.1 ergibt sich allerdings auch ein Hinweis auf eine mögliche Korrektur der χ^2 -Statistik:

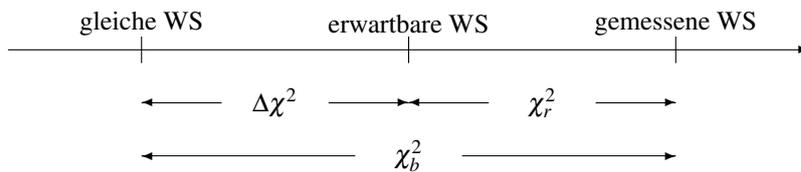
$$\Delta\chi^2 = 10 \sum_z \left(p^n(z) - \frac{1}{10} \right)^2 = \sum_{m=1}^9 |\lambda_m|^{2n}$$

mit λ_m m -ter Eigenwert der Übergangsmatrix. Dieser lässt sich mit Hilfe zusätzlicher Informa-

tionen aus bspw. einem Warengruppenbericht oder Übertragungen der relativen Verkaufshäufigkeiten für alle Produkte aus vergleichbaren Unternehmen erzielen (vgl. Abschnitt 7.1). Als Korrektur ergibt sich damit:

$$\chi^2_{wahr} \geq 10 \sum_z \left(\hat{p}(z) - \frac{1}{10} \right)^2 - \Delta\chi^2 = \chi^2_{korr} \quad (5.5)$$

Dieser Umstand lässt sich folgendermaßen veranschaulichen:



χ^2_{wahr} die wahre Abweichung von der Erwartung

χ^2_b die berechnete Abweichung

$\Delta\chi^2$ die notwendige Korrektur (abhängig von n)

Abb. 5.1: Korrektur der χ^2 -Statistik

Offensichtlich gilt für $n \rightarrow \infty$: $\Delta\chi^2 \rightarrow 0$. Auch für die vorletzte Ziffer lässt sich (analog) eine Korrektur herleiten (Dlugosz, Müller-Funk, 2009, Theorem 7).

Sollten die für die Korrektur notwendigen Informationen nicht vorliegen, kann immer noch bei „gleichmäßiger“ Verteilung der Entziffern der Preise der häufigsten Produkte eine ausreichend schnelle Konvergenz unterstellt werden.

Unabhängigkeit und Gleichheit der Verteilungen

Wesentliche Voraussetzungen für die Anwendung des χ^2 -Test sind sowohl die Gleichartigkeit der Ziffernverteilungen über die Tage als auch die Unabhängigkeit zwischen Tagen.

Diese Voraussetzungen sind für die letzten Ziffern (bei ausreichend vielen Transaktionen pro Tag) — die Sätze, bzw. Argumentationen aus Kapitel 4 zeigen dies — erfüllt.

Die ersten Ziffern indes, zeigen sowohl starke Abhängigkeitsstrukturen als auch variierende Verteilungen, beispielsweise aufgrund wochentagsbedingter Schwankungen der Umsätze. Ein erster Ansatz zur Lösung dieses Problems wurde zwar diskutiert aber nicht zufriedenstellend gelöst (Trede u. a., 2009). Die Anwendung des χ^2 -Tests im Rahmen einer Ziffernanalyse auf den ersten Ziffern ist daher — neben dem Problem der Rechtfertigung der Vergleichsverteilung (siehe Kapitel 3) — auch aus diesem Grund fragwürdig.

6 Tests auf Unabhängigkeit der letzten Ziffern

Aus der Betrachtung der psychologischen Literatur zur Fähigkeit des Menschen zufällige Zahlenfolgen zu generieren (vgl. Abschnitt 2.2) wird ersichtlich, dass manuell erzeugte Zahlenfolgen nicht unabhängig voneinander sind, d. h. aus den bereits aufgezeichneten Zahlen lässt sich eine Prognose für die Auftretenswahrscheinlichkeit der nächsten Ziffer bestimmen, welche nicht der gemeinsamen Verteilung entspricht. Mathematisch formuliert gilt also:

$$\mathbb{E}(X_{n+1}|X_1, \dots, X_n) \neq \mathbb{E}(X_{n+1}) \quad (6.1)$$

Um diesen Effekt für die Betrugserkennung nutzbar zu machen, müssen natürlich erzeugte Zufallsfolgen eine andere Abhängigkeitsstruktur aufweisen als durch Menschen erzeugte. Idealerweise sind die natürlichen Zufallsfolgen unabhängig.¹⁵

Daher wird im folgenden Abschnitt die Unabhängigkeit der betrachteten Zufallsfolge der letzten ganzen Ziffern begründet um im zweiten Teil verschiedene Testansätze zu vergleichen.¹⁶

6.1 Stochastische Unabhängigkeit der letzten Ziffer von Zufallsvariablen

Offensichtlich ist die Folge der Tagesumsätze im Jahresverlauf nicht unabhängig. Allein durch Wochenenden und jahreszeitliche Schwankungen ergeben sich variierende Erwartungen in Abhängigkeit von den vorangegangenen Umsätzen. Die geforderte stochastische Unabhängigkeit der letzten ganzen Ziffern lässt sich somit nicht aus der Unabhängigkeit der Tagesumsätze folgern, sondern muss sogar von dieser Abhängigkeitsstruktur losgelöst sein.

Dazu seien die Tagesumsätze X_n aufgefasst als stochastische Summen von B_n stochastisch unabhängigen Einzelbestellungen X_{n1}, \dots, X_{nB_n} . Die B_n sind dabei (nicht notwendig unabhängige) Zufallsvariablen mit beliebiger Verteilung über den natürlichen Zahlen:

$$X_n = \sum_{i=1}^{B_n} X_{ni} \quad (6.2)$$

Diese Modellierung erfordert lediglich stochastisch unabhängige Bestellungen von Personen, welche das Geschäft betreten X_{ni} , nicht aber die Unabhängigkeit der Anzahl dieser Personen. Damit wird die Abhängigkeitsstruktur der Tagesumsätze im Jahresverlauf auf die Anzahl der Kunden reduziert. Die einzelnen Bestellungen jedoch sind durchaus stochastisch unabhängig.¹⁷

Betrachtet man nun die letzte ganze Euro Ziffer der Tagesumsätze, so ist klar, dass ihre Verteilung zum einen durch die Verteilung der letzten ganzen Ziffern der stochastisch unabhängigen (insbesondere über Tage hinweg) Einzelbestellungen und der konkreten Ausprägung B_n abhängt. Da aber (wie im vorherigen Kapitel gezeigt), der Einfluss von B_n ab einer bestimmten Größe vernachlässigt werden kann, darf man annehmen, dass die Folge der letzten Ziffern der Tagesumsätze stochastisch unabhängig ist.¹⁸

¹⁵ Tests auf Unabhängigkeit sind leichter realisierbar als Tests auf bestimmte Abhängigkeitsstrukturen.

¹⁶ TREDE U. A. (2009) deuten Ansätze zur Überprüfung stochastisch abhängiger Beobachtungen in diesem Zusammenhang an.

¹⁷ Man könnte argumentieren, dass die Positionen einer Bestellung nicht unabhängig voneinander sind (z. B. „Currywurst mit Pommes“). Dies ist zwar korrekt, aber für die hier verfolgte Argumentation irrelevant, solange Kunden unabhängig *voneinander* bestellen.

¹⁸ Eine gegebenenfalls vorhandene Abhängigkeitsstruktur verliert sich mit wachsendem B_n .

6.2 Tests zur Prüfung der stochastischen Unabhängigkeit

Neben der klassischen statistischen Literatur zum Testen der Unabhängigkeit von Zufallsvariablen (Agresti, 1992; Freeman, Halton, 1951) finden sich auch Ansätze bei der Überprüfung zu Zufallsgeneratoren (Knuth, 1998; Marsaglia, Tsang, 2002).

Viele der in der Literatur vorgeschlagenen Tests auf Zufälligkeit haben das Ziel, Gleichverteilung und Unabhängigkeit gleichzeitig zu prüfen. Dies ist insbesondere bei der Überprüfung von Zufallsgeneratoren der Fall. Für die Ziffernanalyse, bei der — ggf. in Form von Benford's-Law — eine nicht gleichverteilte Stichprobe unterstellt werden muss, wird daher neben dem bereits in Kapitel 5 behandelte χ^2 -Verteilungstest ein Test auf Unabhängigkeit benötigt.

Weiterhin muss festgelegt werden, bei welchen Ziffernfolgen die Unabhängigkeit geprüft werden soll. Zwei Ansätze bieten sich hier an: Zunächst kann man die (vor-)letzten Ziffern verschiedener Zahlen auf Unabhängigkeit testen (vertikaler Test). Dieser Ansatz würde unterstellen, dass der manipulierte Datensatz in Listenform entstanden ist. In diesem Fall wäre zu erwarten, dass die (subjektive) Zufälligkeit der (vor-)letzten Ziffern, welche direkt untereinander stehen, vom Manipulator gesichert werden sollte. Alternativ kann man auch zwei nebeneinander stehende Ziffern innerhalb einer Zahl betrachten und deren Unabhängigkeit prüfen (horizontaler Test). Beide Varianten wurden in der Software umgesetzt.

Generelle Ansätze für Tests auf Unabhängigkeit in Zufallszahlenfolgen mit beliebiger Randverteilung

Auch hier gibt es mit dem χ^2 -Unabhängigkeitstest einen weit verbreiteten Test mit approximativ χ^2 -Verteilung der Teststatistik (Agresti, 1990), welcher ebenfalls auf der in Gleichung (5.2) beschriebenen Idee basiert. Hier werden nun für die erwarteten und die beobachteten Häufigkeiten jeweils zweidimensionale Kontingenztafeln erstellt, welche die Häufigkeiten benachbarter Ziffernkombinationen in der Zahlenreihe beschreiben.¹⁹ Im Zehnersystem ergeben sich damit 100 mögliche Kombinationen von benachbarten Letzte-Ziffer Pärchen.

Unter der Unabhängigkeitsannahme müsste sich die relative Häufigkeit jeder einzelnen Kombination multiplikativ aus den Randverteilungen ergeben:

$$P(\text{Ziffernpärchen} = (a,b)) = P(1. \text{ Ziffer} = a) \cdot P(2. \text{ Ziffer} = b)$$

Damit wären im Falle der Gleichverteilung auf der letzten Ziffer auch die Kombinationen gleichverteilt. Im Fall von Benford's-Law hingegen wäre die 1-1 Kombination weitaus häufiger zu erwarten als die 9-9 Kombination.

Da die χ^2 -Verteilung der Teststatistik erst für große Beobachtungsmengen $n \gg k$ erreicht wird und die Kontingenztafeln $k = 100$ Zellen enthalten, kann die Anwendung dieser Approximation zu großen Verzerrungen führen (vgl. auch Abschnitt 5.2).

Beim Test auf Unabhängigkeit tritt dieses Problem verstärkt auf, da sich die Beobachtungen nun nicht mehr auf 10 Kategorien sondern auf 100 verteilen. Damit entfallen von den maximal 365 Beobachtungen eines Jahres im Schnitt weniger als vier Beobachtungen auf eine bestimmte Kategorie. In Lehrbüchern werden üblicherweise mindestens 5 bis 10 Beobachtungen pro Kategorie gefordert.

FISHER schlug auch hier einen exakten Test vor (Fisher, 1970): Es kann gezeigt werden, dass unabhängig von Erhebungsschema (Poisson, multinomial oder unabhängig multinomial) die

¹⁹ Es sei zu beachten, dass nicht zwei benachbarte Ziffern innerhalb einer Zahl, sondern die entsprechenden Ziffern benachbarter Zahlen betrachtet werden.

Verteilung über den möglichen 2×2 Kontingenztafeln bedingt an ihren Randverteilungen hypergeometrisch ist (Agresti, 1992, S. 60):

$$\frac{\binom{n_{1.}}{n_{11}} \binom{n_{.2}}{n_{.1}-n_{11}}}{\binom{n}{n_{.1}}}$$

Man erkennt leicht, dass diese Statistik bei festen Randverteilungen nur vom Eintrag in der ersten Zelle n_{11} abhängt. Für den p -value des Unabhängigkeitstest müssen nun alle hypergeometrischen Wahrscheinlichkeiten für Ergebnisse, die mindestens genauso für die Abhängigkeit sprechen wie die empirisch gegebene Tafel, aufsummiert werden.

Wird dieser (diskrete) Test durch Randomisierung verstetigt, ist er der gleichmäßig beste unverzerrte Test (Tocher, 1950).

Für größere Tafeln, allgemein der Größe $I \times J$ ergibt sich die Statistik (Agresti, 1992, S. 63):

$$\frac{(\prod_i n_{i.}!) (\prod_j n_{.j}!)}{n! \prod_i \prod_j n_{ij}!} \quad (6.3)$$

Der p -value ist analog zum 2×2 Fall zu bestimmen.

Die Zahl der möglichen, verschiedenen Kontingenztafeln mit festen Randhäufigkeiten steigt neben der Zahl der Elemente auch mit der Zahl der Dimensionen der Zeilen und Spalten der Tabelle. Daher werden die Berechnungen mit steigendem n und auch mit steigenden I und J exponentiell aufwändiger. Dies kann schon bei recht kleinen Werten zu einem nicht vertretbaren Rechenaufwand führen. Um diesen so gering wie möglich zu halten, wurden eine Reihe Algorithmen entwickelt, um die Wahrscheinlichkeiten der Tafeln möglichst effizient bestimmen zu können (Mehta, Patel, 1983, 1986; Clarkson u. a., 1993). Auch kann man auf die MC-Simulation zurückgegriffen werden.

Alternative Hypothesen für kleine Stichproben

Häufig reicht die Datenmenge (trotz der exakten Berechnung der Ablehnungswahrscheinlichkeiten) nicht aus, die vorgestellten Tests in ihrer Reinform zu verwenden.²⁰ Alternativ können auch folgende, abgeleitete Hypothesen getestet werden:

- Blöcke zweier aufeinander folgender Ziffern, d. h. 0-1, 2-3, 4-5, 6-7, 8-9
Menschen könnten beim Erzeugen von Zufallszahlenfolgen geneigt sein, bei aufeinander folgenden Zahlen Ziffern gleicher Höhe zu vermeiden. In diesem Fall werden nicht alle Ziffern einbezogen, sondern Ziffern zusammengefasst. Damit ergeben sich lediglich 5 mögliche Gruppen und somit eine Kontingenztafel mit nur 25 Feldern. Umsetzung in der Software als *2block*.
- Große (5–9) und kleine (0–4) Ziffern
Bei nur zwei Gruppen fällt die Anzahl der Zellen in der Kontingenztafel auf nur noch 4, was sogar weniger sind, als beim Test auf Gleichverteilung, wo ja 10 Zellen zur Verfügung stehen. Umsetzung in der Software als *lowhigh*.
- Gerade und ungerade Ziffern

²⁰ Exakten Tests ermöglicht zwar, den p -value unverzerrt zu bestimmen, aber sie erhöhen nicht den Informationsgehalt der Daten. Daher können die Tests häufig die Nullhypothese nicht fundiert ablehnen, was in der Anwendung bei der Betrugserkennung in zu niedrige Erkennungsraten resultiert.

Menschen können auch geneigt sein, gerade und ungerade Zahlen zu mischen und somit hier unwillkürlich Strukturen einzubauen. Umsetzung in der Software als *even*.

- Differenzen (nach Rath, 1966)
RATH hatte gezeigt, dass Menschen bei geordneten Möglichkeiten (unbewusst) auf die Abstände benachbarter Ziffern achten und damit eine Abhängigkeitsstruktur erzeugen. Umsetzung in der Software als *differences*.

Der Erfolg dieser Einschränkungen auf Zifferngruppen ist von der Wahrnehmung der Menschen bzw. ihrem Verhalten beim Erzeugen von Zufallszahlenfolgen abhängig. Unter ungünstigen Umständen könnten die in der vollen Folge vorhandenen Abhängigkeiten durch die Gruppenbildung verloren gehen und somit die Aufdeckung von Strukturen und damit Unregelmäßigkeiten in den Daten verhindert werden.

Leider scheint es bislang keine Untersuchungen des menschlichen Verhaltens im Allgemeinen zu geben, so dass (weder auf Basis theoretischer Überlegungen noch mit bereits bekannten empirischen Zusammenhängen) eine Empfehlung für einen der alternativen Tests gegeben werden kann. Weitere Gruppierungen von Ziffern sind ebenfalls denkbar, beispielsweise auf Basis des optischen Erscheinungsbilds (0/8, 6/9, 1/7 etc.).

Im Rahmen der empirischen Untersuchungen werden Anhaltspunkte für die Eignung dieser (vereinfachten) Unabhängigkeitstests bei der Anwendung in der Ziffernanalyse gegeben (vgl. Kapitel 8).

Teil IV
Empirie

7 Praktischer Einsatz der Ziffernprüfung bei der Finanzverwaltung

Für den Einsatz der hier vorgestellten Tests auf Gleichverteilung bzw. Unabhängigkeit der letzten Ziffern bestimmter Daten in der Prüfungspraxis sind zwei Dinge erforderlich: geeignete Daten (vgl. 7.1) und praktikable Software (vgl. Abschnitt 7.3). Weiterhin sollten die Resultate des Tests auf Gleichverteilung und eines Tests auf Unabhängigkeit kombiniert werden, so dass eine gemeinsame Kennzahl als Entscheidungsgrundlage dienen kann (vgl. Abschnitt 7.2).

7.1 Datengrundlage

Die Anforderungen an die Daten wurden ja bereits im Zusammenhang mit den statistischen Testmethoden in den vorangegangenen Kapiteln dargestellt. An dieser Stelle soll nun einmal auf die Verfügbarkeit bzw. Schätzbarkeit der notwendigen Daten eingegangen werden. Neben den essentiellen Tagesendsalden und den Produktpreislisten, welche beide relativ leicht verfügbar sind und u. U. bereits eine ausreichende Datengrundlage bilden, kann diese um Information aus Warengruppenberichten ergänzt werden. Dies stellt einen gewissen Mehraufwand dar, welcher nur unter bestimmten Voraussetzungen gerechtfertigt ist, so bspw. falls eine geringe Zahl Einzeltransaktionen zu vermuten ist oder eine extreme Ungleichverteilung der Endziffernhäufigkeiten in der Einzeltransaktionsliste. Beide Umstände könnten nahelegen, dass die Tagesendsalden (noch) nicht gleichverteilt sind, da entweder das rekursive Schema zu kurz ist oder zu langsam konvergiert. In diesen Fällen sollten diese Zusatzinformation besorgt werden. Leider sind sie nicht in jedem Fall verfügbar, weshalb im folgenden Methoden zu deren Schätzung vorgestellt werden.

Schätzung zusätzlicher Informationen

Die (zu analysierende) Folge der Tageseinnahmen ist (durch Meldung des Steuerpflichtigen) bekannt. Mit einer Speisekarte können zudem die möglichen Endziffern und Übergänge festgelegt werden. Dagegen ist die Bestimmung der Übergangswahrscheinlichkeiten kaum möglich, da zumeist keine vollständige Auflistung der verkauften Produkt(-mengen) bzw. der Einzelpreise (z. B. in Form von Kassenzetteln) zur Verfügung stehen.

Bei einigen Betrieben können mit Hilfe einzelner Warengruppenauflistungen die fehlenden Informationen geschätzt werden. Für zukünftige Prüfungen dürfte es interessant sein, diese Warengruppenauflistungen branchenspezifisch zu sammeln, um auch bei den Betrieben, die keine Warengruppenauflistungen zur Verfügung stellen, eine Schätzung durchführen zu können.

Sollten absolut keine Werte mit Hilfe der beiden obigen Ansätze gewonnen werden können, kann auf folgende, heuristische Schätzmethode zurückgegriffen werden.

Für jeden Tag j lassen sich problemlos Grenzen für die Anzahl der Einzelpositionen N_j (und damit die Länge des rekursiven Schemas) aus dem Tagesumsatz S_j abschätzen:

$$\frac{S_j}{\max_i X_i} \leq N_j \leq \frac{S_j}{\min_i X_i} \quad (7.1)$$

Die Schätzung der benötigten Anzahl von Einzelpositionen (Anzahl von Transaktionen pro Tag) bei der gerechtfertigterweise die Gleichverteilung der letzten Ziffern angenommen werden kann, ist jedoch schwierig. Denn diese hängt direkt von den Übergangswahrscheinlichkeiten des rekursiven Schemas, also den Häufigkeiten der einzelnen Endziffern, ab (Dlugosz, Müller-Funk, 2009, Theorem 7).

Eine Möglichkeit dazu ist, die Produkte nach den Endziffern ihres jeweiligen Preises zu klassifizieren und anschließend die Verhältnisse der Klassen untereinander abzuschätzen. Beispielsweise könnte man dazu das Verhältnis der Waren in der Endziffergruppe k W_k zu der Gesamtzahl

der Waren auf dem Speisezettel W setzen. Dies entspräche einer Gleichverteilung bei den Verkäufen der einzelnen Waren.

Da dies üblicherweise nicht der Fall ist, könnte man auch ein gewichtetes Mittel nutzen, indem man die Waren nach der Häufigkeit ihres Verkaufs sortiert und in drei Kategorien A, B und C derart einteilt, dass in jeder Gruppe ein Drittel aller Verkäufe stehen (aber nicht ein Drittel der Produkte). Dann ließen sich die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten über

$$p_k = \frac{1}{3} \left(\frac{A_k}{A} + \frac{B_k}{B} + \frac{C_k}{C} \right) \quad (7.2)$$

bestimmen. Dabei beschreiben A_k, B_k, C_k jeweils die Anzahl der Produkte mit der Endziffer k in der entsprechenden Kategorie. $A < B < C$ beschreibe die Anzahl der Produkte in der jeweiligen Kategorie insgesamt.

Diese Einteilung ist natürlich stark subjektiv und sicherlich nicht trivial. Um den Einfluss, den diese Subjektivität bedingt, abschätzen zu können, sollten Sensitivitätsanalysen durchgeführt werden.

7.2 Ein kombinierter Test auf Gleichverteilung und Zufälligkeit

Von rein zufällig entstandenen Daten (letzte Ziffern) können im Gegensatz zu manuell generierten Daten zwei mathematisch erfassbare Phänomene erwartet werden:

- Die Daten sind stochastisch unabhängig.
- Die Daten sind (unter bestimmten Voraussetzungen) multinomialverteilt über 0 bis 10 mit gleichen Klassenwahrscheinlichkeiten.

Da beide Bedingungen erfüllt sein müssen, um von natürlichen Daten ausgehen zu können, wird folgende Hypothese aufgestellt: Sei mit (X_1, X_2, \dots, X_n) eine Stichprobe aus der Multinomialverteilung $\prod_{i=1}^n \mathcal{M}(\theta)$ über dem Grundraum $\{0, \dots, 9\}$ gegeben. Die Matrix $A \in \mathbb{R}^{100}$ beschreibe die Matrix der Ziffernkombinationen mit den Einträgen a_{ij} . Seien a_i und a_j die jeweiligen Randverteilungen von A .

$$\begin{aligned} \mathbb{H} : \forall_i : \theta_i &= \frac{1}{10} \wedge \forall_i \forall_j a_{ij} = a_i \cdot a_j \\ \mathbb{K} : \exists_i : \theta_i &\neq \frac{1}{10} \vee \exists_{(i,j), i,j \in \{0, \dots, 9\}} : a_{ij} \neq a_i \cdot a_j \end{aligned}$$

Hier handelt es sich bei der Stichprobe $(X_i)_i$ um die Folge der letzten ganzen Euro Ziffern, welche im Rahmen der Buchführung als Tageseinnahmen aufgezeichnet wurden.

Diese Kombination kann mit Hilfe eines Tests auf Unabhängigkeit mit fixierten Marginalverteilungen durchgeführt werden (im folgenden verkürzt als „kombinierte Hypothese“ bezeichnet²¹). Durch die t. w. allerdings nur unzureichende Füllung der Zellen ist zu erwarten, dass dieser Test nur eine geringe Kraft aufweisen würde. Um die gute Diskriminationsfähigkeit des Verteilungstests mit seinen gut gefüllten Zellen zu erhalten und den Test auf Unabhängigkeit als zusätzliches Indiz einfließen zu lassen, wird die Hypothese in zwei unabhängige Teilhypothesen zerlegt:

²¹ Bei einem gleichzeitigen Test ist für beiden Teilhypothesen derselbe Grundraum anzuwenden, d. h. falls (wie in Abschnitt 6.2 vorgeschlagen) ein verkleinerter Ereignisraum für den integrierten Unabhängigkeitstest definiert wird, so gilt dieser auch für den impliziten Verteilungstest. Dies kann zu einer schlechteren Erkennungsraten führen.

1. Test auf gleiche Klassenwahrscheinlichkeiten (vgl. Kapitel 5):

$$\begin{aligned} \mathbb{H}^{(2)} : \forall_{i \in 0, \dots, 9} \theta_i &= \frac{1}{10} \\ \mathbb{K}^{(2)} : \exists_i \theta_i &\neq \frac{1}{10} \end{aligned}$$

2. Test auf Unabhängigkeit (vgl. Kapitel 6):

$$\begin{aligned} \mathbb{H}^{(1)} : a_{ij} &= a_{.j} \forall j \in 0, \dots, 9 \\ \mathbb{K}^{(1)} : \exists_j a_{ij} &\neq a_{.j} \end{aligned}$$

Nach getrennter Durchführung der Tests müssen die p -values für eine eindeutige Entscheidung zusammengefügt werden. Dazu ist ein Verfahren zur Kombination der p -values von unabhängigen Tests erforderlich. In der Literatur finden sich zwei klassische Ansätze: Der Ansatz von FISHER (Fisher, 1970) und der von TIPPETT (Tippet, 1931). WESTBERG hat beide Verfahren hinsichtlich ihrer Power untersucht und ein adaptives Verfahren vorgeschlagen, welches die Vorteile beider Ansätze verbindet (Westberg, 1985). Dieser Ansatz wird hier verwendet.

Dieses Verfahren basiert darauf, die Wahrscheinlichkeit eines fälschlichen Ablehnens der Nullhypothese so gering wie möglich zu halten. Dazu wird eine Reihe von (gleichzeitig zu erfüllenden) Nullhypothesen $\mathbf{H}^{(1)}, \dots, \mathbf{H}^{(h)}$ gebildet und diese einzeln geprüft. Die erhaltenen p -values werden absteigend sortiert, so dass man eine Folge von h p -values mit $p^{[1]} \leq p^{[2]} \leq \dots \leq p^{[h]}$ erhält. Es wird eine Folge von h Werten $1 > a_1 > a_2 > \dots > a_h > 0$ gewählt. Für diese wird vorgeschlagen, sie nach der Formel

$$a_i = a_1 \left(1 - \frac{i-1}{h} \right)$$

zu bestimmen, wobei der Startwert a_1 als Lösung der Gleichung

$$a_1^h = a_1(1 - a_1) \left(1 - \frac{a_1}{h} \right)^{h-2}$$

zu wählen ist.

Anschließend wird der Wert m so bestimmt, dass $p_{h-m+1} < a_{h-m+1}$ und damit die Statistik

$$Z = \begin{cases} \prod_{i=h-m+1}^h \frac{p^{[i]}}{a_{h-m+1}} & m > 0 \\ 1 & m = 0 \end{cases}$$

bestimmt. Der kritische Bereich des Gesamttests ergibt ist dann aus $-2 \ln(|Z|) > \chi_{2m, \alpha/a_1}^2$. Im hier vorliegenden Fall $h = 2$ ergibt sich also mit $a_1 = 0,5$ für den p -value die Funktion:

$$p = \begin{cases} 1 & \max\{p_1, p_2\} \geq 0,5 \\ a_1(\chi_1^2)^{-1}(-2 \log(4 \min\{p_1, p_2\})) & \max\{p_1, p_2\} < 0,5 \wedge \min\{p_1, p_2\} \geq 0,25 \\ a_1(\chi_2^2)^{-1}(-2 \log(4 p_1 p_2)) & \min\{p_1, p_2\} < 0,25 \end{cases} \quad (7.3)$$

Diese Vorgehen wird im Weiteren als „kombinierte Tests“ bezeichnet. Im Gegensatz zur „kombinierten Hypothese“ sind hierbei auch unterschiedliche Aggregationslevel bei den Ausprägungen der letzten Ziffern in den beiden getrennten Teiltests möglich.

Bei der Wahl der Ziffern kann zwischen horizontaler und vertikaler Auswahl unterschieden werden. Bei der vertikalen Auswahl wird nur eine Ziffernposition betrachtet und für die Tests auf Unabhängigkeit über Zahlen benachbarter Tage hinweg geprüft. Beim horizontalen Test hingegen werden zwei benachbarte Ziffernpositionen genutzt, um sowohl Gleichverteilung auf beiden Ziffernpositionen sowie deren Unabhängigkeit zu testen.

7.3 Technische Umsetzung für die Anwendung in der Außenprüfung

Eine softwaretechnische Unterstützung der vorgestellten Verfahren sollte mit der bereits in der Außenprüfung verfügbaren Softwareinfrastruktur realisierbar sein. Als Software-Basis dient Microsoft Excel, welches auch schon im Rahmen von Benford's-Law erfolgreich eingesetzt wurde (Rose, Rose, 2003). Alternative Tabellenkalkulationsprogramme, welche ebenfalls durch frei programmierbare Makrofunktionen ergänzbar sind, können diese Aufgaben gleichwertig durchführen.

Auf den mobilen Rechnern der Außenprüfer ist standardmäßig ein Microsoft Windows Betriebssystem und eine Version des Tabellenkalkulationsprogramms Microsoft Excel verfügbar. Für dieses wurden in der Vergangenheit bereits verschiedene spezielle Makros erstellt, weshalb eine längerfristige Bindung an das Produkt zu erwarten ist.

Eine Vorlage für das Tabellenkalkulationsprogramm ist speziell für die Prüfung von Tagesend-salden auf Basis des χ^2 -Tests auf Gleichverteilung der letzten Euro Ziffer vorhanden und sollte daher lediglich um die zusätzlich zu behandelnden Aspekte erweitert werden.

Damit sind bei der Realisierung der Software folgende Punkte zu beachten:

- Integration in die existierenden Makros und Vorlagen sollte möglich sein.
- Rechenzeit sollte nicht merklich über der derzeitigen liegen.

Um diese zu erfüllen, wird die Verwendung von VisualBasic for Applications auf Basis von Microsoft Excel so weit als möglich genutzt. Visual Basic Script wurde von Microsoft in das Tabellenkalkulationsprogramm Excel integriert und ermöglicht es dem Benutzer fehlende Funktionalität zu ergänzen.

Da es sich allerdings um eine interpretierte Programmiersprache handelt, können keine größeren Berechnungen mit vertretbarem Aufwand realisiert werden. Auch fehlen Funktionen um eine Monte-Carlo Simulation in akzeptabler Zeit durchführen zu können. Daher wird zusätzlich die Statistiksoftware **R** benötigt.

R und RExcel

Die Programmiersprache **R** ist eine quell-offene Software unter der GNU (General Public License) Lizenz. Dies bedeutet, dass die Software frei verwendet werden darf, d. h. kostenlos für jegliche Verwendung (auch kommerziell) zur Verfügung steht. Sie wurde als freie Implementierung der Programmiersprache und -umgebung **S** für die statistische Datenanalyse und Erstellung von Grafiken realisiert. Die Programmiersprache **S** ihrerseits wurde in den Bell Laboratories bei AT&T entwickelt (Becker, 1984; Becker u. a., 1988; Chambers, Hastie, 1991; Chambers, 1998) und ist seit 1988 auch als kommerzielle Software „**S-PLUS**“ (Insightful Corporation, 2007) verfügbar.

R wurde ursprünglich allein für Lehrzwecke entwickelt (Ihaka, Gentleman, 1996), aber auch die starke Beteiligung der Väter von **S** demonstriert, dass **R** inzwischen weit über die reine Vermittlung von Statistikwissen hinaus angewendet wird (Hornik, Leisch, 2002). Für die weitere

Entwicklung von **R** ist der Verein „**R** Foundation for Statistical Computing“²² verantwortlich, welcher sich der Unterstützung des „**R** Project for Statistical Computing“²³ verschrieben hat. Die Vor- und Nachteile von **R** sind in LIGGES aufgeführt. Die Wichtigsten (insbesondere mit Bezug auf dieses Projekt) seien hier nochmals zusammengefasst (Ligges, 2005): Als quell-offene Software ist es jederzeit (teilweise sogar direkt von **R** aus) möglich, auf die Implementierungen der Funktionen in **R** zuzugreifen, so dass die Rechenwege jedem zugänglich und nachprüfbar sind. Damit verbunden ist auch eine äußerst geringe Fehlerrate in den bereits vorgefertigten Programmpaketen. Nachteilig ist die Konzeption als interpretierte Sprache, was in teilweise recht lange Laufzeiten von **R**-Programmen resultiert.

Häufig wird es als nachteilig empfunden, dass **R** keine eigene komfortable grafische Oberfläche zu bieten hat. Auf der anderen Seite hat dieser Umstand dazu geführt, dass es eine Reihe verschiedener Schnittstellen von **R** zu anderen Programmen mit besseren Benutzeroberflächen entwickelt wurden. Eine solche Schnittstelle wurde unter dem Namen „**R**-(D)COM“ an der Universität Wien entwickelt und in der Form eines Satzes von Makros in VisualBasic for Applications für Microsoft Excel angewandt (Baier, Neuwirth, 2007). Diese Schnittstelle darf entgeltfrei von jedermann genutzt werden.²⁴

***R** und RExcel als Basis für die Softwarerealisierung*

Da neben der Schnittstelle zu Microsoft Excel ebenfalls eine Schnittstelle zum Tabellenkalkulationsprogramm Calc aus der quell-offenen und frei verwendbaren Bürosoftware OpenOffice verfügbar ist, kann davon ausgegangen werden, dass eine Einbindung von **R**-Skripten mittelfristig für die Finanzbehörden sichergestellt werden kann. Weiterhin existieren sowohl **R** als auch „RExcel“ seit einigen Jahren und für beide Projekte ist eine Einstellung der Entwicklung derzeit unwahrscheinlich. Ein dauerhafter Einsatz ist somit möglich.

Technische Realisierung

Die technische Realisierung besteht nun also aus zwei Teilkomponenten. Aufwändigere Berechnungen sind in der Sprache **R** realisiert²⁵, da insbesondere die Monte Carlo Simulation für die Berechnung der p -values dort bereits implementiert und auch über eine eingebundene Bibliothek sehr schnell ausgeführt werden kann. Weniger aufwändige Berechnungen wurden direkt in VBA (VisualBasic for Applications), d. h. in der Microsoft Excel eigenen Makrosprache verfasst.²⁶ Teilweise wurden Funktionen aus der Komponente für **R** mit Hilfe eines Makros in Excel abgebildet, so dass diese direkt als Tabellenblatt-Funktionen zur Verfügung stehen. Diese Implementierungen basieren allerdings auf der approximativen Berechnung der p -values, so dass sie nur in Notfällen zum Einsatz kommen sollten. Sie sind daran zu erkennen, dass ihrem Namen kein „**R**“ vorangestellt ist.

Für den Endanwender stehen die folgenden Makros zur Verfügung:

- `isConvergent(Daten As Range) As Boolean`

²² <http://www.r-project.org/foundation>

²³ <http://www.r-project.org>

²⁴ Zu Details der Lizenzierung bitte die Informationen unter <http://rcom.univie.ac.at/> (Stand: 24.5.2011) beachten.

²⁵ Der Quelltext in der Programmiersprache **R** kann über die Webseite der Arbeitsberichte des Instituts für Wirtschaftsinformatik an der Universität Münster (<http://www.wi.uni-muenster.de/institut/forschen/arbeitsberichte.php>) bezogen werden.

²⁶ Der Quelltext in der Programmiersprache VBA kann ebenfalls über die Webseite der Arbeitsberichte des Instituts für Wirtschaftsinformatik an der Universität Münster (<http://www.wi.uni-muenster.de/institut/forschen/arbeitsberichte.php>) bezogen werden.

Dieses Makro prüft, ob für die Reihe der möglichen (letzten) Ziffern²⁷ Daten die Bedingungen nach Korollar 4.3 erfüllt sind.

- `DistributionTest(Daten As Range) As Double`
Dieses Makro bestimmt den p -value für den Test auf Gleichverteilung für die Reihe der (letzten) Ziffern Daten. Es ist ein reines VBA-Makro und benutzt die χ^2 -Approximation für die Berechnung des p -value.
- `RDistributionTest(Daten As Range, Optional chi2Korrektur, Optional Genauigkeit) As Double`
Dieses Makro bestimmt den p -value für den Test auf Gleichverteilung für die Reihe der (letzten) Ziffern Daten. Optional kann die Korrektur der χ^2 -Statistik angegeben werden und auch die Anzahl der Replikationen der MC-Simulation.
- `RIndependencyTest(Daten As Range, strType As String, Optional uniformDistribution, Optional Genauigkeit) As Double`
Dieses Makro bestimmt den p -value für den Test auf Unabhängigkeit für die Reihe der (letzten) Ziffern Daten („vertikal“). Falls Daten aus zwei Spalten besteht, wird statt der Abhängigkeit zwischen den letzten Ziffern zweier benachbarter Zahlen die Unabhängigkeit dieser benachbarter Ziffern der Zahl bestimmt („horizontal“). Optional können gleichverteilte Marginalien unterstellt werden, was dem integrierten Test von Unabhängigkeit und Gleichverteilung entspricht („kombinierte Hypothese“). Als Typen kann eine folgenden vereinfachten Hypothesen (Aggregationen) gewählt werden: „normal“, „2block“, „even“, „lowhigh“ (vgl. Abschnitt 6.2). Auch hier wird die MC-Simulation für die Bestimmung des p -value genutzt.
- `IndependencyTest(Daten As Range) As Double`
Dieses Makro bestimmt den p -value für den (direkten) Test auf Unabhängigkeit für die Reihe der (letzten) Ziffern Daten. Es ist ein reines VBA-Makro und benutzt die χ^2 -Approximation für die Berechnung des p -value. Es ist eine vereinfachte Version der Funktion `RIndependencyTest`, welche ausschließlich den direkten Test auf Unabhängigkeit ausführen kann. Dieser hat sich bei der empirischen Untersuchung als der aufdeckungsstärkste Test auf Unabhängigkeit erwiesen (vgl. Kapitel 8).
- `RDifferencesTest(Daten As Range, Optional uniformDistribution, Optional Genauigkeit) As Double`
Test auf Abweichungen von den bei Unabhängigkeit zu erwartenden Differenzen in Daten. Auch hier wird der p -value über eine MC-Simulation bestimmt und bei zweisepaltigen Daten die Differenz zwischen den benachbarten Ziffern genommen. Optional können die Marginalien auf eine (bei Gleichverteilung) zu erwartende Dreiecksverteilung gesetzt werden.
- `RcalculateCorrection(Daten As Range, n As Integer) As Double`
Berechnung des Korrekturterms nach der Formel (5.5).
- `calculateWestbergPvalue(p1 As Double, p2 As Double) As Double`
Kombination der p -values nach dem Ansatz von Westberg (vgl. Abschnitt 7.2).

²⁷ bspw. entnommen aus einer Speisekarte

Mit diesen Funktionen können die Einzeltests auf Gleichverteilung bzw. Unabhängigkeit durchgeführt werden. Die Tests zur „kombinierten Hypothese“ werden mit der Funktion `RIndependencyTest` bzw. `RDifferencesTest` bei gesetzter Binäroption `uniformDistribution` durchgeführt. Die p -values der Einzeltests können mit Hilfe der Funktion `calculateWestbergPvalue` kombiniert werden.

8 Erste empirische Resultate

Auch wenn die in dieser Arbeit entwickelte Methodik theoretisch durchaus vielversprechend ist, können die gemachten Annahmen nur im Rahmen einer größeren empirischen Studie auf ihre Plausibilität und Realitätsnähe untersucht werden. Im Idealfall sollte es möglich sein nicht nur die Wahrscheinlichkeit für eine fehlerhafte Verdächtigung einer Datenreihe (α -Fehler des Tests) anzugeben, sondern auch dessen Kraft, d. h. die Wahrscheinlichkeit, dass eine manipulierte Reihe übersehen wird (β -Fehler).

Dazu werden Datenreihen benötigt, bei denen bekannt ist, ob diese einem natürlichen Prozess entstammen oder manipuliert wurden. Eine mögliche Quelle für derartige Datenreihen sind die bei einer Durchsuchung durch die Steuerfahndung beschlagnahmten Unterlagen. Manchmal haben die Finanzbehörden bei einer Durchsuchung das besondere Glück, eine zweite unverfälschte Buchführung vorzufinden, in welcher ein „Steuervermeider“ seine tatsächlichen Einnahmen (und ggf. auch Ausgaben) festgehalten hat. In diesem Fall lassen sich die realen und die gemeldeten Datenreihen direkt vergleichen.

Die folgenden Beispiele dienen eher der Illustration der Technik als der Verifizierung der Methodik. Auch wenn Kennzahlen zur Aufdeckungsquote auf Basis der Beispiele präsentiert werden, können diese doch nur vorläufig sein. Weitere empirische Belege sind erforderlich, um die Tauglichkeit dieser Form der Ziffernanalyse für die Steuerprüfungspraxis zu bestätigen.

8.1 Einige Einzelfälle

Einige der zur Verfügung gestellten Einzelfälle²⁸ sollen nun näher betrachtet werden. Sie zeichnen sich durch die Tatsache „doppelte Doppik“ bzw. andere zusätzliche Details aus, die einer gesonderten Betrachtung lohnen. In den meisten Fällen liegen leider keine Informationen zu den Preislisten vor, so dass eine direkte Überprüfung der erwartbaren Verteilung für die letzten zählenden Ziffern nicht durchgeführt werden kann. In diesen Fällen wird üblicherweise (mit Blick auf Satz 4.10) die vorletzte Ziffer getestet.

Beispielfall A: Korrekte Daten

Der Datensatz besteht aus den Tagesumsätzen eines Subunternehmens, bei dem das Hauptunternehmen sowohl einziger Hauptlieferant als auch direkt umsatzbeteiligt ist. Daher kann davon ausgegangen werden, dass die gemeldeten Daten insoweit korrekt sind, als dass neben der externen Prüfung auch eine intensive „interne“ Prüfung der Daten durch das Hauptunternehmen stattfindet. Zudem werden wichtige Rohstoffe direkt vom Hauptunternehmen bezogen. Der Datensatz ist unterteilt in zwei Datenreihen, jeweils eine für den Verkauf innerhalb des Hauses als auch außer Haus, mit jeweils 365 Einzeldaten. Die Daten sind auf den einzelnen Cent genau angegeben.

Die Tests wurden allein mit Hilfe der Funktionen `RDistributionTest`, `RIndependencyTest` und `RdifferencesTest` durchgeführt, da keine Informationen über die Speisekarte vorlagen (vgl. Tabelle 8.1).

Die relevanten Ziffern auf der letzten (d. h. der ein-Cent) Stelle und auch der vorletzten (d. h. der 10-Cent) Stelle weisen beim Gesamttest einen p -value von 0,5 bei den nach Westberg kombinierten Tests auf. Auch bei der kombinierten Hypothese ergeben sich hohe Wahrscheinlichkeitswerte. Damit kann die Hypothese der „korrekten“ Daten eindeutig nicht verworfen werden. Dieses Ergebnis war, da es sich vermutlich um unveränderte Daten handelt, zu erwarten.

²⁸ Aufgrund des allgemeinen Datenschutzes — hier durch das Steuergeheimnis verstärkt — können die in dieser Arbeit eingesetzten Datensätze nur nach Rücksprache und Vertrag mit den betroffenen Finanzbehörden (insb. OFD Münster) übermittelt werden.

	Test Ziffer	1Euro	vertikal 10cent	1cent	horizontal	
					1Euro/10cent	10cent/1cent
Einzeltests	Verteilung	0,51689662	0,75724855	0,76224755	0,95560888	0,87122575
	normal	0,25294941	0,85882823	0,68506299	0,99880024	0,24195161
	2block	0,22455509	0,11837632	0,54269146	0,55128974	0,07778444
	even	0,9144573	0,40744442	0,30614172	0,55182	0,1903197
	lowhigh	1	0,29346694	0,14309796	0,37505398	0,94107908
kombinierte Hypothese	normal	0,5	0,5	0,5	0,5	0,48390322
	2block	0,44911018	0,23675265	0,5	0,5	0,15556889
	even	0,5	0,5	0,5	0,5	0,3806394
	lowhigh	0,5	0,5	0,28619592	0,5	0,5
	differences	0,99920016	0,80403919	0,59288142	0,96080784	0,57788442
kombinierter Test	normal	0,22575485	0,93481304	0,86722655	1	0,68346331
	2block	0,27054589	0,24815037	0,89562088	0,81143771	0,38692262
	even	0,20275945	0,66966607	0,56688662	0,67106579	0,56928614
	lowhigh	0,34013197	0,25514897	0,22455509	0,84623075	0,99960008
	differences	0,9820036	0,43771246	0,46130774	0,92221556	0,43991202

(a) Umsatz „im Hause“

	Test Ziffer	1Euro	vertikal 10cent	1cent	horizontal	
					1Euro/10cent	10cent/1cent
Einzeltests	Verteilung	0,13737253	0,70185963	0,82003599	0,68266347	0,75844831
	normal	0,95440912	0,91261748	0,4385123	0,97180564	0,78764247
	2block	0,87422515	0,75204959	0,9780044	0,77004599	0,77144571
	even	0,13427387	0,47694087	0,40052047	0,55624588	0,27188925
	lowhigh	0,40324424	1	1	0,55323467	0,94093979
kombinierte Hypothese	normal	0,27474505	0,5	0,5	0,5	0,5
	2block	0,27474505	0,5	0,5	0,5	0,5
	even	0,13305278	0,5	0,5	0,5	0,5
	lowhigh	0,27774642	0,5	0,5	0,5	0,5
	differences	0,62067586	0,80563887	0,35272945	0,85922815	0,53129374
kombinierter Test	normal	0,77544491	0,95020996	0,78564287	0,99040192	0,94961008
	2block	0,23355329	0,77384523	0,9940012	0,75804839	0,94861028
	even	0,24115177	0,59128174	0,62207558	0,88462308	0,64627075
	lowhigh	0,55488902	0,33653269	0,85002999	0,16356729	0,28954209
	differences	0,39372126	0,78064387	0,38032394	0,64927015	0,59428114

(b) Umsatz „außer Haus“

Tab. 8.1: Ergebnisse des Tests für korrekte Daten

Beispielfall B: Preisliste

Hier handelt es sich um eine Eisdielen, für die eine Preisliste über 126 Artikel vorliegt, mit deren Hilfe geprüft werden kann, ob grundsätzlich die Konvergenz gegen gleiche Klassenwahrscheinlichkeiten zu erwarten ist:

Die Preise liegen im Bereich von 1,00 € bis 15,00 €, wobei einzelne Cent nicht notiert sind und auch auf der ersten Stelle nach dem Dezimaltrennzeichen ausschließlich 0 und 5 erscheinen. Damit ergeben sich für die beiden Stellen um das Dezimaltrennzeichen die in Tabelle 8.2 dargestellte Häufigkeitsverteilung.

	1997		1998	
	außer Haus	im Haus	gesamt	gesamt
<i>n</i>	5	3	8	17
Korrektur	0.02410	0.05431	0.01778	0.01597

Tab. 8.3: Minimale Anzahl Verkäufe pro Tag (*n*) und Korrekturen

Endziffer	Häufigkeit		Endziffer	Häufigkeit	
	absolut	relativ		absolut	relativ
00	22	0,1746	45	1	0,0080
10	1	0,0080	50	6	0,0476
20	2	0,0159	60	10	0,0794
25	12	0,0952	70	26	0,2063
30	4	0,0317	75	1	0,0080
35	7	0,0556	80	10	0,0794
40	13	0,1032	90	11	0,0873

Tab. 8.2: Häufigkeiten bestimmter Preise auf der Speisekarte

Es liegen Datenreihen für zwei Jahre vor (1997 und 1999). Für das Jahr 1997 wurde die Datenreihe zusätzlich in Verkäufe außer Haus und im Haus aufgeteilt. Für jede der vier Datenreihen (3 aus dem Jahr 1997 und 1 aus dem Jahr 1999) wurde jeweils der minimale Umsatz bestimmt und daraus die minimale Anzahl verkaufter Artikel (vgl. Abschnitt 7.1) bestimmt.

Da in diesem Fall auch eine Speisekarte bekannt ist, kann die Gültigkeit der asymptotischen Gleichverteilung für die Ziffer vor dem Dezimaltrennzeichen (letzte Euro Ziffer) überprüft und bestätigt werden. Dabei wird die Gültigkeit dieser Speisekarte für beide Jahre angenommen.

Leider gibt es keine Informationen über die Anteile der Produkte an den Umsätzen. Somit können die Wahrscheinlichkeiten für das Auftreten bestimmter Endziffern in den Rechnungspositionen nicht bestimmt werden. Unter der Annahme, dass sämtliche Artikel der Speisekarte gleich häufig verkauft werden, wurden die notwendigen Korrekturen für die χ^2 -Statistik ermittelt (siehe Tabelle 8.3).

Dazu ist die minimale Anzahl der Umsatzpositionen pro Tag zu bestimmen, welche sich für den außer-Haus- und den im-Haus-Verkauf jeweils aus dem (aufgerundeten) minimalen Umsatz dividiert durch den maximalen Einzelpreis ergeben. Für die Gesamtumsätze lässt sich diese Zahl dann als Summe der beiden einzelnen Minima ermitteln, was oberhalb der (aufgerundeten) Zahl liegt, welche sich aus der Division des minimalen Umsatzes mit dem maximalen Preis ergeben würde (vgl. Tabelle 8.3).

Als Korrekturen der χ^2 -Statistik werden nun die Werte 0,02409516 bzw. 0,01599306 für 1997 und 0,01597 für 1999 ermittelt. Diese sind somit ausreichend klein, um mit der unkorrigierten Statistik rechnen zu können.²⁹

Bemerkenswert ist, dass für das Jahr 1997 die Gesamttagesumsätze beim Verteilungstest (und damit auch in den verschiedenen kombinierten Verfahren) Auffälligkeiten aufweisen, während dies bei den im-Haus- und auch außer-Haus-Umsätzen nicht der Fall ist (vgl. Tab. 8.4). Dies ließe sich beispielsweise damit erklären, dass der Gesamtumsatz festgelegt und die jeweiligen Teilumsätze anschließend daraus „berechnet“ wurden.

²⁹ Der simuliert bestimmte *p*-value ist bis auf 8 Nachkommastellen identisch.

	Test Ziffer	vertikal 10Euro	vertikal 1Euro	horizontal 10E/1E		Test Ziffer	vertikal 10Euro	vertikal 1Euro	horizontal 10E/1E
Einzeltests	Verteilung	0,0429914	0,06178764	0,01159768	Einzeltests	Verteilung	0,0439912	0,19656069	0,09018196
	normal	0,30213957	0,58228354	0,41611678		normal	0,00019996	0,42231554	0,01239752
	2block	0,23375325	0,54489102	0,14817037		2block	0,00019996	0,62947411	0,0029994
	even	0,35410497	0,23798712	0,93410793		even	0,48174625	0,55468844	0,40706796
	lowhigh	0,00546155	0,22459953	0,00358332		lowhigh	0,02372742	0,14751704	0,40238171
kombinierte Hypothese	normal	0,10280664	0,12357528	0,04775264	kombinierte Hypothese	normal	0,00019801	0,34905842	0,01433293
	2block	0,08469517	0,12357528	0,02055262		2block	0,00019801	0,39312138	0,00423535
	even	0,11565643	0,11273466	0,02319536		even	0,14698375	0,39312138	0,21427052
	lowhigh	0,00374293	0,1079999	0,0008064		lowhigh	0,01352469	0,18292456	0,21264414
	differences	0,31953609	0,77184563	0,62747451		differences	0,00019996	0,94321136	0,00039992
kombinierter Test	normal	0,05418916	0,15756849	0,03579284	kombinierter Test	normal	0,00019996	0,34633073	0,00119976
	2block	0,0279944	0,07218556	0,00039992		2block	0,00079984	0,94841032	0,00039992
	even	0,34813037	0,5374925	0,65966807		even	1	0,92781444	0,5564887
	lowhigh	0,0009998	0,00059988	0,00019996		lowhigh	0,14957009	0,5214957	0,55488902
	differences	0,25794841	0,86502699	0,53929214		differences	0,00019996	0,9320136	0,00039992

(a) Umsatz „außer Haus“ 1997

(b) Umsatz „im Haus“ 1997

	Test Ziffer	vertikal 10Euro	vertikal 1Euro	horizontal 10E/1E		Test Ziffer	vertikal 10Euro	vertikal 1Euro	horizontal 10E/1E
Einzeltests	Verteilung	0,00019996	0,00019996	0,00019996	Einzeltests	Verteilung	0,00019996	0,00019996	0,00019996
	normal	0,65346931	0,87862428	0,5694861		normal	0,39312138	0,10877824	0,00339932
	2block	0,15996801	0,82143571	0,80763847		2block	0,43191362	0,29334133	0,07578484
	even	0,81849594	0,807037	0,86830834		even	1	0,16670394	0,50353211
	lowhigh	0,89735585	0,81307948	0,49286961		lowhigh	0,55244713	0,05639395	0,09102157
kombinierte Hypothese	normal	0,00039992	0,00039992	0,00039992	kombinierte Hypothese	normal	0,00142513	0,00045023	0,00001878
	2block	0,00063743	0,00039992	0,00039992		2block	0,0015495	0,00109776	0,00032463
	even	0,00039992	0,00039992	0,00039992		even	0,00039992	0,00066152	0,00039992
	lowhigh	0,00039992	0,00039992	0,00174216		lowhigh	0,00039992	0,00024823	0,00038322
	differences	0,27294541	0,75164967	0,104979		differences	0,90781844	0,32053589	0,51689662
kombinierter Test	normal	0,00019996	0,00019996	0,00019996	kombinierter Test	normal	0,00019996	0,00019996	0,00019996
	2block	0,00019996	0,0569886	0,00019996		2block	0,00019996	0,00019996	0,00019996
	even	0,35272945	0,0359928	0,69026195		even	0,0179964	0,01659668	0,915017
	lowhigh	0,00019996	0,970006	0,00019996		lowhigh	0,72105579	0,069986	0,05678864
	differences	0,00019996	0,59168166	0,00019996		differences	0,00059988	0,07178564	0,00039992

(c) Umsatz „gesamt"1997'

(d) Umsatz „gesamt"1998'

Tab. 8.4: Ergebnisse aus dem Beispielfall B

8.2 Resultate und Anwendungsempfehlungen

Im Anhang B finden sich weitere Resultate auf deren Basis Qualitätskennzahlen für die Tests berechnet werden können (vgl. Tabelle 8.5).

Die vorgegebene akzeptable Fehlerrate der α -Fehler von 0,05 bzw. 0,1 wird von sämtlichen Tests eingehalten³⁰; Gegenteiliges wäre auch nur bei Verletzung der grundlegenden Annahmen der Tests zu erwarten gewesen. Somit sind die Tests in dieser Hinsicht zulässig. Die dargestellten Erkennungsraten³¹ zeigen deutlich, dass der Verteilungstest auf der geeignet gewählten letzten Ziffer immerhin in 40%–50% der Betrugsfälle anschlägt.

Allerdings sollte man diese Ergebnisse nicht überbewerten, da bei insgesamt nur 18 unmanipulierten und 24 manipulierten Datenreihen bereits eine korrekt klassifizierte Zahlenreihe die Ergebnisse stark verändern kann.

Die Ergebnisse aus Tabelle 8.5 ergeben sich aus der Betrachtung eines einzelnen Tests. Wie in Abschnitt 7.2 dargestellt, können bestimmte Tests auch kombiniert werden. Aus diesem Grund

³⁰ Abweichungen ergeben sich auf Grund des recht kleinen Stichprobenumfangs.

³¹ Die Erkennungsrate ist das Komplement zum Fehler 2. Art (β -Fehler), also $1 - \beta$.

	vertikal				horizontal			
	Fehlerkennungsrate		Erkennungsrate		Fehlerkennungsrate		Erkennungsrate	
	5%	10%	5%	10%	5%	10%	5%	10%
Verteilung	0,0455	0,0909	0,3571	0,3929	0,0909	0,0909	0,3214	0,4286
direkt	0,0455	0,0455	0,1071	0,1429	0,0000	0,1364	0,1786	0,2143
2block	0,0455	0,0909	0,1071	0,1071	0,0000	0,0455	0,2143	0,3214
even	0,0455	0,0909	0,0357	0,1429	0,0000	0,0000	0,1071	0,1786
lowhigh	0,0455	0,1364	0,1071	0,1071	0,0000	0,0455	0,0714	0,1786
Basis	22		28		22		28	

Tab. 8.5: Erkennungsraten der einzelnen Testverfahren in der Übersicht

	vertikal				horizontal			
	Fehlerkennungsrate		Erkennungsrate		Fehlerkennungsrate		Erkennungsrate	
	5%	10%	5%	10%	5%	10%	5%	10%
direkt	0,0909	0,0909	0,3929	0,3929	0,0455	0,0455	0,3571	0,3571
2block	0,0455	0,0909	0,3571	0,3929	0,0455	0,0455	0,3929	0,3929
even	0,0455	0,0909	0,2500	0,3214	0,0455	0,0455	0,3929	0,3929
lowhigh	0,0455	0,0455	0,3571	0,3929	0,0455	0,0909	0,3214	0,3929
differences	0,0000	0,0000	0,1071	0,1786	0,0909	0,0909	0,1071	0,1786
Basis	22		28		22		28	

Tab. 8.6: Erkennungsraten der nach Westberg kombinierten Testverfahren in der Übersicht (kombinierter Test)

wurden dieselben Kennzahlen zur Güte des Testverfahrens auch für den kombinierten Test aus Verteilungs- und Unabhängigkeitstest durchgeführt (vgl. Tabelle 8.6).

Insbesondere die Kombination aus Verteilungstest und klassischem Unabhängigkeitstest („direkt“) erscheint vielversprechend, da beide Tests einzeln die niedrigsten Fehlerraten aufweisen. Allerdings gewinnen die Tests in ihrer Kombination kaum an Kraft, d. h. die Erkennungsrate verbleibt auf etwa demselben Niveau, während die Fehlerkennungsrate sogar leicht zunimmt. Damit sind die kombinierten Tests nicht besser als der Verteilungstest allein.

In der Tabelle 8.7 sind die (Fehl-)Erkennungsraten bei Verwendung der gemeinsamen Hypothese, d. h. der Unabhängigkeitstests mit fixierten Rändern aufgeführt. Im Gegensatz zu den vorhergehenden Tabellen scheinen die Fehlerkennungsraten weitaus höher, was aufgrund der Fixierung des Fehlers 1. Art eigentlich nicht auftreten dürfte. Dies zeigt einmal mehr, wie stark die hier aufgeführten Resultate unter der doch recht geringen Fallzahl leiden. Unter diesen Tests erscheint die Kombination mit der Abhängigkeitsstruktur über die Unterscheidung von geraden und ungeraden Zahlen am geeignetsten.

Beim Vergleich der Tabellen 8.6 und 8.7 fällt auf, dass trotz der starken Informationsreduktion bei der kombinierten Hypothese, welche nur gerade und ungerade Ziffern unterscheidet („even“), die Erkennungsraten erstaunlich gut sind (bis zu 50% bei 10% Irrtumswahrscheinlichkeit). Dies ließe sich beispielsweise damit erklären, dass bei manipulierten Datenfolgen sich die Abweichungen von der Gleichverteilung innerhalb der gerade bzw. ungeraden Ziffern

	vertikal				horizontal			
	Fehlerkennungsrate		Erkennungsrate		Fehlerkennungsrate		Erkennungsrate	
	5%	10%	5%	10%	5%	10%	5%	10%
direkt	0,1364	0,1818	0,3214	0,4286	0,0455	0,0909	0,3214	0,3214
2block	0,0909	0,1818	0,3571	0,3929	0,0909	0,0909	0,3929	0,4286
even	0,0909	0,1364	0,4286	0,5357	0,1364	0,1364	0,3214	0,3214
lowhigh	0,0455	0,0909	0,2143	0,2857	0,0909	0,1364	0,2857	0,3214
differences	0,0000	0,0455	0,2143	0,2857	0,1364	0,1364	0,2143	0,2500
Basis	22		28		22		28	

Tab. 8.7: Erkennungsraten der integrierten, kombinierten Testverfahren in der Übersicht (kombinierte Hypothese)

kumulieren, die Personen also systematisch tendenziell nur gerade oder nur ungerade Zahlen bevorzugen.

Der Einsatz von horizontalen Tests, d. h. der Verwendung von zwei benachbarten letzten Ziffern bringt keine Vorteile gegenüber dem vertikalen Test, bei dem nur eine Ziffernposition verwendet wird. Dies lässt sich zum einen damit erklären, dass der Stichprobenumfang nicht ausreicht, um zwei Ziffern gleichzeitig zu prüfen. Zum anderen müssen zwei benachbarte Ziffern eingesetzt werden, was mehr Transaktionen pro Tag voraussetzt (vgl. 4.4).

Es kann leider nicht endgültig ausgeschlossen werden, dass einige der verwendeten „doppelten“ Buchführungen bei Durchsuchungen gefunden wurden, welche aufgrund einer auffälligen Ziffernverteilung durchgeführt wurden. Damit sind die Erkennungsraten auf Basis der Ziffernverteilung möglicherweise überschätzt. Denn sollten die Datensätze durch vorherige Anwendung der hier untersuchten Methodiken selektiert worden sein³², ist natürlich eine weitaus höhere Erkennungsrate zu erwarten als bei rein zufällig zusammengestellten Fällen. Dies ist jedoch nach Auskunft der OFD Münster (laut Aktenlage³³) nicht der Fall.

Da bisher kein Test auf Unabhängigkeit der Ziffern eingesetzt wurde, können diese Erkennungsraten als konsistent geschätzt angesehen werden. Mit dem direkten Test auf Unabhängigkeit ergibt sich immerhin eine Erkennungsrate von 10% bei 5% zulässiger Irrtumswahrscheinlichkeit.

³² Beispielsweise indem die Durchsuchungen aufgrund auffälliger Ziffernverteilungen durchgeführt wurden oder die Daten deshalb zur Verfügung gestellt worden sind.

³³ Es kann natürlich nicht ausgeschlossen werden, dass durch den Prüfer vorab Ziffernanalysen durchgeführt wurden, welche die Aufmerksamkeit in bestimmten Fällen erhöht hat.

9 Fazit

Die Anwendung der Ziffernanalyse zur Überprüfung von Kassenbelegen ist grundsätzlich möglich. Im Rahmen dieser Arbeit wurde gezeigt, dass die letzten und nicht die ersten Ziffern einer Zahl entscheidend sind. Weiterhin wurden die Voraussetzungen für die Anwendung der Ziffernanalyse auf Basis der letzten Ziffern herausgearbeitet. Der χ^2 -Test mit simulierten Ablehnungswahrscheinlichkeiten konnte als bester Hypothesentest für diese Anwendung identifiziert werden. Das Verfahren der Ziffernanalyse, welches bis dato nur die Verteilung der Ziffern betrachtete, wurde um Überprüfungen der Abhängigkeitsstrukturen der Zahlen bzw. Ziffern erweitert. Erste empirische Untersuchungen bei (un-)manipulierten Daten haben die Praxistauglichkeit der Ziffernanalyse wie sie hier vorgestellt wird, bestätigt.

Die wichtigsten Resultate für die Anwendung der Ziffernanalyse lassen sich wie folgt zusammenfassen:

1. Wahl der Ziffernposition

Für alle Zahlen, welchen ein Additionsprozess zugrunde liegt (z. B. Tageseinnahmen), sollte die letzte nicht-triviale Ziffer verwendet werden; falls diese nicht alle Ausprägungen aufweist, alternativ die vorletzte.

Bei multiplikativen Prozessen kann auch die erste Ziffer genutzt werden (z. B. Zinsberechnungen).

In beiden Fällen sollte der rekursive Prozess, welcher die zu analysierenden Zahlen generiert, ausreichend lang sein, d. h. ausreichend viele Summanden bzw. Faktoren aufweisen.

2. Überprüfung der Referenzverteilung

Bei den ersten Ziffern, welche Zahlen mit einer multiplikativen Struktur entnommen wurden, kann Benford's-Law eingesetzt werden.

Bei den letzten Ziffern ist die Referenzverteilung immer die Gleichverteilung über alle Ziffern. Ihre Gültigkeit kann mit Hilfe des Kriteriensatzes aus Korollar 4.3 überprüft werden.

3. Wahl der Tests

In jeden Fall sollte ein Verteilungstest durchgeführt werden. Für große Datenmengen kann dazu die χ^2 -Statistik eingesetzt werden. Bei kleineren Datenumfängen ist diese für die letzten Ziffern aufgrund ihrer Optimalitätseigenschaften ebenfalls zu raten, für die ersten Ziffern nur bedingt.

Unabhängigkeitstests haben in den Beispielen keine in insgesamt keine große Diskriminanzkraft gezeigt. Allerdings scheint neben dem direkten Unabhängigkeitstest vor allem die Reduktion auf gerade/ungerade Ziffern recht erfolgversprechend.

4. Entscheidungsfindung

Die Entscheidungen können für alle Einzeltests bei großen Datenmengen auf Basis der χ^2 -Verteilung durchgeführt, bei kleinen Datenmengen sollte mit Hilfe einer MC-Simulation die Ablehnungswahrscheinlichkeit bestimmt werden. Ein Verteilungstest kann mit einem der Unabhängigkeitstests kombiniert werden. Die gemeinsame Entscheidung wird dann über die kombinierte Ablehnungswahrscheinlichkeit bestimmt. Das günstigste Testkonstrukt scheint die Kombination aus Verteilungstest mit einem vollen exakten Test auf Unabhängigkeit über eine einzelne Ziffernposition zu sein.

Das Verfahren ist relativ leicht zu implementieren und scheint (in Relation zu der benötigten Informationsmenge) eine erstaunlich gute Vorselektion bieten zu können.

Die Anwendung ist jedoch (zusätzlich zu den bereits genannten Voraussetzungen) zusätzlich eingeschränkt, da

- die generelle Gültigkeit der Annahmen über manipulierte Daten, insbesondere dass deren Verteilung von der natürlichen, unmanipulierten abweicht, unbewiesen ist und
- die Bekanntheit des Verfahrens seitens der „Steuervermeider“ zu „Datendesign“ führen kann.

In weiterer (insbesondere empirischer) Forschung sollte überprüft werden, inwiefern sich im Laufe der Zeit bei (auf anderem Wege) als manipuliert bekannten Daten die Tests verhalten und bei schlechter werdender Erkennungsrate wieder auf das Verfahren verzichtet werden. Zudem könnten die Hypothesen über die Abhängigkeitsstruktur bei manipulierten Daten verfeinert und diese anschließend gezielter eingesetzt werden.

Literaturverzeichnis

- Agresti, A.: Categorical data analysis. Wiley New York 1990.
- Agresti, A.: A survey of exact inference for contingency tables. In: *Statistical Science*, 7 (1992), feb 1, S. 131–153.
- Albrecht, C. C.; Albrecht, W. S.; Dunn, J. G.: Conducting a pro-active fraud audit: a case study. In: *Journal of Forensic Accounting*, 2 (2000), S. 203–218.
- Albrecht, W. S.; Albrecht, C. C.: Root out financial deception. In: *Journal of Accountancy*, (2002), S. 30–34.
- Allaart, P. C.: An invariant-sum characterization of Benford's law. In: *Journal of Applied Probability*, 34 (1995), S. 1–5.
- Amershi, A. H.: The occurrence of Fibonacci numbers in time series of financial accounting ratios: anomalies or indicators of firm survival, bankruptcy and fraud? An exploratory study. In: *Managerial Finance*, 26 (2000) 11, S. 5–20.
- Baddeley, A. D.: The capacity for generating information by randomization. In: *Quarterly Journal of Experimental Psychology*, 18 (1966), S. 119–129.
- Baier, T.; Neuwirth, E.: Excel :: COM :: R. In: *Computational Statistics*, 22 (2007) 1, S. 91–108.
- Bakan, P.: Response-tendencies in attempts to generate random binary series. In: *The American Journal of Psychology*, 73 (1960) 1, S. 127–131.
- Bar-Hillel, M.; Wagenaar, W. A.: The perception of randomness. In: *Advances in Applied Mathematics*, 12 (1991), S. 428–454.
- Becker, R. A.: *S: An Interactive Environment for Data Analysis and Graphics*. CRC Press 1984.
- Becker, R. A.; Chambers, J. M.; Wilks, A. R.: *The new S language*. Pacific Grove, Ca.: Wadsworth & Brooks, 1988 1988.
- Benford, F.: The law of anomalous numbers. In: *Proceedings of the American Philosophical Society*, 78 (1938), S. 551–572.
- Berry, K. J.; Johnston, J. E.; Mielke Jr., P. W.: Exact goodness-of-fit tests for unordered equiprobable categories. In: *Perceptual & Motor Skills*, 98 (2004) 3 Pt 1, S. 909–919.
- Blenkers, M.: Chi-Test - oder „Jeder Mensch hat seine Lieblingszahl“. In: *Die steuerliche Betriebsprüfung*, 9/03 (2003), S. 261–264.
- Boyle, J.: An Application of Fourier Series to the Most Significant Digit Problem. In: *The American Mathematical Monthly*, 101 (1994) 9, S. 879–886.
- Brugger, P.: Variables that influence the generation of random sequences: an update. In: *Perceptual & Motor Skills*, 84 (1997), S. 627–661.
- Burke, S.: *Barriers in US Benchmark Bonds*. In: Working Paper, Nr. 55. University of British Columbia, Vancouver, 2001.
- Busta, B.; Sundheim, R.: Detecting Manipulated Tax Returns with the Use of Benford's Law. In: Center for Business Research Working Paper, Nr. W95-106-94. St. Cloud State University, Minnesota, 1992a.
- Busta, B.; Sundheim, R.: Tax Return Numbers Tend to Obey Benford's Law. In: Center for Business Research Working Paper, Nr. W93-106-94. St. Cloud State University, Minnesota, 1992b. – 94 S.
- Busta, B.; Weinberg, R.: Using Benford's law and neural networks as a review procedure. In: *Managerial Auditing Journal*, 13 (1998) 6, S. 356–366.
- Cai, Y.; Krishnamoorthy, K.: Exact Size and Power Properties of Five Tests for Multinomial Proportions. In: *Communications in Statistics: Simulation and Computation*, 35 (2006) 1, S. 149–160.

- Carslaw, C. A. P. N.: Anomalies in income numbers: evidence of goal oriented behavior. In: *The Accounting Review*, 63 (1988), April 2, S. 321–327.
- Chambers, J. M.: *Programming with Data: A Guide to the S Language*. Springer 1998.
- Chambers, J. M.; Hastie, T. J.: *Statistical Models in S*. CRC Press, Inc. Boca Raton, FL, USA 1991.
- Chapanis, A.: Human production of „random“ numbers. In: *Perceptual & Motor Skills*, 81 (1995), S. 1347–1363.
- Christian, C. W.; Gupta, S.: New evidence on „secondary evasion“. In: *The Journal of the American Taxation Association*, 15 (1993), Frühling 1, S. 72–93.
- Clarkson, D. B.; Fan, Y. A. N.; Joe, H.: A Remark on Algorithm 643: FEXACT: An Algorithm for Performing Fisher’s Exact Test in $r \times c$ Contingency Tables. In: *ACM Transactions on Mathematical Software*, 19 (1993) 4, S. 484–488.
- Cleary, R.; Thibodeau, J. C.: Applying digital analysis using Benford’s law to detect fraud: the dangers of type I errors. In: *Auditing: A Journal of Practice & Theory*, 24 (2005) 1, S. 77–81.
- Cohen, A.; Sackrowitz, H. B.: Unbiasedness of the Chi-Square, Likelihood Ratio, and Other Goodness of Fit Tests for the Equal Cell Case. In: *The Annals of Statistics*, 3 (1975), jul 4, S. 959–964.
- De Ceuster, M. J. K.; Dhaene, G.; Schatteman, T.: On the hypothesis of psychological barriers in stock markets and Benford’s law. In: *Journal of Empirical Finance*, 5 (1998) 3, S. 263–279.
- Diaconis, P.: The distribution of leading digits and uniform distribution mod 1. In: *The Annals of Probability*, 5 (1977) 1, S. 72–81.
- Diekmann, A.: Not the first digit! Using Benford’s law to detect fraudulent scientific data. In: *Journal of Applied Statistics*, 34 (2007), S. 321–329.
- Dlugosz, S.: *Digitalanalyse als Ansatz zur Betrugserkennung in Finanzdaten*. Diplomhausarbeit, Institut für Wirtschaftsinformatik der Westfälischen-Wilhelms-Universität Münster, Januar 2004.
- Dlugosz, S.; Müller-Funk, U.: The value of the last digit - digit analysis for fraud detection. In: *Advances in Data Analysis and Classification*, 3 (2009) 3, S. 281–290.
- Doucouliaagos, H.: Number preference in Australian stocks. In: *Applied Financial Economics*, 14 (2004) 1, S. 43–54.
- Drüen, K.-D.: *Die Kontrolle der Kassenbuchführung mit Hilfe statistischer Testverfahren*. In: *Praxis Steuerstrafrecht*, (2004) 1, S. 18–22.
- Dümbgen, L.; Leuenberger, C.: Explicit bounds for the approximation error in Benford’s law. In: *Electronic Communications in Probability*, 18 (2008), S. 99–112.
- Durtschi, C.; Hillison, W.; Pacini, C.: The effective use of Benford’s law to assist in detecting fraud in accounting data. In: *Journal of Forensic Accounting*, V (2004), S. 17–34.
- Engel, H. A.; Leuenberger, C.: Benford’s law for exponential random variables. In: *Statistics and Probability Letters*, 63 (2003) 4, S. 361–365.
- Ettredge, M. L.; Srivastava, R. P.: Using digital analysis to enhance data integrity. In: *Issues in Accounting Education*, 14 (1999) 4, S. 675–690.
- Fisher, R.A.: *Statistical methods for research workers*. Oliver and Boyd 1970.
- Flehinger, B. J.: On the probability that a random integer has initial digit A. In: *The American Mathematical Monthly*, 73 (1966) 10, S. 1056–1061.
- Freeman, G. H.; Halton, J. H.: Note on an Exact Treatment of Contingency, Goodness of Fit and Other Problems of Significance. In: *Biometrika*, 38 (1951) 1/2, S. 141–149.

- Ginsburg, N.; Karpiuk, P.: Random generation: analysis of the responses. In: *Perceptual & Motor Skills*, 79 (1994), S. 1059–1067.
- Good, I. J.; Gover, T. N.; Mitchell, G. J.: Exact Distributions for X^2 and for the Likelihood-Ratio Statistic for the Equiprobable Multinomial Distribution. In: *Journal of the American Statistical Association*, 65 (1970), mar 329, S. 267–283.
- Green, B. P.; Choi, J. H.: Assessing the risk of management fraud through neural network technology. In: *Auditing: A Journal of Practice & Theory*, 16 (1997) 1, S. 14–28.
- Hill, T. P.: Random-number guessing and the first digit phenomenon. In: *Psychological Reports*, 62 (1988), S. 967–971.
- Hill, T. P.: Base-invariance implies Benford's law. In: *Proceedings of the American Journal of Mathematics*, 4 (1995a), S. 887–895.
- Hill, T. P.: A statistical derivation of the significant-digit law. In: *Statistical Science*, 10 (1995b) 4, S. 354–363.
- Hill, T. P.; Schürger, K.: Regularity of digits and significant digits of random variables. In: *Stochastic processes and their applications*, 115 (2005) 10, S. 1723–1743.
- Hope, A. C. A.: A Simplified Monte Carlo Significance Test Procedure. In: *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, 30 (1968) 3, S. 582–598.
- Hornik, K.; Leisch, F.: Vienna and R: Love, Marriage and the Future. In: *Festschrift 50 Jahre Österreichische Statistische Gesellschaft*. Hrsg.: Rudolf Dutter. Österreichische Statistische Gesellschaft 2002, S. 61–70. – ISSN 1026-597X.
- Hürlimann, W.: A generalized Benford law and its application. In: *Advances and Applications in Statistics*, 3 (2003) 3, S. 217–228.
- Hürlimann, W.: Generalizing Benford's law using power laws: application to integer sequences. 2006.
- Ihaka, R.; Gentleman, R.: R: A Language for Data Analysis and Graphics. In: *Journal of Computational and Graphical Statistics*, 5 (1996) 3, S. 299–314.
- Insightful Corporation: S-PLUS 8. 2007. <http://www.insightful.com/>. Insightful Corporation, Seattle, WA, USA.
- Knechel, W. R.: A simulation study of the relative effectiveness of alternative analytical review procedures. In: *Decision Sciences*, 17 (1986), S. 376–94.
- Knechel, W. R.: The effectiveness of statistical analytical review as a substantive auditing procedure: a simulation analysis. In: *The Accounting Review*, 63 (1988) 1, S. 74–95.
- Knuth, D.E.: Random numbers. In: *The Art of Computer Programming*. Reading, MA: Addison-Wesley 1998, Kap. 3.3.
- Kumar, K.; Bhattacharya, S.: Benford's law and its application in financial fraud detection. In: *Advances in Financial Planning and Forecasting*, 11 (2002), S. 57–70.
- Leemis, L. M.; Schmeiser, B. W.; Evans, D. L.: Survival distributions satisfying Benford's law. In: *The American Statistician*, 54 (2000) 3, S. 236–241.
- Ligges, U.: *Programmieren mit R*. Springer 2005.
- Marsaglia, G.; Tsang, W.W.: Some difficult-to-pass tests of randomness. In: *Journal of Statistical Software*, 7 (2002) 3.
- McKee, T. E.: Increase your fraud auditing effectiveness by being unpredictable! In: *Managerial Auditing Journal*, 21 (2006) 2, S. 224–231.
- Mehta, C.R.; Patel, N.R.: A network algorithm for performing Fisher's exact test in $r \times c$ contingency tables. In: *Journal of the American Statistical Association*, 78 (1983) 382, S. 427–434.

- Mehta, C.R.; Patel, N.R.: ALGORITHM 643: FEXACT: a FORTRAN subroutine for Fisher's exact test on unordered $r \times c$ contingency tables. In: ACM Transactions on Mathematical Software, 12 (1986) 2, S. 154–161.
- Miller, S. J.; Nigrini, M. J.: Order Statistics and Shifted Almost Benford Behavior. 2006. <http://www.citebase.org/abstract?id=oai:arXiv.org:math/0601344>.
- Mochty, L.: Die Aufdeckung von Manipulationen im Rechnungswesen-Was leistet das Benford's Law. In: Die Wirtschaftsprüfung, 55 (2002) 14, S. 725–736.
- Mosimann, J. E.; Dahlberg, J. E.; Davidian, N. M.; Krueger, J. W.: Terminal digits and the examination of questioned data. In: Accountability in Research, 9 (2002), S. 75–92.
- Mosimann, J. E.; Wiseman, C. V.; Edelman, R. E.: Data fabrication: can people generate random digits? In: Accountability in Research, 4 (1995), S. 31–55.
- Müller-Funk, U.; Dlugosz, S.: Benford-Analyse: Einfachheit oder Schlichtheit? In: Einfachheit in Wirtschaftsinformatik und Controlling. Hrsg.: J. vom Brocke, J. Becker. München: Verlag Franz Vahlen 2008.
- Neuringer, A.: Can people behave „randomly?": the role of feedback. In: Journal of Experimental Psychology: General, 115 (1986) 1, S. 62–75.
- Newcomb, S.: Note on the frequency of use of the digits in natural numbers. In: American Journal of Mathematics, 4 (1881), S. 39–40.
- Nigrini, M. J.: A taxpayer compliance application of Benford's law. In: Journal of American Taxation Association, 18 (1996) 1, S. 72–91.
- Nigrini, M. J.: Digital Analysis Tests and Statistics. Allen: The Nigrini Institute 1997.
- Nigrini, M. J.: Continuous Auditing. August 2000. http://accounting.rutgers.edu/raw/aaa/audit/midyear/01midyear/papers/nigrini_continuous_audit.pdf. Ernest & Young Center for Auditing Research and Advanced Technology, University of Kansas.
- Nigrini, M. J.; Mittermaier, L. J.: The use of Benford's law as an aid in analytical procedures. In: Auditing: A Journal of Practice & Theory, 16 (1997) 2, S. 52–67.
- Niskanen, J.; Keloharju, M.: Earnings cosmetics in a tax-driven accounting environment: evidence from Finnish public firms. In: European Accounting Review, 9 (2000) 3, S. 443–452.
- Posch, P. N.: A survey on sequences and distribution functions satisfying the First-Digit-Law. 2004a. http://www.posch.net/paper/posch_benforddist.pdf.
- Posch, P. N.: Ziffernanalyse in der Fälschungsaufspürung. 2004b. http://www.posch.net/paper/posch_faelschungenbenford.pdf.
- Quick, R.; Wolz, M.: Benford's Law in deutschen Rechnungslegungsdaten. In: Betriebswirtschaftliche Forschung und Praxis, (2003), S. 208–224.
- Rabinowitz, F. M.: Characteristic sequential dependencies in multiple-choice situations. In: Psychological Bulletin, 74 (1970), S. 141–148.
- Rabinowitz, F. M.; Dunlap, W. P.; Grant, M. J.; Campione, J. C.: The rules used by children and adults in attempting to generate random numbers. In: Journal of Mathematical Psychology, 33 (1989), S. 227–287.
- Raimi, R. A.: The first digit problem. In: The American Mathematical Monthly, 83 (1976), S. 521–538.
- Rath, G. J.: Randomization by humans. In: American Journal of Psychology, 79 (1966), S. 97–103.
- Rodriguez, R. J.: Beyond Benford's law: A Family of Proxies for Tests of Behavioral Effects. 2003. <http://207.36.165.114/Denver/Papers/BeyondBenfordsLaw.pdf>. Department of Finance, University of Miami.

- Rodriguez, R. J.: First significant digit patterns from mixtures of uniform distributions. In: *The American Statistician*, 58 (2004a) 1, S. 64–72.
- Rodriguez, R. J.: Reducing false alarms in the detection of human influence on data. In: *Journal of Accounting Auditing and Finance*, 19 (2004b), S. 141–158.
- Rose, A. M.; Rose, J. M.: Turn Excel into a financial sleuth: an easy-to-use digital analysis tool can red-flag irregularities. In: *Journal of Accountancy*, 196 (2003) 2, S. 58–61.
- Schatte, P.: On mantissa distributions in computing and Benford's law. In: *Journal of Information Processes and Cybernetics EIK*, 24 (1988), S. 443–455.
- Schäfer, C.; Schräpler, J.-P.; Müller, K.-R.; Wagner, G. G.: Automatic Identification of Faked and Fraudulent Interviews in Surveys by Two Different Methods. In: *Diskussionspapier*, Nr. 441. DIW Berlin, 2004.
- Scott, P. D.; Fasli, M.: Benford's law: an empirical investigation and a novel explanation. *Forschungsbericht*, Nr. CSM Technical Report 349. Department of Computer Science, University of Essex,, <http://cswww.essex.ac.uk/technical-reports/2001/CSM-349.pdf> 2001.
- Skousen, C. J.; Guan, L.; Wetzel, T. S.: Anomalies and unusual patterns in reported earnings: Japanese managers round earnings. In: *Journal of International Financial Management and Accounting*, 15 (2004) 3, S. 212–234.
- Sosna, C.: Statistische Ziffernanalyse -Teil I-. In: *Die steuerliche Betriebsprüfung*, 44 (2004) 9, S. 249–253.
- Sosna, C.: Statistische Ziffernanalyse -Teil II-. In: *Die steuerliche Betriebsprüfung*, 45 (2005) 4, S. 97–102.
- Stigler, G. J.: *The Distribution of Leading Digits in Statistical Tables*. 1945. – unveröffentlicht.
- Teraoka, T.: Some serial properties of „subjective randomness“. In: *Japanese Psychological Research*, 5 (1963) 3, S. 120–128.
- Thomas, J. K.: Unusual patterns in reported earnings. In: *The Accounting Review*, 64 (1989) 4, S. 773–787.
- Tippet, L.M.C.: *The Methods of Statistics*. Williams & Norgate 1931.
- Tocher, K. D.: Extension of the Neyman-Pearson theory of tests to discontinuous variates. In: *Biometrika*, 37 (1950) 1/2, S. 130–144.
- Tödter, K. H.: Benford's law as an indicator of fraud in economics. In: *German Economic Review*, 10 (2009) 3, S. 339–351.
- Towse, J. N.: On random generation and the central executive of working memory. In: *British Journal of Psychology*, 89 (1998), S. 77–101.
- Trede, M.; Watrin, C.; Ullmann, R.: Ziffernanalyse und Chi-Quadrat-Anpassungstest in der steuerlichen Anwendung. In: *DBW*, 69 (2009) 6, S. 701–716.
- van Caneghem, T.: The impact of audit quality on earnings rounding-up behaviour: some UK evidence. In: *European Accounting Review*, 13 (2004) 4, S. 771–786.
- Van der Linden, M.; Beerten, A.; Pesenti, M.: Age-related differences in random generation. In: *Brain and Cognition*, 38 (1998), S. 1–16.
- Waddell, P. A.; Benjamin, L.; Kemp, S.: Random number generation by normal subjects. In: *Perceptual & Motor Skills*, 61 (1985), S. 710.
- Wagenaar, W. A.: Generation of random sequences by human subjects - A critical survey of literature. In: *Psychological Bulletin*, 77 (1972) 1, S. 65–72.
- Wähnert, A.: Die Anwendung von Wahrscheinlichkeitstests in der Außenprüfung und die richtige Interpretation der Ergebnisse. In: *Die steuerliche Betriebsprüfung*, 47 (2007), März 3, S. 65–70.

Watrin, C.; Struffert, R.; Ullmann, R.: Benford's law: an instrument for selecting tax audit targets? In: *Review of Managerial Science*, 2 (2008), nov 3, S. 219–237.

Westberg, M.: An adaptive method of combining independent statistical tests. In: *Forschungsbericht, Nr. 6. Statistiska Institutionen, Göteborgs Universitet, Sweden*, 1985.

Witting, H.; Müller-Funk, U.: *Mathematische Statistik II*. Stuttgart: B.G.Teubner 1995.

Wolitzky, D. L.; Spence, D. P.: Individual consistencies in the random generation of choices. In: *Perceptual & Motor Skills*, 26 (1968), S. 1211–1214.

Yates, F.: Contingency tables involving small numbers and the χ^2 test. In: *Supplement to the Journal of the Royal Statistical Society*, 1 (1934) 2, S. 217–235.

Anhang

A Beweise

zu Satz 3.17. Sei $Y = \frac{X}{10^r}$ und r so gewählt dass $\mathbb{E}(Y) \cdot 10^r = \mathbb{E}(X)$ und $\mathbb{E}(Y) \in 1, 2, \dots, 9$. Es ergeben sich damit $\mathbb{E}(Y) \geq k$ und $\text{Var}(Y) = \frac{\sigma^2}{10^{2r}}$. Dann gilt mit der Tschebyscheff-Ungleichung:

$$\begin{aligned} P(|Y - \mathbb{E}(Y)| \geq 1) &\leq \frac{\sigma^2}{10^{2r}} \\ \Leftrightarrow P(|Y - \mathbb{E}(Y)| \leq 1) &\geq 1 - \frac{\mathbb{E}(Y)}{10^r} \geq 1 - \frac{k}{10^r} \end{aligned}$$

Aus der Bedingung $\mathbb{E}(X) > 10$ folgt, dass $r \geq 1$, womit die Aussage bewiesen ist. \square

zu Satz 3.19. Sei $Y = \frac{X}{10^r}$ und r so gewählt dass $\mathbb{E}(Y) \cdot 10^r = \mathbb{E}(X)$ und $\mathbb{E}(Y) \in 1, 2, \dots, 9$. Es ergeben sich damit $\mathbb{E}(Y) \geq k$ und $\text{Var}(Y) = \frac{\sigma^2}{10^{2r}}$. Dann gilt mit der Tschebyscheff-Ungleichung:

$$\begin{aligned} P(|Y - \mathbb{E}(Y)| \geq 1) &\leq \frac{\sigma^2}{10^{2r}} \\ \Leftrightarrow P(|Y - \mathbb{E}(Y)| \leq 1) &\geq 1 - \frac{(\mathbb{E}(Y))^2}{100} \geq 1 - \frac{k^2}{100} \end{aligned}$$

\square

zu Satz 5.1. Der erste Teil ist klar nach DLUGOSZ, MÜLLER-FUNK (2009)[Theorem 3], der zweite ergibt sich aus:

$$\begin{aligned} \chi^2 &= |Z| \sum_z (\tilde{p}(z) - p^n(z))^2 \\ &= |Z| \sum_z \left(\tilde{p}(z) - \frac{1}{|Z|} \right)^2 + 2 \sum_z \left(\tilde{p}(z) - \frac{1}{|Z|} \right) \left(\frac{1}{|Z|} - p^n(z) \right) + \sum_z \left(\frac{1}{|Z|} - p^n(z) \right)^2 \\ &\geq |Z| \sum_z \left(\tilde{p}(z) - \frac{1}{|Z|} \right)^2 - \sum_{m=1}^{|Z|-1} |\lambda_m|^{2n} \end{aligned}$$

\square

B Weitere Ergebnisse auf Basis vorhandener Datenreihen

In diesem Anhang sind die Datensätze, auf denen die empirischen Resultate zur Schätzung des β -Fehlers aus Kapitel 8 basieren — soweit möglich³⁴ — dargestellt.

B.1 Beispielfall C

In diesem Fall handelt es sich um eine Gastwirtschaft mit einfacher Küche. Nach Auskunft der Behörde sind die Zahlen manipuliert.

³⁴ Der Datenschutz verbietet eine detaillierte Beschreibung der Datensätze.

	Test Ziffer	10Euro	vertikal 1Euro	10cent	horizontal	
					10Euro/1Euro	1Euro/10cent
Einzeltests	Verteilung	0,00019996	0,00019996	0,00019996	0,00019996	0,00019996
	normal	0,77244551	0,83083383	0,15016997	0,87582484	0,19556089
	2block	0,26634673	0,76684663	0,43191362	0,75844831	0,26974605
	even	0,19762531	0,27422135	0,62037135	0,10772268	0,29778313
	lowhigh	0,46015743	0,71623413	0,39879105	0,86315218	0,7981531
kombinierte Hypothese	normal	0,00039992	0,00039992	0,00060219	0,00039992	0,00076355
	2block	0,00100702	0,00039992	0,0015495	0,00039992	0,00101851
	even	0,00077078	0,0010336	0,00039992	0,00044628	0,00111259
	lowhigh	0,00163917	0,00039992	0,0014434	0,00039992	0,00039992
	differences	0,51429714	0,99940012	0,62747451	0,95960808	0,83443311
kombinierter Test	normal	0,00679864	0,01119776	0,00019996	0,00019996	0,00019996
	2block	0,00019996	0,0039992	0,00019996	0,00019996	0,00019996
	even	0,02239552	0,00279944	0,15876825	0,00019996	0,00039992
	lowhigh	0,00019996	0,00919816	0,01279744	0,00019996	0,00039992
	differences	0,30373925	0,99820036	0,00179964	0,65446911	0,05738852

Tab. B.1: Fall C

B.2 Beispielfall D

Zum Testen der Technik wurde u. a. auch die Einnahmen eines Lebensmittelmarktes untersucht. Es ist zu erwarten, dass aufgrund der Verwendung einer Registrierkasse ohne Z-Zähler die Daten relativ leicht manipulierbar sind. Nach Aussage der Behörden sind diese Daten auch tatsächlich manipuliert. In diesen Daten wird auch die Ein-Cent Position nicht-trivial genutzt.

Test Ziffer	vertikal				horizontal			
	100Euro	10Euro	1Euro	10cent	1cent	1Euro/10cent	10cent/1cent	
Einzeltests	Verteilung	0,00339932	0,01219756	0,00039992	0,86062787	0,14977005	0,00419916	0,31133773
	normal	0,05238952	0,27454509	0,00179964	0,74925015	0,29834033	0,09618076	0,76844631
	2block	0,77464507	0,13237353	0,00519896	0,38012398	0,08278344	0,019996	0,53589282
	even	0,01999148	0,72896993	0,8187271	0,2572402	0,57311315	0,57314577	0,22961469
	lowhigh	1	0,05928469	0,0730663	0,81855885	0,3593664	0,21918977	0,62654659
kombinierte Hypothese	normal	0,00293737	0,03558323	0,000019804	0,5	0,24324053	0,0060001	0,5
	2block	0,00679864	0,01951238	0,000052799	0,5	0,09928423	0,00151119	0,5
	even	0,00125182	0,02439512	0,00079984	0,5	0,29954009	0,00839832	0,32197143
	lowhigh	0,00679864	0,00990054	0,00058759	0,5	0,27296235	0,01215754	0,5
	differences	0,07358528	0,59168166	0,09918016	0,62747451	0,63647271	0,5074985	0,84943011
kombinierter Test	normal	0,00039992	0,01439712	0,00019996	0,92281544	0,13537293	0,50009998	0,85162967
	2block	0,00519896	0,00019996	0,00019996	0,53589282	0,04999	0,48710258	0,84403119
	even	0,03279344	0,23235353	0,12317536	0,57388522	0,44671066	0,49790042	0,85662867
	lowhigh	0,00019996	0,00039992	0,00019996	0,98480304	0,46070786	0,50489902	0,87002599
	differences	0,00119976	0,41731654	0,11117776	0,48410318	0,68526295	0,69786043	0,80563887

Tab. B.2: Fall D: Lebensmittelmarkt

B.3 Beispielfall E

In einem weiteren Fall zur Überprüfung der Methodik handelt es sich um eine Stehpizzeria. Auch diese Zahlen sind nach Auskunft der Behörden manipuliert. Die Daten sind frei von Cent-Beträgen, d. h. erst auf der letzten ganzen Euro-Stelle erscheinen Ziffern ungleich 0.

	Test Ziffer	vertikal 10Euro	vertikal 1Euro	horizontal 10Euro/1Euro
Einzeltests	Verteilung	0,46490702	0,33413317	0,78284343
	normal	0,24935013	0,67246551	0,4965007
	2block	0,3865227	0,08338332	0,5604879
	even	0,0380992	0,90873068	0,25848149
	lowhigh	0,20392687	0,42356007	0,80791831
kombinierte Hypothese	normal	0,4100302	0,5	0,5
	2block	0,5	0,17798964	0,5
	even	0,12920218	0,5	0,5
	lowhigh	0,37346715	0,5	0,5
	differences	0,16076785	0,52789442	0,33473305
kombinierter Test	normal	0,41791642	0,72465507	0,68826235
	2block	0,23575285	0,19456109	0,83883223
	even	0,0529894	0,0869826	0,44731054
	lowhigh	0,039992	0,87102579	0,29834033
	differences	0,26554689	0,26094781	0,26114777

Tab. B.3: Fall E: Stehpizzeria

B.4 Beispielfall F

Bei diesem Fall handelt es sich um Zahlenreihen einer nicht näher beschriebenen Eisdielen. Es liegen Tageseinnahmen für die zwei Jahre 2001 und 2003 vor. Auch hier werden von den Behörden Manipulationen erwartet. Für das Jahr 2001 sind die Daten auf ganze Euro angegeben, für 2003 gibt es auch eine nicht-triviale 10-Cent Stelle.

	Test Ziffer	vertikal		horizontal
		10Euro	1Euro	10Euro/1Euro
Einzeltests	Verteilung	0,28294341	0,96160768	0,41571686
	normal	0,11837632	0,23375325	0,07178564
	2block	0,97280544	0,30673865	0,90481904
	even	0,29630928	0,60171342	0,71218948
	lowhigh	0,91526482	0,02060281	0,05302447
kombinierte Hypothese	normal	0,20163942	0,4675065	0,18654711
	2block	0,5	0,5	0,5
	even	0,5	0,5	0,5
	lowhigh	0,5	0,04120562	0,15114814
	differences	0,42191562	0,009998	0,02019596
kombinierter Test	normal	0,11017796	0,77204559	0,10937812
	2block	0,9190162	0,73865227	0,92361528
	even	0,42891422	0,80403919	0,63467307
	lowhigh	0,02259548	0,10777844	0,019996
	differences	0,18516297	0,00639872	0,00239952

Tab. B.4: Fall F: Eisdiele 2001

	Test Ziffer	10Euro	vertikal		horizontal	
			1Euro	10cent	10Euro/1Euro	1Euro/10cent
Einzeltests	Verteilung	0,11337732	0,00019996	0,00019996	0,00059988	0,00019996
	normal	0,50269946	0,23615277	0,64947011	0,76404719	0,67226555
	2block	0,13177365	0,13997201	0,61627674	0,35352929	0,69526095
	even	0,67492816	0,91625814	0,62418991	0,88266337	0,47988569
	lowhigh	0,91653113	0,24907853	0,38483626	0,33527046	0,70709998
kombinierte Hypothese	normal	0,22675466	0,00090423	0,00039992	0,00119976	0,00039992
	2block	0,11406528	0,00056523	0,00039992	0,00342386	0,00039992
	even	0,22675466	0,00039992	0,00039992	0,00119976	0,00170139
	lowhigh	0,22675466	0,00094841	0,00139837	0,00326836	0,00039992
	differences	0,33073385	0,79044191	0,32513497	0,4295141	0,67306539
kombinierter Test	normal	0,18796241	0,00019996	0,00019996	0,00279944	0,00019996
	2block	0,0059988	0,0079984	0,00019996	0,01619676	0,00019996
	even	0,66746651	0,03879224	0,00019996	0,61867626	0,00019996
	lowhigh	0,99940012	0,44311138	0,00019996	0,65286943	0,00019996
	differences	0,29274145	0,52689462	0,01319736	0,16556689	0,26794641

Tab. B.5: Fall F: Eisdiele 2003

B.5 Beispielfall G

Hierbei handelt es sich wieder einmal um eine Eisdiele, welche nicht näher bezeichnet ist. Für diese liegen sowohl die echten als auch die manipulierten Tageseinnahmen des Jahres 2005 vor.

Bei den Originalangaben treten vereinzelte nicht-triviale 10-Cent Stellen auf, die manipulierten sind auf ganze Euro gerundet.

		Notizbuch			Kassenbuch		
	Daten	Lokal	Fenster	Total	Lokal	Fenster	Total
Einzeltests	Verteilung	0,71985603	0,80783843	0,9240152	0,80463907	0,00019996	0,64007199
	normal	0,04119176	0,44971006	0,12557489	0,22855429	0,51229754	0,47370526
	2block	0,18736253	0,15796841	0,01579684	0,0059988	0,34253149	0,78104379
	even	0,59815807	0,91511276	1	0,83144496	0,74253656	0,91406927
	lowhigh	0,52319751	1	0,338639	0,1111969	0,91479043	0,24421056
kombinierte Hypothese	normal	0,08238352	0,5	0,25114977	0,45710858	0,00039992	0,5
	2block	0,37472506	0,31593681	0,03159368	0,0119976	0,00126061	0,5
	even	0,5	0,5	0,5	0,5	0,00039992	0,5
	lowhigh	0,5	0,5	0,5	0,22239381	0,00039992	0,48842113
	differences	0,03799240	0,04419116	0,26234753	0,71025795	0,83963207	0,90581884
kombinierter Test	normal	0,09158168	0,58928214	0,3885223	0,38512298	0,00179964	0,61627674
	2block	0,51749650	0,29074185	0,04959008	0,039992	0,05578884	0,81903619
	even	0,95640872	0,98560288	0,93661268	0,59828034	0,00119976	0,63087383
	lowhigh	0,640471906	0,98120376	0,73645271	0,30553889	0,15676865	0,63587283
	differences	0,03479304	0,00779844	0,26274745	0,40391922	0,72945411	0,86002799

Tab. B.6: Fall G: Eisdiele 2005, 1Euro

		Notizbuch			Kassenbuch		
	Test	Lokal	Fenster	Total	Lokal	Fenster	Total
Einzeltests	Verteilung	0,294141172	0,00079984	0,35672865	0,03019396	0,00339932	0,6074785
	normal	0,215556889	0,40691862	0,01159768	0,96980604	0,04359128	0,01619676
	2block	0,060187962	0,21135773	0,28154369	0,80403919	0,0209958	0,1119776
	even	0,470342007	0,34368418	0,59400836	0,91762075	0,65477603	0,19987696
	lowhigh	0,241866467	0,39501227	0,67054317	0,16703098	1	0,29021354
kombinierte Hypothese	normal	0,300780631	0,00497575	0,04221157	0,06038792	0,00249856	0,03239352
	2block	0,129155428	0,00280593	0,5	0,06038792	0,00130771	0,22395521
	even	0,5	0,00429538	0,5	0,06038792	0,00679864	0,39975392
	lowhigh	0,32110635	0,00484892	0,5	0,04945885	0,00679864	0,5
	differences	0,74585083	0,24275145	0,27734453	0,51729654	0,00359928	0,37412517
kombinierter Test	normal	0,059988002	0,00179964	0,01119776	0,36572685	0,00019996	0,09278144
	2block	0,215756849	0,06738652	0,70765847	0,01319736	0,00019996	0,12717457
	even	0,563487303	0,13197361	0,52589482	0,97540492	0,00479904	0,38512298
	lowhigh	0,49710058	0,77504499	0,84683063	0,35052989	0,16976605	0,73585283
	differences	0,73985203	0,04979004	0,14977005	0,43231354	0,00579884	0,28414317

Tab. B.7: Fall G: Eisdiele 2005, 10Euro

	Test	Lokal	Notizbuch Fenster	Total	Lokal	Kassenbuch Fenster	Total
Einzeltests	Verteilung	0,00019996	0,00019996	0,00019996	0,00019996	0,00019996	0,00019996
	normal	0,00019996	0,00019996	0,10557888	0,00019996	1	0,00019996
	2block	0,00859828	0,00039992	0,14497101	0,00019996	1	0,00019996
	even	0,66817092	0,13259283	0,28343288	0,00000001	1	0,00000019
	lowhigh	0,39331577	0,05358236	0,39492144	0,00000430	1	0,00000418
kombinierte Hypothese	normal	0,00000133	0,00000133	0,00043825	0,00000133	0,00039992	0,00000133
	2block	0,00004431	0,00000255	0,00058338	0,00000133	0,00039992	0,00000133
	even	0,00039992	0,0005383	0,00106457	0	0,00039992	0,00000000
	lowhigh	0,00142576	0,00023695	0,00143094	0,00000003	0,00039992	0,00000003
	differences	0,47130574	0,00019996	0,0	0,00019996	0,0	0,00019996
kombinierter Test	normal	0,00019996	0,00019996	0,00019996	0,00019996	0,00019996	0,00019996
	2block	0,00019996	0,00019996	0,00019996	0,00019996	0,00019996	0,00019996
	even	0,25874825	0,02659468	0,62947411	0,00019996	0,00019996	0,00019996
	lowhigh	0,29054189	0,00839832	0,73625275	0,00019996	0,00019996	0,00019996
	differences	0,00019996	0,00019996	0,00019996	0,00019996	0,00019996	0,00019996

Tab. B.8: Fall G: Eisdiele 2005, 10cent

	Test	Lokal	Notizbuch Fenster	Total	Lokal	Kassenbuch Fenster	Total
Einzeltests	Verteilung	0,85922815	0,00939812	0,43271346	0,20015997	0,00079984	0,45990802
	normal	0,09178164	0,43471306	0,37592482	0,73625275	0,01019796	0,71445711
	2block	0,07018596	0,24095181	0,55708858	0,0129974	0,00159968	0,71065787
	even	0,9411017	0,54996006	0,76386932	0,94089664	0,93757714	0,40539954
	lowhigh	0,15378425	0,49937871	0,29333575	0,03550789	1	0,1148965
kombinierte Hypothese	normal	0,18356329	0,04178651	0,5	0,40031994	0,00018484	0,5
	2block	0,14037193	0,02583384	0,5	0,02895718	0,00003373	0,5
	even	0,5	0,01879624	0,5	0,40031994	0,00159968	0,5
	lowhigh	0,30756849	0,04670076	0,5	0,06482309	0,00159968	0,26993273
	differences	0,21195761	0,00959808	0,59328134	0,71385723	0,13497301	0,47610478
kombinierter Test	normal	0,18116377	0,0179964	0,3875225	0,4395121	0,00019996	0,85502899
	2block	0,29354129	0,36952609	0,76744651	0,00159968	0,00019996	0,63487303
	even	0,83883223	0,34473105	0,77764447	0,8980204	0,00019996	0,76224755
	lowhigh	0,53829234	0,82303539	0,75184963	0,19216157	0,01459708	0,45410918
	differences	0,31653669	0,0009998	0,4945011	0,29494101	0,13877225	0,37352529

Tab. B.9: Fall G: Eisdiele 2005, 10Euro/1Euro

B.6 Beispielfall H

Zu diesem Fall gibt es keine nähere Beschreibung. Es liegen die gemeldeten und die wahren Tagesumsätze für die Jahre 1998, 1999 und 2001–2003 vor. Diese sind auf die 10-Cent-Stelle genau notiert.

	Test Ziffer	vertikal			horizontal	
		10Euro	1Euro	10cent	10Euro/1Euro	1Euro/10cent
Einzeltests	Verteilung	0,4095181	0,98120376	0,15896821	0,87082584	0,85882823
	normal	0,17116577	0,52809438	0,80623875	0,32453509	0,95100978
	2block	0,34873025	0,27854429	0,45370926	0,29274145	0,74945011
	even	0,34348321	0,11900707	0,52591012	0,088544805	0,65790814
	lowhigh	0,24555413	0,67647976	0,21048841	0,60338211	0,23600301
kombinierte Hypothese	normal	0,31845815	0,5	0,31793641	0,5	0,5
	2block	0,5	0,5	0,3235623	0,5	0,5
	even	0,5	0,23801414	0,31793641	0,17708961	0,5
	lowhigh	0,38427919	0,5	0,20150738	0,5	0,47200602
	differences	0,02819436	0,60927814	0,09198160	0,24935013	0,41431714
kombinierter Test	normal	0,13957209	0,93141372	0,50269946	0,554689062	0,97700460
	2block	0,19516097	0,73085383	0,77024595	0,331733653	0,96940612
	even	0,4445111	0,20835833	0,02979404	0,150569886	0,75804839
	lowhigh	0,05038992	0,95600880	0,62407519	0,209558088	0,59388122
	differences	0,03059388	0,65106979	0,10497900	0,228554289	0,48050390

Tab. B.10: Fall H: 1998, unverändert

	Test Ziffer	vertikal			horizontal	
		10Euro	1Euro	10cent	10Euro/1Euro	1Euro/10cent
Einzeltests	Verteilung	0,00039992	0,02879424	0,00019996	0,00019996	0,00019996
	normal	0,60027994	0,14077185	0,00639872	0,24495101	0,01139772
	2block	0,23015397	0,13677265	0,00259948	0,38172366	0,0129974
	even	0,40487479	0,33585700	0,83548095	0,20502383	0,76937851
	lowhigh	0,74223684	1,0	0,01151110	0,65205291	0,39811843
kombinierte Hypothese	normal	0,00079984	0,04152241	0,00003373	0,00093433	0,00005746
	2block	0,00163965	0,04056980	0,00001464	0,0013883	0,00006484
	even	0,00270147	0,08224691	0,00039992	0,00079662	0,00039992
	lowhigh	0,00079984	0,05758848	0,00005798	0,00039992	0,00144124
	differences	0,74305139	0,15696861	0,00719856	0,33553289	0,12277544
kombinierter Test	normal	0,00239952	0,01959608	0,00019996	0,00019996	0,00019996
	2block	0,00019996	0,38172366	0,00019996	0,0009998	0,00019996
	even	0,00319936	0,01179764	0,00019996	0,00019996	0,19016197
	lowhigh	0,00019996	0,96780644	0,00019996	0,00019996	0,00019996
	differences	0,13037393	0,30553889	0,004999	0,31793641	0,0329934

Tab. B.11: Fall H: 1998, manipuliert

	Test Ziffer	10Euro	vertikal 1Euro	10cent	horizontal	
					10Euro/1Euro	1Euro/10cent
Einzeltests	Verteilung	0,97640472	0,67506499	0,30913817	0,94281144	0,23315337
	normal	0,32913417	0,86022795	0,69086183	0,59668066	0,64607079
	2block	0,09178164	0,62907419	0,69406119	0,49390122	0,76624675
	even	1	0,03440255	0,75323295	0,11692488	0,23310959
	lowhigh	0,91653113	0,34611589	0,11570795	0,60342888	0,65559447
kombinierte Hypothese	normal	0,5	0,5	0,5	0,5	0,46630674
	2block	0,18356329	0,5	0,5	0,5	0,46630674
	even	0,5	0,06880509	0,5	0,23384977	0,27457885
	lowhigh	0,5	0,5	0,21063792	0,5	0,46630674
	differences	0,72125575	0,40671866	0,5764847	0,3935213	0,53869226
kombinierter Test	normal	0,61427714	0,92541492	0,63947211	0,83663267	0,5434913
	2block	0,40331934	0,68206359	0,76964607	0,6034793	0,74785043
	even	0,82523495	0,0339932	0,23535293	0,3845231	0,03439312
	lowhigh	0,99940012	0,3845231	0,44811038	0,75804839	0,66686663
	differences	0,5424915	0,27234553	0,63227355	0,39992002	0,59028194

Tab. B.12: Fall H: 1999, unverändert

	Test Ziffer	10Euro	vertikal 1Euro	10cent	horizontal	
					10Euro/1Euro	1Euro/10cent
Einzeltests	Verteilung	0,16116777	0,11877624	0,00019996	0,06738652	0,00019996
	normal	0,8790242	0,28334333	0,43231354	0,72045591	0,21695661
	2block	0,29714057	0,17856429	0,14737053	0,22495501	0,04819036
	even	0,24429933	0,11741726	0,42362068	0,02198584	0,07460994
	lowhigh	0,52619513	0,04509963	0,57247338	0,33189582	0,03250649
kombinierte Hypothese	normal	0,32233553	0,20228452	0,00155078	0,13477305	0,00083808
	2block	0,25405993	0,14706567	0,00059207	0,11529495	0,00021515
	even	0,22429924	0,10839799	0,00152304	0,01815897	0,00032006
	lowhigh	0,32233553	0,05188671	0,00039992	0,15270807	0,00015025
	differences	0,19276145	0,03579284	0,60487902	0,04519096	0,03519296
kombinierter Test	normal	0,54769046	0,07558488	0,00019996	0,37352529	0,00019996
	2block	0,20615877	0,06878624	0,00019996	0,06658668	0,00019996
	even	0,45190962	0,0009998	0,00019996	0,024995	0,03019396
	lowhigh	0,15356929	0,0489902	0,00019996	0,02439512	0,00019996
	differences	0,06318736	0,26194761	0,35632873	0,10617876	0,35332933

Tab. B.13: Fall H: 1999, manipuliert

	Test Ziffer	vertikal			horizontal	
		10Euro	1Euro	10cent	10Euro/1Euro	1Euro/10cent
Einzeltests	Verteilung	0,75264947	0,4115177	0,81683663	0,71985603	0,19576085
	normal	0,16576685	0,34033193	0,93061388	0,50469906	0,85642871
	2block	0,65186963	0,74965007	0,56628674	0,53569286	0,66726655
	even	0,00032076	0,21556486	0,53225082	0,10421005	0,16406203
	lowhigh	0,29446252	0,83437416	0,75367561	0,55324322	0,60412805
kombinierte Hypothese	normal	0,33153369	0,5	0,5	0,5	0,3915217
	2block	0,5	0,5	0,5	0,5	0,3915217
	even	0,00064152	0,36124021	0,5	0,20842009	0,19604669
	lowhigh	0,5	0,5	0,5	0,5	0,3915217
	differences	0,03179364	0,16056789	0,65406919	0,0439912	0,17196561
kombinierter Test	normal	0,52869426	0,36992601	0,92421516	0,75344931	0,59028194
	2block	0,81483703	0,64407119	0,80943811	0,71465707	0,53209358
	even	0,00079984	0,38512298	0,4455109	0,35752849	0,5054989
	lowhigh	0,70725855	0,83623275	0,79524095	0,78344331	0,5234953
	differences	0,02939412	0,45110978	0,70825835	0,11677664	0,48190362

Tab. B.14: Fall H: 2001, unverändert

	Test Ziffer	vertikal			horizontal	
		10Euro	1Euro	10cent	10Euro/1Euro	1Euro/10cent
Einzeltests	Verteilung	0,48330334	0,67366527	0,95520896	0,83063387	0,74245151
	normal	0,67606479	0,52669466	0,9080184	0,43291342	0,92181564
	2block	0,55428914	0,16436713	0,74625075	0,36812637	0,37992402
	even	0,52441642	0,06288376	0,03739029	0,06379153	0,00511121
	lowhigh	0,17122764	0,13847488	0,75320291	0,04485218	0,41440724
kombinierte Hypothese	normal	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5
	2block	0,5	0,32873425	0,5	0,5	0,5
	even	0,5	0,12576752	0,07478059	0,12758307	0,01022242
	lowhigh	0,34849372	0,27694977	0,5	0,08970435	0,5
	differences	0,48370326	0,82163567	0,5054989	0,79204159	0,63367327
kombinierter Test	normal	0,47190562	0,5544891	0,9840032	0,61727654	0,94541092
	2block	0,18356329	0,25414917	0,92461508	0,65566887	0,63267347
	even	0,71465707	0,23955209	0,14557089	0,26774645	0,0239952
	lowhigh	0,29094181	0,0569886	0,98060388	0,21095781	0,4355129
	differences	0,54309138	0,78724255	0,50769846	0,75584883	0,5554889

Tab. B.15: Fall H: 2001, manipuliert

	Test Ziffer	10Euro	vertikal 1Euro	10cent	horizontal	
					10Euro/1Euro	1Euro/10cent
Einzeltests	Verteilung	0,33353329	0,21235753	0,62747451	0,10877824	0,63827235
	normal	0,5414917	0,25474905	0,09618076	0,36832633	0,36072785
	2block	0,21435713	0,04539092	0,22375525	0,09558088	0,10277944
	even	0,83638513	0,91758866	0,75272768	0,82613235	0,76776957
	lowhigh	0,3434628	0,24276111	0,45918053	0,13428849	0,15410627
kombinierte Hypothese	normal	0,5	0,27380732	0,19236153	0,22684792	0,5
	2block	0,32199026	0,08204097	0,4475105	0,08691852	0,20555889
	even	0,5	0,42471506	0,5	0,21755649	0,5
	lowhigh	0,5	0,26589228	0,5	0,11218438	0,30821254
	differences	0,95380924	0,59388122	0,05438912	0,61307738	0,27834433
kombinierter Test	normal	0,74245151	0,21575685	0,21135773	0,30473905	0,43691262
	2block	0,19356129	0,00939812	0,19916017	0,01039792	0,03819236
	even	0,08058388	0,9010198	0,80123975	0,35172965	0,97280544
	lowhigh	0,42371526	0,11417716	0,56028794	0,03559288	0,05058988
	differences	0,85082983	0,5104979	0,01579684	0,37172565	0,17136573

Tab. B.16: Fall H: 2002, unverändert

	Test Ziffer	10Euro	vertikal 1Euro	10cent	horizontal	
					10Euro/1Euro	1Euro/10cent
Einzeltests	Verteilung	0,00019996	0,17696461	0,84263147	0,14197161	0,39532094
	normal	0,05618876	0,61987602	0,72765447	0,18756249	0,55368926
	2block	0,50369926	0,51409718	0,92641472	0,24675065	0,95140972
	even	0,74815923	0,75371199	1	1	0,82479382
	lowhigh	0,25706818	0,34375564	0,91604548	0,59792801	0,60191552
kombinierte Hypothese	normal	0,00024741	0,35392922	0,5	0,17252514	0,5
	2block	0,00039992	0,35392922	0,5	0,20775209	0,5
	even	0,00039992	0,35392922	0,5	0,28394321	0,5
	lowhigh	0,00097559	0,29361885	0,5	0,28394321	0,5
	differences	0,30553889	0,27314537	0,99160168	0,21375725	0,81043791
kombinierter Test	normal	0,00019996	0,45790842	0,80063987	0,14357129	0,4795041
	2block	0,00019996	0,79004199	0,94661068	0,02119576	0,96720656
	even	0,66806639	0,01739652	0,93981204	0,51209758	0,10557888
	lowhigh	0,00019996	0,64607079	0,44931014	0,00039992	0,31473705
	differences	0,38612278	0,10577884	0,84363127	0,16596681	0,53909218

Tab. B.17: Fall H: 2003, manipuliert

	Test Ziffer	vertikal			horizontal	
		10Euro	1Euro	10cent	10Euro/1Euro	1Euro/10cent
Einzeltests	Verteilung	0,36152769	0,25934813	0,82783443	0,62847431	0,51709658
	normal	0,78364327	0,78564287	0,85822835	0,77584483	0,71265747
	2block	0,5204959	0,78924215	0,94541092	0,81103779	0,95840832
	even	0,6562927	0,81742632	1	0,75075125	0,9358365
	lowhigh	0,0323826	0,21786473	0,17961569	0,52583128	0,05755377
kombinierte Hypothese	normal	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5
	2block	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5
	even	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5
	lowhigh	0,09509194	0,28106425	0,35923139	0,5	0,11510754
	differences	0,34593081	0,46990602	0,86462707	0,34793041	0,51709658
kombinierter Test	normal	0,65366927	0,51829634	0,93341332	0,76244751	0,57828434
	2block	0,06658668	0,68626275	0,93221356	0,6044791	0,9740052
	even	0,65066987	0,044991	0,93341332	0,57788442	0,36272745
	lowhigh	0,02459508	0,52989402	0,58008398	0,18996201	0,24095181
	differences	0,48570286	0,29554089	0,98580284	0,21115777	0,53929214

Tab. B.18: Fall H: 2003, unverändert

	Test Ziffer	vertikal			horizontal	
		10Euro	1Euro	10cent	10Euro/1Euro	1Euro/10cent
Einzeltests	Verteilung	0,03019396	0,25694861	0,46070786	0,03979204	0,16156769
	normal	0,01279744	0,38532294	0,60167966	0,17276545	0,76624675
	2block	0,84963007	0,32413517	0,91781644	0,68386323	0,71565687
	even	0,14318296	0,07504611	1	0,82476019	0,16026767
	lowhigh	0,4593762	0,75254077	0,59923129	0,76593915	0,45794088
kombinierte Hypothese	normal	0,0057747	0,5	0,5	0,06315935	0,32313537
	2block	0,06038792	0,5	0,5	0,07958408	0,32313537
	even	0,04372936	0,1373812	0,5	0,07958408	0,16921503
	lowhigh	0,1079589	0,5	0,5	0,07958408	0,32814646
	differences	0,03859228	0,32493501	0,67246551	0,11257748	0,81843631
kombinierter Test	normal	0,0059988	0,33633273	0,63687263	0,05518896	0,69526095
	2block	0,23455309	0,34453109	0,85642871	0,0959808	0,75584883
	even	0,45510898	0,0009998	0,98640272	0,06658668	0,02539492
	lowhigh	0,03239352	0,9840032	0,94641072	0,19676065	0,89082184
	differences	0,0609878	0,19936013	0,6064787	0,20515897	0,65366927

Tab. B.19: Fall H: 2003, manipuliert

B.7 Beispielfall I

Auch in diesem, nicht näher bezeichneten Fall liegen sowohl gemeldete als auch tatsächliche Tagesumsätze für das Jahr 1997 vor. Diese sind jeweils auf die 10-Cent-Stelle genau notiert.

	Test Ziffer	10Euro	vertikal 1Euro	10cent	horizontal 10Euro/1Euro	1Euro/10cent
Einzeltests	Verteilung	0,79664067	0,98160368	0,47530494	0,77724455	0,76144771
	normal	0,66586683	0,31773645	0,76324735	0,55788842	0,82043591
	2block	0,044991	0,66166767	0,91921616	0,53089382	0,71085783
	even	0,67850959	0,09643928	0,83417902	0,4181357	0,33728927
	lowhigh	0,83329769	0,75320275	0,20590296	0,65614645	0,50379545
kombinierte Hypothese	normal	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5
	2block	0,089982	0,5	0,5	0,5	0,5
	even	0,5	0,19287856	0,5	0,5	0,5
	lowhigh	0,5	0,5	0,37930286	0,5	0,5
	differences	0,99920016	0,5604879	0,9410118	0,875025	0,5844831
kombinierter Test	normal	0,78764247	0,66406719	0,75184963	0,73105379	0,92141572
	2block	0,29754049	0,87002599	0,79084183	0,82643471	0,85002999
	even	0,41011798	0,20515897	0,71545691	0,19256149	0,28814237
	lowhigh	0,56288742	0,9910018	0,08358328	0,75764847	0,43031394
	differences	0,99720056	0,58388322	0,9030194	0,87482503	0,66366727

Tab. B.20: Fall I: unverändert

	Test Ziffer	10Euro	vertikal 1Euro	10cent	horizontal 10Euro/1Euro	1Euro/10cent
Einzeltests	Verteilung	0,67906419	0,0719856	0,00019996	0,09138172	0,00019996
	normal	0,089982	0,06158768	0,02939412	0,36432713	0,07618476
	2block	0,28654269	0,17776445	0,00619876	0,16076785	0,10437912
	even	0,01629263	0,10171174	1	0,00758865	0,87152456
	lowhigh	0,35991875	0,10846092	0,15279279	0,07473723	0,61261325
kombinierte Hypothese	normal	0,17996401	0,04462056	0,00013704	0,20083031	0,00032618
	2block	0,5	0,10166268	0,00003276	0,1126586	0,00043375
	even	0,03258525	0,06634423	0,00039992	0,00955249	0,00039992
	lowhigh	0,5	0,06974333	0,00061165	0,0628351	0,00039992
	differences	0,0159968	0,09338132	0,00119976	0,05758848	0,00239952
kombinierter Test	normal	0,17536493	0,0379924	0,00019996	0,13117377	0,00019996
	2block	0,52469506	0,14277145	0,00019996	0,07318536	0,00019996
	even	0,0969806	0,00039992	0,00019996	0,0039992	0,20295941
	lowhigh	0,61127774	0,28334333	0,00019996	0,35392921	0,00019996
	differences	0,01819636	0,0759848	0,0129974	0,04939012	0,014997

Tab. B.21: Fall I: manipuliert

B.8 Beispielfall J

Ein weiterer nicht näher beschriebener Fall. Wieder mit in der Buchführung offiziell erfassten und parallel notierten tatsächlichen Tagesumsätzen. Beide Datenreihen sind für die Jahre 2004–2007 vorhanden. Die Daten sind (in allen Datenreihen) bis auf 10-Cent exakt notiert. In einzelnen Fällen treten bei der letzten Cent-Ziffer auch Fünfer auf.

	Test Ziffer	vertikal			horizontal	
		10Euro	1Euro	10cent	10Euro/1Euro	1Euro/10cent
Einzeltests	Verteilung	0,29474105	0,08818236	0,59828034	0,27674465	0,14357129
	normal	0,55468906	0,5534893	0,49130174	0,980004	0,76304739
	2block	0,62667467	0,66086783	0,80063987	0,83703259	0,80443911
	even	0,4396019	1	0,19212634	0,64807875	0,361295
	lowhigh	0,36901024	0,79538023	0,36553089	0,41225596	0,58471428
kombinierte Hypothese	normal	0,5	0,17636473	0,5	0,5	0,28714258
	2block	0,5	0,17636473	0,5	0,5	0,28714258
	even	0,5	0,17636473	0,38425268	0,5	0,26689901
	lowhigh	0,5	0,17636473	0,5	0,5	0,28714258
	differences	0,30113977	0,22835433	0,80723855	0,4765047	0,33553289
kombinierter Test	normal	0,39232154	0,24715057	0,36072785	0,94061188	0,46490702
	2block	0,5624875	0,09978004	0,94921016	0,47270546	0,74925015
	even	0,75404919	0,79064187	0,00619876	0,9120176	0,02559488
	lowhigh	0,74865027	0,43011398	0,5984803	0,38892222	0,90081984
	differences	0,60587882	0,18256349	0,74365127	0,4655069	0,32873425

Tab. B.22: Fall J: Kasse 2004, unverändert

	Test Ziffer	vertikal			horizontal	
		10Euro	1Euro	10cent	10Euro/1Euro	1Euro/10cent
Einzeltests	Verteilung	0,97020596	0,90681864	0,68326335	0,99640072	0,85002999
	normal	0,20715857	0,41231754	0,58468306	0,13357329	0,41631674
	2block	0,58528294	0,00119976	0,77884423	0,0339932	0,0529894
	even	0,60316582	0,52716535	0,35840223	0,36509464	0,23853893
	lowhigh	0,15532689	0,43863066	0,51819601	0,10095811	0,23649008
kombinierte Hypothese	normal	0,41431714	0,5	0,5	0,26714657	0,5
	2block	0,5	0,00239952	0,5	0,0679864	0,1059788
	even	0,5	0,5	0,5	0,5	0,47707786
	lowhigh	0,31065378	0,5	0,5	0,20191622	0,47298016
	differences	0,67566487	0,59688062	0,95980804	0,68586283	0,85462907
kombinierter Test	normal	0,49310138	0,81363727	0,62827435	0,48130374	0,47470506
	2block	0,9110178	0,01539692	0,86082783	0,19776045	0,18496301
	even	0,58068386	0,81223755	0,09258148	0,72645471	0,30093981
	lowhigh	0,46690662	0,84983003	0,27334533	0,40091982	0,39812038
	differences	0,61087782	0,30553889	0,97820436	0,5974805	0,65546891

Tab. B.23: Fall J: Kasse 2004, manipulierte

	Test Ziffer	10Euro	vertikal 1Euro	10cent	horizontal	
					10Euro/1Euro	1Euro/10cent
Einzeltests	Verteilung	0,86922615	0,30373925	0,29834033	0,66866627	0,08318336
	normal	0,38512298	0,94241152	0,5724855	0,49010198	0,84063187
	2block	0,69406119	0,31113777	0,37572486	0,18156369	0,5374925
	even	0,17416052	0,89252311	0,78669258	0,33997934	0,92380273
	lowhigh	0,34698727	0,785004	0,49771643	0,38880151	0,77438562
kombinierte Hypothese	normal	0,5	0,5	0,5	0,5	0,16636673
	2block	0,5	0,5	0,5	0,36312738	0,16636673
	even	0,34832103	0,5	0,5	0,5	0,16636673
	lowhigh	0,5	0,5	0,5	0,5	0,16636673
	differences	0,77624475	0,89962008	0,77864427	0,86242751	0,85462907
kombinierter Test	normal	0,65506899	0,87582484	0,47690462	0,69266147	0,52109578
	2block	0,80303939	0,46470706	0,17356529	0,20875825	0,4915017
	even	0,24115177	0,52169566	0,87962408	0,70505899	0,5694861
	lowhigh	0,79744051	0,33393321	0,27754449	0,6124775	0,99040192
	differences	0,6204759	0,95720856	0,41411718	0,75344931	0,65006999

Tab. B.24: Fall J: Kasse 2005, unverändert

	Test Ziffer	10Euro	vertikal 1Euro	10cent	horizontal	
					10Euro/1Euro	1Euro/10cent
Einzeltests	Verteilung	0,75044991	0,42311538	0,00359928	0,73425315	0,05138972
	normal	0,10857828	0,66166767	0,77464507	0,81243751	0,84483103
	2block	0,80943811	0,32633473	0,67446511	0,17756449	0,50429914
	even	0,25940026	0,8859695	0,2697147	0,6213704	0,48566871
	lowhigh	0,68664185	0,59035962	0,22265331	0,5035718	0,24945527
kombinierte Hypothese	normal	0,21715657	0,5	0,00719856	0,5	0,10277944
	2block	0,5	0,5	0,00719856	0,35512898	0,10277944
	even	0,5	0,5	0,01271937	0,5	0,16493752
	lowhigh	0,5	0,5	0,01080735	0,5	0,10179911
	differences	0,4645071	0,0839832	0,88962208	0,52109578	0,34413117
kombinierter Test	normal	0,39632074	0,70485903	0,05778844	0,82883423	0,30593881
	2block	0,94981004	0,67346531	0,69886023	0,49370126	0,73345331
	even	0,04379124	0,07478504	0,01219756	0,94921016	0,00119976
	lowhigh	0,92421516	0,86802639	0,15756849	0,91841632	0,17336533
	differences	0,42711458	0,04719056	0,33153369	0,37972406	0,14957009

Tab. B.25: Fall J: Kasse 2005, manipulierte

	Test Ziffer	vertikal			horizontal	
		10Euro	1Euro	10cent	10Euro/1Euro	1Euro/10cent
Einzeltests	Verteilung	0,21615677	0,32033593	0,80223955	0,44091182	0,88562288
	normal	0,19696061	0,72165567	0,04419116	0,95001	0,23095381
	2block	0,18756249	0,85242951	0,16236753	0,66726655	0,4805039
	even	0,61488315	0,86488425	0,42710306	0,90490795	0,48600171
	lowhigh	0,40425667	1	0,1330578	0,48012789	0,34746762
kombinierte Hypothese	normal	0,23587976	0,5	0,08838232	0,5	0,46190762
	2block	0,22858901	0,5	0,32473505	0,5	0,5
	even	0,43231354	0,5	0,5	0,5	0,5
	lowhigh	0,35847267	0,5	0,26611561	0,5	0,5
	differences	0,5264947	0,81463707	0,35352929	0,84443111	0,42211558
kombinierter Test	normal	0,12177564	0,72925415	0,10877824	0,8940212	0,49910018
	2block	0,27494501	0,98280344	0,36412717	0,85502899	0,87762448
	even	0,30713857	0,33053389	0,4465107	0,14637073	0,27274545
	lowhigh	0,52009598	0,9990002	0,4015197	0,74525095	0,78544291
	differences	0,42571486	0,49370126	0,20335933	0,64847031	0,4735053

Tab. B.26: Fall J: Kasse 2006, unverändert

	Test Ziffer	vertikal			horizontal	
		10Euro	1Euro	10cent	10Euro/1Euro	1Euro/10cent
Einzeltests	Verteilung	0,54789042	0,86382723	0,64987003	0,5694861	0,86062787
	normal	0,03159368	0,41491702	0,63127375	0,00779844	0,31553689
	2block	0,70185963	0,25834833	0,3915217	0,5064987	0,25114977
	even	0,62464022	0,5134328	0,73923926	0,35584865	0,48473447
	lowhigh	1	0,61568007	0,13197611	1	0,41106228
kombinierte Hypothese	normal	0,06318736	0,5	0,5	0,01559688	0,5
	2block	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5
	even	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5
	lowhigh	0,5	0,5	0,26395222	0,5	0,5
	differences	0,73805239	0,55528894	0,61207758	0,5474905	0,82523495
kombinierter Test	normal	0,07958408	0,64267147	0,76164767	0,01519696	0,6064787
	2block	0,95440912	0,36232753	0,19876025	0,54189162	0,48970206
	even	0,77164567	0,5444911	0,57908418	0,5064987	0,45610878
	lowhigh	0,9990002	0,21415717	0,18056389	0,62907419	0,80563887
	differences	0,76364727	0,63187363	0,52489502	0,76324735	0,82243551

Tab. B.27: Fall J: Kasse 2006, manipulierte

	Test Ziffer	10Euro	vertikal 1Euro	10cent	horizontal 10Euro/1Euro	1Euro/10cent
Einzeltests	Verteilung	0,04179164	0,456708658	0,175164967	0,478104379	0,075184963
	normal	0,55088982	0,307138572	0,885222955	0,50829834	0,634473105
	2block	0,72525495	0,75124975	0,645270946	0,592081584	0,776044791
	even	1	0,901084835	0,387335727	1	0,541567105
	lowhigh	0,62514512	0,540408341	0,178209969	1	0,141229144
kombinierte Hypothese	normal	0,08358328	0,5	0,350329934	0,5	0,150369926
	2block	0,08358328	0,5	0,350329934	0,5	0,150369926
	even	0,08358328	0,5	0,31266859	0,5	0,150369926
	lowhigh	0,08358328	0,5	0,192324254	0,5	0,088320564
	differences	0,88862228	0,714257149	0,365726855	0,805038992	0,476504699
kombinierter Test	normal	0,20395921	0,401719656	0,765046991	0,762847431	0,271345731
	2block	0,79944011	0,953809238	0,202159568	0,649470106	0,532493501
	even	0,00039992	0,691661668	0,104979004	0,113977205	0,636072785
	lowhigh	0,94921016	0,473905219	0,120175965	0,814637073	0,044591082
	differences	0,89122176	0,517296541	0,409918016	0,708858228	0,454909018

Tab. B.28: Fall J: Kasse 2007, unverändert

	Test Ziffer	10Euro	vertikal 1Euro	10cent	horizontal 10Euro/1Euro	1Euro/10cent
Einzeltests	Verteilung	0,27554489	0,89482104	0,84243151	0,65226955	0,77784443
	normal	0,95640872	0,39412118	0,66266747	0,72425515	0,27774445
	2block	0,99880024	0,28854229	0,83083383	0,76404719	0,53389322
	even	0,62514685	0,18198335	0,53895702	0,6670893	0,73111069
	lowhigh	0,39163733	1	0,71354824	0,54468968	0,79516631
kombinierte Hypothese	normal	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5
	2block	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5
	even	0,5	0,3639667	0,5	0,5	0,5
	lowhigh	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5
	differences	0,70725855	0,91281744	0,66286743	0,71685663	0,59508098
kombinierter Test	normal	0,91141772	0,5724855	0,85502899	0,83183363	0,4185163
	2block	0,67106579	0,57508498	0,94161168	0,85562887	0,69386123
	even	0,9370126	0,04239152	0,70365927	0,26534693	0,63827235
	lowhigh	0,33393321	0,50529894	0,55068986	0,16836633	0,24555089
	differences	0,58868226	0,85322935	0,8760248	0,65046991	0,73185363

Tab. B.29: Fall J: Kasse 2007, manipulierte

B.9 Beispielfall K

In diesem Fall geht es um ein nicht näher beschriebenes Restaurant, für welches eine parallele Aufzeichnung der Tagesumsätze für die Jahre 1996–1998 gefunden wurde. Die Datenreihe für 1996 ist leider nur sehr kurz (28 Beobachtungen). Die Zahlen sind bis auf die 10-Cent-Stelle genau notiert.

	Test Ziffer	vertikal			horizontal	
		10Euro	1Euro	10cent	10Euro/1Euro	1Euro/10cent
Einzeltests	Verteilung	0,39232154	0,4545091	0,4765047	0,65406919	0,27114577
	normal	0,69006199	1	0,98220356	0,90381924	0,9640072
	2block	0,19196161	0,97580484	0,82323535	0,4465107	0,87782444
	even	1	0,71524919	0,69131781	0,7826154	1
	lowhigh	0,0542379	1	0,12834612	0,27805107	0,28234193
kombinierte Hypothese	normal	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5
	2block	0,33134272	0,5	0,5	0,5	0,5
	even	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5
	lowhigh	0,14740835	0,5	0,29453563	0,5	0,5
	differences	0,24215157	1	0,81683663	0,48930214	0,95780844
kombinierter Test	normal	0,68626275	1	0,97840432	0,935013	0,94161168
	2block	0,51229754	0,99620076	0,83763247	0,73045391	0,90341932
	even	0,46290742	0,77784443	0,41791642	0,79044191	0,96860628
	lowhigh	0,19676065	0,97480504	0,41431714	0,5154969	0,64607079
	differences	0,28094381	0,3995201	0,63587283	0,35492901	0,90741852

Tab. B.30: Fall K: Restaurant, 1996 unverändert

	Test Ziffer	vertikal			horizontal	
		10Euro	1Euro	10cent	10Euro/1Euro	1Euro/10cent
Einzeltests	Verteilung	0,3895221	0,46070786	0,32413517	0,45890822	0,14517097
	normal	0,80663867	0,46770646	0,71985603	0,52109578	0,44471106
	2block	0,71945611	0,32373525	0,18036393	0,62547491	0,20835833
	even	1	0,18918244	0,25185983	0,06405158	1
	lowhigh	0,4475464	1	0,44948176	0,58413062	0,78959254
kombinierte Hypothese	normal	0,5	0,5	0,5	0,5	0,30392882
	2block	0,5	0,5	0,28682524	0,5	0,18826364
	even	0,5	0,35799911	0,5	0,18463287	0,29034194
	lowhigh	0,5	0,5	0,5	0,5	0,29034194
	differences	0,5534893	0,56388722	1	0,9110178	0,970006
kombinierter Test	normal	0,68266347	0,44811038	0,69026195	0,50329934	0,31933613
	2block	0,50189962	0,75084983	0,03379324	0,49810038	0,14177165
	even	0,14277145	0,0329934	0,40591882	0,31793641	0,29894021
	lowhigh	0,41091782	1	0,77404519	0,54509098	0,99140172
	differences	0,98040392	0,45570886	0,5484903	0,92641472	0,98820236

Tab. B.31: Fall K: Restaurant, 1996 manipuliert

	Test Ziffer	10Euro	vertikal 1Euro	10cent	horizontal	
					10Euro/1Euro	1Euro/10cent
Einzeltests	Verteilung	0,69246151	0,13037393	0,99820036	0,31273745	0,39612078
	normal	0,18556289	0,13617277	0,29034193	0,08738252	0,77464507
	2block	0,23715257	0,11457708	0,05378924	0,12697461	0,25794841
	even	0,07144664	1	0,26185328	0,16546031	0,51814783
	lowhigh	0,27140815	0,09995849	0,58962769	0,79673775	0,12250682
kombinierte Hypothese	normal	0,37112578	0,12941805	0,5	0,1756388	0,5
	2block	0,47430514	0,11405244	0,10757848	0,22554047	0,5
	even	0,14289328	0,26074785	0,5	0,26650253	0,5
	lowhigh	0,5	0,10305833	0,5	0,5	0,2561602
	differences	0,13277345	0,58968206	0,36572685	0,20615877	0,42631474
kombinierter Test	normal	0,34413117	0,04419116	0,65186963	0,09938012	0,62027594
	2block	0,15876825	0,04639072	0,31713657	0,03239352	0,26874625
	even	0,19656069	0,44791042	0,4735053	0,45430914	0,74265147
	lowhigh	0,40571886	0,34793041	0,9370126	0,89442112	0,45170966
	differences	0,06818636	0,06838632	0,41971606	0,02659468	0,22775445

Tab. B.32: Fall K: Restaurant, 1997 unverändert

	Test Ziffer	10Euro	vertikal 1Euro	10cent	horizontal	
					10Euro/1Euro	1Euro/10cent
Einzeltests	Verteilung	0,6164767	0,68186363	0,68306339	0,95160968	0,31133773
	normal	0,9740052	0,51569686	0,65266947	0,88482304	0,9180164
	2block	0,49170166	0,32153569	0,53869226	0,39992002	0,60427914
	even	0,70554326	1	0,85094449	0,69488215	0,7920431
	lowhigh	0,58962769	1	0,85519553	0,79653331	0,79714861
kombinierte Hypothese	normal	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5
	2block	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5
	even	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5
	lowhigh	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5
	differences	0,4285143	0,66986603	0,63627275	0,46030794	0,61327734
kombinierter Test	normal	0,98720256	0,66706659	0,74505099	0,9820036	0,76924615
	2block	0,33033393	0,76164767	0,62127574	0,5664867	0,71825635
	even	0,55568886	0,36312737	0,07938412	0,94541092	0,02059588
	lowhigh	0,93741252	0,78984203	0,9870026	0,81443711	0,96440712
	differences	0,19816037	0,73385323	0,56228754	0,42911418	0,75644871

Tab. B.33: Fall K: Restaurant, 1997 manipuliert

	Test Ziffer	vertikal			horizontal	
		10Euro	1Euro	10cent	10Euro/1Euro	1Euro/10cent
Einzeltests	Verteilung	0,4875025	0,39732054	0,00019996	0,42491502	0,00019996
	normal	0,4515097	0,13277345	1	0,09538092	0,00019996
	2block	0,72245551	0,31453709	1	0,74905019	0,00019996
	even	0,42686205	0,9068014	1	0,46347141	0,00000000
	lowhigh	0,64718354	0,0385643	1	0,22470067	0,00000000
kombinierte Hypothese	normal	0,5	0,26965841	0,00039992	0,22853765	0,00000133
	2block	0,5	0,5	0,00039992	0,5	0,00000133
	even	0,5	0,5	0,00039992	0,5	0,00000000
	lowhigh	0,5	0,11620947	0,00039992	0,37476491	0,00000000
	differences	0,9410118	0,23315337	1	0,79864027	0,00019996
kombinierter Test	normal	0,44571086	0,13337333	0,00019996	0,15056989	0,00019996
	2block	0,43191362	0,33033393	0,00019996	0,72265547	0,00019996
	even	0,55428914	0,05878824	0,00019996	0,03719256	0,00019996
	lowhigh	0,75144971	0,13817237	0,00019996	0,37372525	0,00019996
	differences	0,3855229	0,12757449	0,00019996	0,82843431	0,00019996

Tab. B.34: Fall K: Restaurant, 1998 unverändert

	Test Ziffer	vertikal			horizontal	
		10Euro	1Euro	10cent	10Euro/1Euro	1Euro/10cent
Einzeltests	Verteilung	0,66926615	0,31973605	0,30973805	0,86762647	0,20895821
	normal	0,91681664	0,46770646	0,4645071	0,17236553	0,14917017
	2block	0,83523295	0,13697261	0,32873425	0,15176965	0,06558688
	even	0,25057107	0,09922341	0,01842254	0,93471549	0,00346966
	lowhigh	0,90950808	1	0,42570688	0,93609229	0,51960342
kombinierte Hypothese	normal	0,5	0,5	0,5	0,34473105	0,19213356
	2block	0,5	0,24016692	0,5	0,30353929	0,10699994
	even	0,5	0,19443463	0,05454992	0,5	0,00992257
	lowhigh	0,5	0,5	0,5	0,5	0,41791642
	differences	0,69846031	0,05718856	0,37372525	0,0759848	0,04419116
kombinierter Test	normal	0,91541692	0,32853429	0,66166767	0,4305139	0,13077385
	2block	0,94021196	0,33333333	0,49310138	0,54889022	0,17536493
	even	0,37972406	0,19276145	0,014997	0,99860028	0,00639872
	lowhigh	0,32393521	0,5114977	0,43891222	0,99620076	0,18696261
	differences	0,78364327	0,06318736	0,13897221	0,13937213	0,0319936

Tab. B.35: Fall K: Restaurant, 1998 manipuliert

B.10 Beispielfall L

Wieder ein Datensatz mit unbestimmtem Unternehmstyp. Aber auch hier sind beide Datenreihen (manipulierte und tatsächliche Tagesumsätze) für die Jahre 2005–2007 verfügbar. In den Originaldaten finden sich Cent-genaue Beträge, während die manipulierten Daten häufig auf die 10Cent-Stelle gerundet zu sein scheinen.

Test Ziffer	vertikal					horizontal				
	10Euro	1Euro	10cent	1cent	10Euro/1Euro	1Euro/10cent	10cent/1cent	10Euro/1Euro	1Euro/10cent	10cent/1cent
Verteilung normal 2block even lowhigh differences	0,61107778	0,67946411	0,09158168	0,00019996	0,71085783	0,86342731	0,00019996	0,71085783	0,86342731	0,00019996
	0,21335733	0,59968006	0,75864827	0,0069986	0,05138972	0,31953609	0,00019996	0,05138972	0,31953609	0,00019996
	0,0559888	0,11117776	0,81283743	0,13197361	0,0109978	0,35272945	0,03459308	0,0109978	0,35272945	0,03459308
	0,25293804	0,59919228	0,51098369	0,14327748	0,20186745	0,92633243	0,00000000	0,20186745	0,92633243	0,00000000
	0,24126048	0,1180444	0,79430522	0,10643652	0,05309872	0,35728252	0,20985644	0,05309872	0,35728252	0,20985644
normal 2block even lowhigh differences	0,42671466	0,5	0,18316337	0,00003665	0,10277944	0,5	0,00000133	0,10277944	0,5	0,00000133
	0,1119776	0,22235553	0,18316337	0,00053604	0,0219956	0,5	0,00015903	0,0219956	0,5	0,00015903
	0,5	0,5	0,18316337	0,00057724	0,40373489	0,5	0,00000000	0,40373489	0,5	0,00000000
	0,48252096	0,23608881	0,18316337	0,00044147	0,10619744	0,5	0,00081344	0,10619744	0,5	0,00081344
	0,82443511	0,0909818	0,34673065	0,53929214	0,21875625	0,01419716	0,00019996	0,21875625	0,01419716	0,00019996
normal 2block even lowhigh differences	0,16176765	0,67446511	0,42091582	0,00019996	0,04279144	0,65706859	0,00019996	0,04279144	0,65706859	0,00019996
	0,15696861	0,25534893	0,29254149	0,00019996	0,05218956	0,61227754	0,00019996	0,05218956	0,61227754	0,00019996
	0,64107179	0,89482104	0,72005599	0,00019996	0,59508098	0,98880224	0,00019996	0,59508098	0,98880224	0,00019996
	0,67146571	0,39692062	0,9140172	0,00019996	0,25474905	0,81643671	0,00019996	0,25474905	0,81643671	0,00019996
	0,72965407	0,06338732	0,37912418	0,00019996	0,12777445	0,02179564	0,00019996	0,12777445	0,02179564	0,00019996
Verteilung normal 2block even lowhigh	0,87642472	0,79844031	0,00419916	0,00019996	0,53229354	0,11057788	0,00019996	0,53229354	0,11057788	0,00019996
	0,37992402	0,98820236	0,93081384	0,00319936	0,94581084	0,99060188	0,00019996	0,94581084	0,99060188	0,00019996
	0,40111978	0,58528294	0,69286143	0,19776045	0,78324335	0,5934813	0,04659068	0,78324335	0,5934813	0,04659068
	0,05158688	0,7933161	1	0,08398718	0,09729933	0,92756334	0,00000000	0,09729933	0,92756334	0,00000000
	0,69396922	1	0,79463349	0,04512985	0,64255813	1	0,00000205	0,64255813	1	0,00000205
normal 2block even lowhigh differences	0,5	0,5	0,00839832	0,00001775	0,5	0,22115577	0,00000133	0,5	0,22115577	0,00000133
	0,5	0,5	0,00839832	0,00077125	0,5	0,22115577	0,00020864	0,5	0,22115577	0,00020864
	0,10317376	0,5	0,00839832	0,00035631	0,19459865	0,22115577	0,00000000	0,19459865	0,22115577	0,00000000
	0,5	0,5	0,00839832	0,00020267	0,5	0,22115577	0,00000000	0,5	0,22115577	0,00000000
	0,10777844	0,9890022	0,980004	1	0,55088982	0,97620476	0,00019996	0,55088982	0,97620476	0,00019996
normal 2block even lowhigh differences	0,67686463	0,99240152	0,17056589	0,00019996	0,95340932	0,88722256	0,00019996	0,95340932	0,88722256	0,00019996
	0,58288342	0,48110378	0,04219156	0,00019996	0,59068186	0,21715657	0,00019996	0,59068186	0,21715657	0,00019996
	0,24515097	0,72725455	0,00019996	0,00019996	0,35332933	0,00839832	0,00019996	0,35332933	0,00839832	0,00019996
	0,38032394	0,07738452	0,9930014	0,00019996	0,02759448	0,29554089	0,00019996	0,02759448	0,29554089	0,00019996
	0,06778644	0,96780644	0,1169766	0,00019996	0,31353729	0,68406319	0,00019996	0,31353729	0,68406319	0,00019996

unverändert

manipuliert

Tab. B.36: Fall L: 2005

Tab. B.37: Fall L: 2006

Test Ziffer	vertikal				horizontal			
	10Euro	1Euro	10cent	1cent	10Euro/1Euro	1Euro/10cent	10cent/1cent	
Einzeltests	Verteilung	0,25254949	0,15436913	0,33113377	0,00019996	0,0469906	0,12377524	0,00019996
	normal	0,15796841	0,76384723	0,34373125	0,76084783	0,52709458	0,95040992	0,00019996
	2block	0,64007199	0,64047191	0,48010398	0,65606879	0,61607678	0,44271146	0,00019996
	even	0,74790495	0,45379092	0,20040231	1	0,44890801	0,70670184	0,00000000
	lowhigh	0,91607126	0,6722417	0,75318835	0,58186877	0,82283173	0,60345035	0,00198248
kombinierte Hypothese	normal	0,22622082	0,30873825	0,5	0,00039992	0,0939812	0,24755049	0,00000133
	2block	0,5	0,30873825	0,5	0,00039992	0,0939812	0,27593772	0,00000133
	even	0,5	0,31834579	0,30875529	0,00039992	0,14649892	0,24755049	0,00000000
	lowhigh	0,5	0,30873825	0,5	0,00039992	0,0939812	0,24755049	0,00001138
	differences	0,71145771	0,60687862	0,63827235	0,94321136	0,72665467	0,72925415	0,00019996
kombinierter Test	normal	0,09758048	0,56588682	0,18556289	0,00019996	0,13577285	0,83983203	0,00019996
	2block	0,82143571	0,36892621	0,61987602	0,00019996	0,48630274	0,22795441	0,00019996
	even	0,02359528	0,18036393	0,51009798	0,00019996	0,00219956	0,64447111	0,00019996
	lowhigh	0,27154569	0,124975	0,98480304	0,00019996	0,02539492	0,35812837	0,00019996
	differences	0,49790042	0,55028994	0,53529294	0,00019996	0,5584883	0,73105379	0,00019996
Einzeltests	Verteilung	0,10577888	0,41591682	0,44931014	0,00019996	0,20015997	0,46090782	0,00019996
	normal	0,70985803	0,19996001	0,19616077	0,21135773	0,69906019	0,72485503	0,00019996
	2block	0,0289942	0,29014197	0,14317137	0,37052589	0,32493501	0,82883423	0,00019996
	even	1	0,0377248	0,4524827	1	0,07701674	0,03101236	0,00000000
	lowhigh	0,91466076	0,59952489	0,17287242	1	0,70852963	0,55322034	0,00000000
kombinierte Hypothese	normal	0,21115777	0,34940232	0,36005176	0,00081866	0,40031994	0,5	0,00000133
	2block	0,03307699	0,5	0,30330308	0,00135199	0,30522457	0,5	0,00000133
	even	0,21115777	0,11825567	0,5	0,00039992	0,1167298	0,11039511	0,00000000
	lowhigh	0,21115777	0,5	0,33693898	0,00039992	0,40031994	0,5	0,00000000
	differences	0,82023595	0,02619476	0,52489502	0,54389122	0,14357129	0,28174365	0,00019996
kombinierter Test	normal	0,45370926	0,26054789	0,35832833	0,00019996	0,59788042	0,72105579	0,00019996
	2block	0,01879624	0,15316937	0,43231354	0,00019996	0,16416717	0,87862428	0,00019996
	even	0,11877624	0,12437512	0,09278144	0,00019996	0,25174965	0,13477305	0,00019996
	lowhigh	0,0009998	0,78184363	0,56608678	0,00019996	0,00679864	0,84763047	0,00019996
	differences	0,77024595	0,00139972	0,19056189	0,00019996	0,09518096	0,17076585	0,00019996

unverändert

manipuliert

Test Ziffer	vertikal				horizontal			
	10Euro	1Euro	10cent	1cent	10Euro/1Euro	1Euro/10cent	10cent/1cent	
Einzeltests	Verteilung normal	0,32593481	0,37212557	0,77164567	0,00019996	0,21695661	0,60407918	0,00019996
	2block even	0,82623475	0,99520096	0,15736853	0,1029794	0,75004999	0,28154369	0,00019996
	lowhigh	0,52809438	0,58868226	0,75544891	0,14417117	0,58988202	0,82463507	0,00019996
	differences	0,01208987	0,39214903	0,20834724	1	0,01390473	0,11639599	0,00000000
Kombinierte Hypothese	normal	0,83407975	0,40137527	0,17062857	0,4576556	0,71087943	0,71104481	0,00000040
	2block even	0,5	0,5	0,31473705	0,00042849	0,43391322	0,5	0,00000133
	lowhigh	0,5	0,5	0,5	0,00058048	0,43391322	0,5	0,00000133
	differences	0,04058843	0,5	0,41669449	0,00039992	0,03268492	0,23279198	0,00000000
Kombinierter Test	normal	0,5	0,5	0,34125714	0,00163126	0,43391322	0,5	0,00000000
	2block even	0,37512498	0,67686463	0,96960608	1	0,28294341	0,66826635	0,00019996
	lowhigh	0,66626675	0,98260348	0,35532893	0,00019996	0,71505699	0,3905219	0,00019996
	differences	0,31633673	0,52009598	0,83923215	0,00019996	0,17456509	0,78684263	0,00019996
Einzeltests	normal	0,04559088	0,28394321	0,60787842	0,00019996	0,07658468	0,26434713	0,00019996
	2block even	0,67726455	0,78104379	0,06178764	0,00019996	0,95540892	0,65726855	0,00019996
	lowhigh	0,19816037	0,84403119	0,91421716	0,00019996	0,23215357	0,68626275	0,00019996
	differences	0,90821836	0,63247351	0,60487902	0,00019996	0,91961608	0,51429714	0,00019996
Kombinierte Hypothese	normal	0,63107379	0,24935013	0,69566087	0,17976405	0,79144171	0,21275745	0,00019996
	2block even	0,95980804	0,20235953	0,14337133	0,45710858	0,69626075	0,07878424	0,00019996
	lowhigh	0,02049836	0,74452213	0,34482787	1	0,05891713	0,36643751	0,00000000
	differences	0,17273704	1	0,52771358	0,05232417	0,37333749	0,65570854	0,00000000
Kombinierter Test	normal	0,5	0,49870026	0,5	0,00070793	0,5	0,4255149	0,00000133
	2block even	0,5	0,40471906	0,28674265	0,00162953	0,5	0,15756849	0,00000133
	lowhigh	0,04099672	0,5	0,5	0,00039992	0,11783426	0,5	0,00000000
	differences	0,34547409	0,5	0,5	0,00023188	0,5	0,5	0,00000000
Einzeltests	normal	0,9730054	0,93041392	0,90061988	1	0,87242551	0,87682464	0,00019996
	2block even	0,9110178	0,36012797	0,77504499	0,00019996	0,96160768	0,30673865	0,00019996
	lowhigh	0,9910018	0,08358328	0,13857229	0,00019996	0,81723655	0,039992	0,00019996
	differences	0,11217756	0,40111978	0,40891822	0,00019996	0,11517696	0,67226555	0,00019996
Kombinierte Hypothese	normal	0,25334933	0,92981404	0,09138172	0,00019996	0,74905019	0,14617077	0,00019996
	2block even	0,9070186	0,61267746	0,86862627	0,00019996	0,64547091	0,56528694	0,00019996
	lowhigh	0,9070186	0,61267746	0,86862627	0,00019996	0,64547091	0,56528694	0,00019996
	differences	0,9070186	0,61267746	0,86862627	0,00019996	0,64547091	0,56528694	0,00019996

unverändert

manipuliert

Tab. B.38: Fall L: 2007

Arbeitsberichte des Instituts für Wirtschaftsinformatik

- Nr. 1 Bolte, C.; Kurbel, K.; Moazzami, M.; Pietsch, W.: Erfahrungen bei der Entwicklung eines Informationssystems auf RDBMS- und 4GL-Basis; Februar 1991.
- Nr. 2 Kurbel, K.: Das technologische Umfeld der Informationsverarbeitung – Ein subjektiver ‘State of the Art’-Report über Hardware, Software und Paradigmen; März 1991.
- Nr. 3 Kurbel, K.: CA-Techniken und CIM; Mai 1991.
- Nr. 4 Nietsch, M.; Nietsch, T.; Rautenstrauch, C.; Rinschede, M.; Siedentopf, J.: Anforderungen mittelständischer Industriebetriebe an einen elektronischen Leitstand – Ergebnisse einer Untersuchung bei zwölf Unternehmen; Juli 1991.
- Nr. 5 Becker, J.; Prischmann, M.: Konnektionistische Modelle – Grundlagen und Konzepte; September 1991.
- Nr. 6 Grob, H. L.: Ein produktivitätsorientierter Ansatz zur Evaluierung von Beratungserfolgen; September 1991.
- Nr. 7 Becker, J.: CIM und Logistik; Oktober 1991.
- Nr. 8 Burgholz, M.; Kurbel, K.; Nietsch, T.; Rautenstrauch, C.: Erfahrungen bei der Entwicklung und Portierung eines elektronischen Leitstands; Januar 1992.
- Nr. 9 Becker, J.; Prischmann, M.: Anwendung konnektionistischer Systeme; Februar 1992.
- Nr. 10 Becker, J.: Computer Integrated Manufacturing aus Sicht der Betriebswirtschaftslehre und der Wirtschaftsinformatik; April 1992.
- Nr. 11 Kurbel, K.; Dornhoff, P.: A System for Case-Based Effort Estimation for Software-Development Projects; Juli 1992.
- Nr. 12 Dornhoff, P.: Aufwandsplanung zur Unterstützung des Managements von Softwareentwicklungsprojekten; August 1992.
- Nr. 13 Eicker, S.; Schnieder, T.: Reengineering; August 1992.
- Nr. 14 Erkelenz, F.: KVD2 – Ein integriertes wissensbasiertes Modul zur Bemessung von Krankenhausverweildauern – Problemstellung, Konzeption und Realisierung; Dezember 1992.
- Nr. 15 Horster, B.; Schneider, B.; Siedentopf, J.: Kriterien zur Auswahl konnektionistischer Verfahren für betriebliche Probleme; März 1993.
- Nr. 16 Jung, R.: Wirtschaftlichkeitsfaktoren beim integrationsorientierten Reengineering: Verteilungsarchitektur und Integrationsschritte aus ökonomischer Sicht; Juli 1993.
- Nr. 17 Miller, C.; Weiland, R.: Der Übergang von proprietären zu offenen Systemen aus Sicht der Transaktionskostentheorie; Juli 1993.
- Nr. 18 Becker, J.; Rosemann, M.: Design for Logistics – Ein Beispiel für die logistikgerechte Gestaltung des Computer Integrated Manufacturing; Juli 1993.
- Nr. 19 Becker, J.; Rosemann, M.: Informationswirtschaftliche Integrationsschwerpunkte innerhalb der logistischen Subsysteme – Ein Beitrag zu einem produktionsübergreifenden Verständnis von CIM; Juli 1993.
- Nr. 20 Becker, J.: Neue Verfahren der entwurfs- und konstruktionsbegleitenden Kalkulation und ihre Grenzen in der praktischen Anwendung; Juli 1993.
- Nr. 21 Becker, K.; Prischmann, M.: VESKONN – Prototypische Umsetzung eines modularen Konzepts zur Konstruktionsunterstützung mit konnektionistischen Methoden; November 1993.
- Nr. 22 Schneider, B.: Neuronale Netze für betriebliche Anwendungen: Anwendungspotentiale und existierende Systeme; November 1993.
- Nr. 23 Nietsch, T.; Rautenstrauch, C.; Rehfeldt, M.; Rosemann, M.; Turowski, K.: Ansätze für die Verbesserung von PPS-Systemen durch Fuzzy-Logik; Dezember 1993.
- Nr. 24 Nietsch, M.; Rinschede, M.; Rautenstrauch, C.: Werkzeuggestützte Individualisierung des objektorientierten Leitstands ooL; Dezember 1993.
- Nr. 25 Meckenstock, A.; Unland, R.; Zimmer, D.: Flexible Unterstützung kooperativer Entwurfsumgebungen durch einen Transaktions-Baukasten; Dezember 1993.
- Nr. 26 Grob, H. L.: Computer Assisted Learning (CAL) durch Berechnungsexperimente; Januar 1994.

- Nr. 27 Kirn, S.; Unland, R. (Hrsg.): Tagungsband zum Workshop „Unterstützung Organisatorischer Prozesse durch CSCW“. In Kooperation mit GI-Fachausschuß 5.5 „Betriebliche Kommunikations- und Informationssysteme“ und Arbeitskreis 5.5.1 „Computer Supported Cooperative Work“, Westfälische Wilhelms-Universität Münster, 4.-5. November 1993
- Nr. 28 Kirn, S.; Unland, R.: Zur Verbundintelligenz integrierter Mensch-Computer-Teams: Ein organisationstheoretischer Ansatz; März 1994.
- Nr. 29 Kirn, S.; Unland, R.: Workflow Management mit kooperativen Softwaresystemen: State of the Art und Problemauß; März 1994.
- Nr. 30 Unland, R.: Optimistic Concurrency Control Revisited; März 1994.
- Nr. 31 Unland, R.: Semantics-Based Locking: From Isolation to Cooperation; März 1994.
- Nr. 32 Meckenstock, A.; Unland, R.; Zimmer, D.: Controlling Cooperation and Recovery in Nested Transactions; März 1994.
- Nr. 33 Kurbel, K.; Schnieder, T.: Integration Issues of Information Engineering Based I-CASE Tools; September 1994.
- Nr. 34 Unland, R.: TOPAZ: A Tool Kit for the Construction of Application Specific Transaction; November 1994.
- Nr. 35 Unland, R.: Organizational Intelligence and Negotiation Based DAI Systems – Theoretical Foundations and Experimental Results; November 1994.
- Nr. 36 Unland, R.; Kirn, S.; Wanka, U.; O’Hare, G. M. P.; Abbas, S.: AEGIS: Agent Oriented Organisations; Februar 1995.
- Nr. 37 Jung, R.; Rimpler, A.; Schnieder, T.; Teubner, A.: Eine empirische Untersuchung von Kosteneinflussfaktoren bei integrationsorientierten Reengineering-Projekten; März 1995.
- Nr. 38 Kirn, S.: Organisatorische Flexibilität durch Workflow-Management-Systeme?; Juli 1995.
- Nr. 39 Kirn, S.: Cooperative Knowledge Processing: The Key Technology for Future Organizations; Juli 1995.
- Nr. 40 Kirn, S.: Organisational Intelligence and Distributed AI; Juli 1995.
- Nr. 41 Fischer, K.; Kirn, S.; Weinhard, C. (Hrsg.): Organisationsaspekte in Multiagentensystemen; September 1995.
- Nr. 42 Grob, H. L.; Lange, W.: Zum Wandel des Berufsbildes bei Wirtschaftsinformatikern, Eine empirische Analyse auf der Basis von Stellenanzeigen; Oktober 1995.
- Nr. 43 Abu-Alwan, I.; Schlagheck, B.; Unland, R.: Evaluierung des objektorientierten Datenbankmanagementsystems ObjectStore; Dezember 1995.
- Nr. 44 Winter, R.: Using Formalized Invariant Properties of an Extended Conceptual Model to Generate Reusable Consistency Control for Information Systems; Dezember 1995.
- Nr. 45 Winter, R.: Design and Implementation of Derivation Rules in Information Systems; Februar 1996.
- Nr. 46 Becker, J.: Eine Architektur für Handelsinformationssysteme; März 1996.
- Nr. 47 Becker, J.; Rosemann, M. (Hrsg.): Workflowmanagement – State-of-the-Art aus Sicht von Theorie und Praxis. Proceedings zum Workshop vom 10. April 1996; April 1996.
- Nr. 48 Rosemann, M.; zur Mühlen, M.: Der Lösungsbeitrag von Metadatenmodellen beim Vergleich von Workflowmanagementsystemen; Juni 1996.
- Nr. 49 Rosemann, M.; Denecke, T.; Püttmann, M.: Konzeption und prototypische Realisierung eines Informationssystems für das Prozeßmonitoring und -controlling; September 1996.
- Nr. 50 v. Uthmann, C.; Turowski, K. unter Mitarbeit von Rehfeldt, M., Skall, M.: Workflow-basierte Geschäftsprozeßregelung als Konzept für das Management industrieller Produktentwicklungsprozesse; November 1996.
- Nr. 51 Eicker, S.; Jung, R.; Nietsch, M.; Winter, R.: Entwicklung eines Data Warehouse für das Produktionscontrolling: Konzepte und Erfahrungen; November 1996.
- Nr. 52 Becker, J.; Rosemann, M.; Schütte, R. (Hrsg.): Entwicklungsstand und Entwicklungsperspektiven der Referenzmodellierung. Proceedings zur Veranstaltung vom 10. März 1997; März 1997.
- Nr. 53 Loos, P.: Capture More Data Semantic Through The Expanded Entity-Relationship Model (PERM); Februar 1997.

- Nr. 54 Becker, J.; Rosemann, M. (Hrsg.): Organisatorische und technische Aspekte beim Einsatz von Workflowmanagementsystemen. Proceedings zum Workshop vom 10. April 1997; April 1997.
- Nr. 55 Holten, R.; Knackstedt, R.: Führungsinformationssysteme – Historische Entwicklung und Konzeption; April 1997.
- Nr. 56 Holten, R.: Die drei Dimensionen des Inhaltsaspektes von Führungsinformationssystemen; April 1997.
- Nr. 57 Holten, R.; Striemer, R.; Weske, M.: Ansätze zur Entwicklung von Workflow-basierten Anwendungssystemen – Eine vergleichende Darstellung –; April 1997.
- Nr. 58 Kuchen, H.: Arbeitstagung Programmiersprachen, Tagungsband; Juli 1997.
- Nr. 59 Vering, O.: Berücksichtigung von Unschärfe in betrieblichen Informationssystemen – Einsatzfelder und Nutzenpotentiale am Beispiel der PPS; September 1997.
- Nr. 60 Schwegmann, A.; Schlagheck, B.: Integration der Prozeßorientierung in das objektorientierte Paradigma: Klassenzuordnungsansatz vs. Prozeßklassenansatz; Dezember 1997.
- Nr. 61 Speck, M.: In Vorbereitung.
- Nr. 62 Wiese, J.: Ein Entscheidungsmodell für die Auswahl von Standardanwendungssoftware am Beispiel von Warenwirtschaftssystemen; März 1998.
- Nr. 63 Kuchen, H.: Workshop on Functional and Logic Programming, Proceedings; Juni 1998.
- Nr. 64 v. Uthmann, C.; Becker, J.; Brödner, P.; Maucher, I.; Rosemann, M.: PPS meets Workflow. Proceedings zum Workshop vom 9. Juni 1998; Juni 1998.
- Nr. 65 Scheer, A.-W.; Rosemann, M.; Schütte, R. (Hrsg.): Integrationsmanagement; Januar 1999.
- Nr. 66 zur Mühlen, M.: Internet – Technologie und Historie; Juni 1999.
- Nr. 67 Holten R.: A Framework for Information Warehouse Development Processes; Mai 1999.
- Nr. 68 Holten R.; Knackstedt, R.: Fachkonzeption von Führungsinformationssystemen – Instanziierung eines FIS-Metamodells am Beispiel eines Einzelhandelsunternehmens; Mai 1999.
- Nr. 69 Holten, R.: Semantische Spezifikation Dispositiver Informationssysteme; Juli 1999.
- Nr. 70 zur Mühlen, M.: In Vorbereitung.
- Nr. 71 Klein, S.; Schneider, B.; Vossen, G.; Weske, M.; Projektgruppe PESS: Eine XML-basierte Systemarchitektur zur Realisierung flexibler Web-Applikationen; Juli 2000.
- Nr. 72 Klein, S.; Schneider, B. (Hrsg): Negotiations and Interactions in Electronic Markets, Proceedings of the Sixth Research Symposium on Emerging Electronic Markets, Muenster, Germany, September 19 - 21, 1999; August 2000.
- Nr. 73 Becker, J.; Bergerfurth, J.; Hansmann, H.; Neumann, S.; Serries, T.: Methoden zur Einführung Workflow-gestützter Architekturen von PPS-Systemen; November 2000.
- Nr. 74 Terveer, I.: Die asymptotische Verteilung der Spannweite bei Zufallsgrößen mit paarweise identischer Korrelation; Februar 2002.
- Nr. 75 Becker, J. (Ed.): Proceedings of the University Alliance Executive Directors Workshop – ECIS 2001; Juni 2001.
- Nr. 76 Klein, St. u. a. (Hrsg.): MOVE: Eine flexible Architektur zur Unterstützung des Außendienstes mit mobile devices. (In Vorbereitung.)
- Nr. 77 Becker, J.; Knackstedt, R.; Holten, R.; Hansmann, H.; Neumann, S.: Konstruktion von Methodiken: Vorschläge für eine begriffliche Grundlegung und domänenspezifische Anwendungsbeispiele; Juli 2001.
- Nr. 78 Holten, R.: Konstruktion domänenspezifischer Modellierungstechniken für die Modellierung von Fachkonzepten; August 2001.
- Nr. 79 Vossen, G.; Hüsemann, B.; Lechtenböcker, J.: XLX – Eine Lernplattform für den universitären Übungsbetrieb; August 2001.
- Nr. 80 Becker, J.; Knackstedt, R.; Serries, Th.: Gestaltung von Führungsinformationssystemen mittels Informationsportalen: Ansätze zur Integration von Data-Warehouse- und Content-Management-Systemen; November 2001.
- Nr. 81 Holten, R.: Conceptual Models as Basis for Integrated Information Warehouse Development; Oktober 2001.

- Nr. 82 Teubner, R. A.: Informationsmanagement: Disziplinärer Kontext, Historie und Stand der Wissenschaft; Februar 2002.
- Nr. 83 Vossen, G.: Vernetzte Hausinformationssysteme – Stand und Perspektive; Oktober 2001.
- Nr. 84 Holten, R.: The MetaMIS Approach for the Specification of Management Views on Business Processes; November 2001.
- Nr. 85 Becker, J.; Neumann, S.; Hansmann, H.: Workflow-integrierte Produktionsplanung und -steuerung: Ein Architekturmodell für die Koordination von Prozessen der industriellen Auftragsabwicklung, Januar 2002.
- Nr. 86 Teubner, R. A.; Klein, S.: Bestandsaufnahme aktueller deutschsprachiger Lehrbücher zum Informationsmanagement; März 2002.
- Nr. 87 Holten, R.: Specification of Management Views in Information Warehouse Projects; April 2002.
- Nr. 88 Holten, R.; Dreiling, A.: Specification of Fact Calculations within the MetaMIS Approach; Juni 2002.
- Nr. 89 Holten, R.: Backbone der Anwendungssystemkopplung; Juli 2002.
- Nr. 90 Becker, J.; Knackstedt, R. (Hrsg.): Referenzmodellierung 2002. Methoden – Modelle – Erfahrungen; August 2002.
- Nr. 91 Teubner, R. A.: Grundlegung Informationsmanagement; Februar 2003.
- Nr. 92 Vossen, G.; Westerkamp, P.: E-Learning as a Web Service; Februar 2003.
- Nr. 93 Becker, J.; Holten, R.; Knackstedt, R.; Niehaves, B.: Forschungsmethodische Positionierung in der Wirtschaftsinformatik – epistemologische, ontologische und linguistische Leitfragen; Mai 2003.
- Nr. 94 Algermissen, L.; Niehaves, B.: E-Government – State of the art and development perspectives; April 2003.
- Nr. 95 Teubner, R. A.; with Hübsch, T.: Is Information Management a Global Discipline? Assessing Anglo-American Teaching and Literature through Web Content Analysis; November 2003.
- Nr. 96 Teubner, R. A.: Information Resource Management; Dezember 2003.
- Nr. 97 Köhne, F.; Klein, S.: Prosuming in der Telekommunikationsbranche: Konzeptionelle Grundlagen und Ergebnisse einer Delphi-Studie; Dezember 2003.
- Nr. 98 Vossen, G.; Pankratius, V.: Towards E-Learning Grids; 2003.
- Nr. 99 Vossen, G.; Paul, H.: Tagungsband EMISA 2003: Auf dem Weg in die E-Gesellschaft; 2003.
- Nr. 100 Vossen, G.; Vidyasankar, K.: A Multi-Level Model for Web Service Composition; 2003.
- Nr. 101 Becker, J.; Serries, T.; Dreiling, A.; Ribbert, M.: Datenschutz als Rahmen für das Customer Relationship Management – Einfluss des geltenden Rechts auf die Spezifikation von Führungsinformationssystemen; November 2003.
- Nr. 102 Müller, R.A.; Lembeck, C.; Kuchen, H.: GlassTT – A Symbolic Java Virtual Machine using Constraint Solving Techniques for Glass-Box Test Case Generation; November 2003.
- Nr. 103 Becker, J.; Brelage C.; Crisandt J.; Dreiling A.; Holten R.; Ribbert M.; Seidel S.: Methodische und technische Integration von Daten- und Prozessmodellierungstechniken für Zwecke der Informationsbedarfsanalyse; März 2004.
- Nr. 104 Teubner, R. A.: Information Technology Management; April 2004.
- Nr. 105 Teubner, R. A.: Information Systems Management; August 2004.
- Nr. 106 Becker, J.; Brelage, C.; Gebhardt, H.; Recker, J.; Müller-Wienbergen, F.: Fachkonzeptionelle Modellierung und Analyse web-basierter Informationssysteme mit der MW-KiD Modellierungstechnik am Beispiel von ASInfo; Mai 2004.
- Nr. 107 Hagemann, S.; Rodewald, G.; Vossen, G.; Westerkamp, P.; Albers, F.; Voigt, H.: BoGSy – ein Informationssystem für Botanische Gärten; September 2004.
- Nr. 108 Schneider, B.; Totz, C.: Web-gestützte Konfiguration komplexer Produkte und Dienstleistungen; September 2004.
- Nr. 109 Algermissen, L.; Büchel, N.; Delfmann, P.; Dümmer, S.; Drawe, S.; Falk, T.; Hinzen, M.; Meesters, S.; Müller, T.; Niehaves, B.; Niemeyer, G.; Pepping, M.; Robert, S.; Rosenkranz, C.; Stichnote, M.; Wienefoet, T.: Anforderungen an Virtuelle Rathäuser – Ein Leitfaden für die herstellerunabhängige Softwareauswahl; Oktober 2004 (als Nummer 108).

- Nr. 110 Algermissen, L.; Büchel, N.; Delfmann, P.; Dümmer, S.; Drawe, S.; Falk, T.; Hinzen, M.; Meesters, S.; Müller, T.; Niehaves, B.; Niemeyer, G.; Pepping, M.; Robert, S.; Rosenkranz, C.; Stichnote, M.; Wienefoet, T.: Fachkonzeptionelle Spezifikation von Virtuellen Rathäusern – Ein Konzept zur Unterstützung der Implementierung; Oktober 2004 (als Nummer 109).
- Nr. 111 Becker, J.; Janiesch, C.; Pfeiffer, D.; Rieke, T.; Winkelmann, A.: Studie: Verteilte Publikationserstellung mit Microsoft Word und den Microsoft SharePoint Services; Dezember 2004.
- Nr. 112 Teubner, R. A.; Terwey, J.: Informations-Risiko-Management: Der Beitrag internationaler Normen und Standards; April 2005.
- Nr. 113 Teubner, R. A.: Methodische Integration von Organisations- und Informationssystemgestaltung: Historie, Stand und zukünftige Herausforderungen an die Wirtschaftsinformatik-Forschung; Mai 2006.
- Nr. 114 Becker, J.; Janiesch, C.; Knackstedt, R.; Kramer, S.; Seidel, S.: Konfigurative Referenzmodellierung mit dem H2-Toolset; November 2006.
- Nr. 115 Becker, J.; Janiesch, C.; Knackstedt, R.; Müller-Wienbergen, F.; Seidel, S.: H2 for Reporting – Analyse, Konzeption und kontinuierliches Metadatenmanagement von Management-Informationssystemen; Februar 2007.
- Nr. 116 Becker, J.; Kramer, S.; Janiesch, C.: Modellierung und Konfiguration elektronischer Geschäftsdokumente mit dem H2-Toolset; November 2007.
- Nr. 117 Becker, J.; Winkelmann, A.; Philipp, M.: Entwicklung eines Referenzvorgehensmodells zur Auswahl und Einführung von Office Suiten; Dezember 2007.
- Nr. 118 Teubner, R. A.; unter Mitarbeit von J. Terwey: IT-Service Management – Ein neues Paradigma für das Informationsmanagement; Februar 2008.
- Nr. 119 Becker, J.; Knackstedt, R.; Beverungen, D. et al.: Ein Plädoyer für die Entwicklung eines multidimensionalen Ordnungsrahmens zur hybriden Wertschöpfung; Januar 2008.
- Nr. 120 Becker, J.; Krcmar, H.; Niehaves, B. (Hrsg.): Wissenschaftstheorie und gestaltungsorientierte Wirtschaftsinformatik; Februar 2008.
- Nr. 121 Becker, J.; Richter, O.; Winkelmann, A.: Analyse von Plattformen und Marktübersichten für die Auswahl von ERP- und Warenwirtschaftssystemen Februar 2008.
- Nr. 122 Vossen, G.: DaaS-Workshop und das Studi-Programm; Februar 2009.
- Nr. 123 Becker, J.; Knackstedt, R.; Pöppelbuß, J.: Dokumentationsqualität von Reifegradmodellentwicklungen; April 2009.
- Nr. 124 Winkelmann, A.; Kässens, S.: Fachkonzeptionelle Spezifikation einer Betriebsdatenerfassungskomponente für ERP-Systeme; Juli 2009.
- Nr. 125 Becker, J.; Knackstedt, R.; Beverungen, D.; Bräuer, S.; Bruning, D.; Christoph, D.; Greving, S.; Jorch, D.; Joßbächer, F.; Jostmeier, H.; Wiethoff, S.; Yeboah, A.: Modellierung der hybriden Wertschöpfung: Eine Vergleichsstudie zu Modellierungstechniken; November 2009.
- Nr. 126 Becker, J.; Beverungen, D.; Knackstedt, R.; Behrens, H.; Glauner, C.; Wakke, P.: Stand der Normung und Standardisierung der hybriden Wertschöpfung; Januar 2010.
- Nr. 127 Majchrzak, Tim; Kuchen, Herbert: Handlungsempfehlungen für erfolgreiches Testen von Software in Unternehmen; Februar 2010.
- Nr. 128 Becker, Jörg; Bergener, Philipp; Eggert, Matthias; Heddier, Marcel; Hofmann, Sara; Knackstedt, Ralf; Räckers, Michael: IT-Risiken - Ursachen, Methoden, Forschungsperspektiven; Oktober 2010.
- Nr. 129 Becker, Jörg; Knackstedt, Ralf; Steinhorst, Matthias: Referenzmodellierung von Internetauftritten am Beispiel von Handelsverbundgruppen; Februar 2011.
- Nr. 130 Becker, J.; Beverungen, D.; Knackstedt, R.; Matzner, M.; Müller, O.; Pöppelbuß, J.: Flexible Informationssystem-Architekturen für hybride Wertschöpfungsnetzwerke (FlexNet); Februar 2011.
- Nr. 131 Haselmann, Till; Röpke, Christian; Vossen, Gottfried: Empirische Bestandsaufnahme des Software-as-a-Service-Einsatzes in kleinen und mittleren Unternehmen; Februar 2011.
- Nr. 132 Kuchen, H.; Majchrzak, T.; Müller-Olm, M. (Hrsg.): Tagungsband 16. Kolloquium Programmiersprachen und Grundlagen der Programmierung (KPS'11); September 2011.

Nr. 133 Dlugosz, Stephan; Müller-Funk, Ulrich: Ziffernanalyse zur Betrugserkennung in Finanzverwaltungen – Prüfung von Kassenbelegen; Juli 2012.